



UNIMORE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Chimiche e Geologiche

Corso di Laurea Magistrale in Didattica e Comunicazione delle Scienze

La probabilità e la matematica dei giochi: un percorso didattico per la scuola secondaria di primo grado

Relatori:

Dott.ssa Chiara Giberti

Prof. Andrea Sacchetti

Laureanda:

Letizia Moretto

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Perché sviluppare un percorso didattico sulla probabilità?	3
1.2	Fondamenti teorici della programmazione didattica	4
2	La didattica delle probabilità: analisi delle pratiche educative esistenti	7
2.1	L'esperienza BetOnMath	7
2.2	Progetto "ProbAbilmente"	7
2.3	Mettiamo in gioco la probabilità: percorsi per il primo biennio e oltre	8
2.4	Probabilità e gioco d'azzardo: conoscere per non "farsi giocare" .	9
2.5	Fate il nostro gioco	10
2.6	Trattazione della probabilità nei testi scolastici	11
2.6.1	La matematica	12
2.6.2	Archimede	17
2.6.3	Assi in matematica	20
2.6.4	Conosco risolvo argomento	24
2.6.5	Contaci!	29
3	Organizzazione delle attività in aula	33
3.1	La scelta di un'attività didattica di stampo laboratoriale	33
3.2	Progettazione della programmazione didattica	35
3.2.1	Definizione del percorso didattico: analisi del curriculum, selezione dei contenuti e formulazione di obiettivi e prerequisiti	36
3.2.2	Prima attività: domande introduttive	38
3.2.3	Seconda attività: attività laboratoriale introduttiva al con- cetto di probabilità	40
3.2.4	Terza attività: il concetto di equiprobabilità e esempi di calcolo della probabilità	45
3.2.5	Quarta attività: eventi certi possibili e impossibili	51
3.2.6	Quinta attività: eventi possibili, ma molto improbabili . .	58
3.2.7	Sesta attività: probabilità in giallo	67
3.2.8	Settima attività: laboratorio di simulazione di un gratta e vinci	70
3.2.9	Ottava attività: discussione finale	72
3.2.10	Nona attività: compito per casa	73
3.2.11	Decima attività: verifica in classe	74

4	Analisi dei risultati	76
4.1	Dalla proposta alla pratica didattica	76
4.2	Interpretazione dei risultati e valutazione del percorso	79
4.2.1	Domande introduttive	79
4.2.2	Attività laboratoriale introduttiva al concetto di probabilità	81
4.2.3	Il concetto di equiprobabilità e esempi di calcolo della probabilità	82
4.2.4	Eventi certi, possibili e impossibili	84
4.2.5	Eventi possibili, ma molto improbabili	89
4.2.6	Probabilità in giallo	90
4.2.7	Discussione finale	92
4.2.8	Verifica in classe	93
4.2.9	Compito per casa	102
4.2.10	Autovalutazione	103
5	Conclusioni	116
A	Allegati	119

1 Introduzione

1.1 Perché sviluppare un percorso didattico sulla probabilità?

Sviluppare un percorso didattico sulla probabilità risponde alla necessità di offrire agli studenti gli strumenti per comprendere l'incertezza e il concetto di caso, colmando al contempo un vuoto formativo che vede questo argomento ancora troppo spesso tralasciato nella scuola secondaria di primo grado come ho potuto verificare personalmente durante la mia esperienza di insegnamento. Questo avviene principalmente per due motivi: da un lato, la pressione legata al completamento delle programmazioni di classe e i tempi ridotti spingono molti docenti a concentrarsi solo su contenuti considerati prioritari; dall'altro, la probabilità non sempre viene percepita come un contenuto fondamentale del curriculum, ma piuttosto come un argomento facoltativo, da affrontare solo se rimane tempo a fine anno.

Come evidenziato in letteratura [17], l'insegnamento della probabilità riveste solitamente un ruolo solo marginale nei programmi scolastici, infatti l'argomento "*Matematica del certo e del probabile*" fa una timida comparsa nei programmi ministeriali per la scuola secondaria di primo grado nel 1979, mentre in quelli per la scuola primaria solamente nel 1985. Molti anni dopo, nel 2000, il professor Carlo Sbordone, presidente dell'UMI (Unione Matematica Italiana) insedia una commissione per lo studio e l'elaborazione di un curriculum di matematica per i tre gradi scolastici. Il lavoro di questo gruppo di ricerca dà origine alla pubblicazione "*Matematica 2001*" [13]. Nel 2002 vengono pubblicate le *Indicazioni per i piani di studio personalizzati per la scuola primaria e secondaria di primo grado*, che inglobano alcuni dei suggerimenti dell'UMI e per la prima volta alla probabilità viene riservato uno spazio maggiore rispetto al passato. L'interesse per questa disciplina è via via crescente ed è importante specificare che le conoscenze matematiche necessarie per sviluppare i primi argomenti del calcolo della probabilità sono davvero minimali; sono infatti sufficienti le quattro operazioni e qualche informazione relativa agli insiemi. Con l'uso di questi semplici strumenti è inoltre possibile risolvere anche problemi molto complessi.

In conclusione, la progettazione di un percorso didattico sulla probabilità non rappresenta un ampliamento dei contenuti scolastici, ma risponde alla necessità di fare luce su un argomento ormai marginalizzato. L'obiettivo della presente tesi è quindi quello di creare una proposta formativa concreta, che possa guidare gli

studenti a sviluppare un'iniziale conoscenza probabilistica.

1.2 Fondamenti teorici della programmazione didattica

Le informazioni e i concetti presentati in questo capitolo sono tratti principalmente da *Matematica per le scienze della vita* di D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei [16].

Nel contesto dell'esperienza quotidiana e scientifica, esistono eventi il cui esito non può essere previsto con certezza a priori, nonostante condizioni iniziali note. Tali eventi, definiti casuali o aleatori, si manifestano secondo modalità che variano da un'osservazione all'altra. Gli esempi più ricorrenti includono fenomeni come il lancio di una moneta o di un dado o ancora l'estrazione di un numero in una lotteria in cui non è possibile determinare anticipatamente il risultato. Proprio l'analisi dei giochi d'azzardo ha rappresentato il punto di partenza per lo sviluppo della teoria matematica della probabilità, grazie alla possibilità di ripetere facilmente gli esperimenti e di verificarne empiricamente gli esiti. Ciò ha permesso alla teoria della casualità di affermarsi come strumento rigoroso per interpretare l'incertezza. Con il tempo, questa disciplina ha conosciuto un'importante evoluzione, fino a diventare una componente fondamentale per lo studio e la comprensione di una vasta gamma di fenomeni, non solo nel gioco d'azzardo, ma anche in ambiti scientifici, sociali ed economici. Di seguito vengono fornite le definizioni fondamentali che sono state scelte per la progettazione di questo percorso.

Definition 1. Diremo spazio degli eventi l'insieme S di tutti i possibili esiti $e_1, e_2, \dots$ di un dato esperimento (detto **evento aleatorio**) e lo indichiamo con

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_N\} \quad (1)$$

Definition 2. È necessario assegnare un valore numerico alla probabilità di ogni singolo esito elementare $e_1, e_2, \dots, e_N$ con le seguenti prescrizioni:

- $P(e_j) \in [0, 1]$ per ogni $j = 1, 2, \dots, N$;
- la somma delle probabilità dei singoli esiti elementari deve essere esattamente uguale a 1, ovvero

$$\sum_{j=1}^N P(e_j) = 1.$$

Se si indica con E un **evento**, ovvero un sottoinsieme dello spazio campionario S , allora si definisce

$$P(E) = \sum_{j : e_j \in E} P(e_j).$$

Si ricavano le seguenti informazioni:

- se l'evento E è tale che $P(E) = 1$, allora E è l'**evento certo** ovvero l'evento che si realizza sempre;
- se l'evento E è tale che $P(E) = 0$, allora E è l'**evento impossibile** ovvero l'evento che non si realizza mai;
- se l'evento E è tale che $0 < P(E) < 1$, allora E è l'**evento probabile** ovvero l'evento che potrebbe verificarsi.

Si considera, poi, il caso particolare di **spazi equiprobabili**, ovvero spazi di probabilità in cui gli esiti elementari e_j hanno tutti **la medesima probabilità** di verificarsi:

$$P(e_j) = p = \frac{1}{N}.$$

In questo scenario si ha che la probabilità di verificarsi di un evento E è data dal rapporto dei numeri di elementi di E ed il numero di elementi dello spazio campionario S .

In questo modo si giunge alla definizione più elementare di probabilità di un evento data dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili.

Si osserva che gli spazi di probabilità equiprobabili sono piuttosto frequenti nella pratica, si pensi al lancio di un dado **non truccato**, all'estrazione **casuale** di una carta da un mazzo o all'estrazione **casuale** di un numero della lotteria.

Definition 3. *Qualora la probabilità degli esiti elementari e_j di uno spazio di probabilità non sia identica per tutti gli esiti, si parla di **spazi non equiprobabili** come accade, ad esempio, nel caso di un dado **truccato**.*

Nel progetto verranno trattati principalmente gli esiti equiprobabili, facendo comunque un accenno anche a concetto di non equiprobabilità.

Idealmente sarebbe possibile introdurre anche concetti più complessi data la semplicità degli strumenti matematici utilizzati, ma la lunghezza limitata del percorso non ha consentito di ampliare ulteriormente le conoscenze da fornire agli studenti.

2 La didattica delle probabilità: analisi delle pratiche educative esistenti

In questo capitolo si propone una rassegna delle principali proposte progettuali per l'insegnamento della probabilità con l'obiettivo di delineare lo stato dell'arte in questo campo.

2.1 L'esperienza BetOnMath

BetOnMath [1] è un'iniziativa nata in risposta alla crescita del gioco d'azzardo in Italia, fenomeno collegato a una diffusa carenza di competenze matematiche nella popolazione. Il progetto ha come obiettivo la creazione di un percorso formativo sulla probabilità, innovativo e certificato, pensato per essere integrato nella scuola secondaria di secondo grado. Attraverso questo percorso, gli studenti possono comprendere i concetti probabilistici legati al gioco d'azzardo e riflettere sui rischi associati a decisioni prese in condizioni di incertezza, spesso influenzate da errori cognitivi. Il programma è stato sviluppato e valutato grazie a una stretta collaborazione tra insegnanti, psicologi ed esperti di didattica della matematica; dopo due anni di sperimentazione e analisi, i risultati sono stati pubblicati e il percorso è oggi accessibile online tramite una piattaforma dedicata. Nonostante il progetto sia stato sviluppato per la scuola secondaria di secondo grado, l'esperienza e l'attività offrono spunti utili da poter applicare anche alla scuola secondaria di grado inferiore.

2.2 Progetto “ProbAbilmente”

Il progetto “*ProbAbilmente: le illusioni e i giochi di fortuna*” [2], promosso dal *Comune di Modena* e dall'*AUSL* per la scuola secondaria di secondo grado, ha coinvolto dal 2015 al 2020 circa 1650 studenti e 60 docenti, con l'obiettivo di rendere consapevoli i ragazzi dei rischi del gioco d'azzardo partendo dalla conoscenza del calcolo delle probabilità. Gli insegnanti hanno ricevuto una formazione specifica che ha consentito loro di progettare e realizzare percorsi didattici di 2-8 ore spesso includendo anche l'insegnamento di Educazione Civica.

Le attività svolte in classe sono state le seguenti:

- simulazioni con dadi, carte e oggetti reali;
- calcolo delle probabilità nei giochi classici come gratta e vinci, lotto;

- simulazioni sui numeri ritardatari del lotto;
- questionari prima e dopo il percorso didattico;
- discussioni guidate.

Al termine dei percorsi, i risultati hanno evidenziato un forte calo nella convinzione che le abilità personali influenzino l'esito del gioco (dal 40% al 18%), un aumento della percezione del rischio e una diminuzione di tali episodi nei ragazzi che già avevano avuto esperienze in passato. Il progetto ha quindi dimostrato che l'insegnamento del calcolo delle probabilità legato a contesti reali come il gioco d'azzardo può favorire lo sviluppo di competenze logico-matematiche e promuovere comportamenti più responsabili tra gli studenti.

2.3 Mettiamo in gioco la probabilità: percorsi per il primo biennio e oltre

Il progetto descritto consiste in un insegnamento della probabilità rivolto principalmente per la scuola secondaria di secondo grado, ma ricco di spunti applicabili anche nella secondaria di primo grado. La proposta nasce presso *l'Università di Trento* sotto il coordinamento del *DiCoMat Lab* in stretta collaborazione con i docenti della scuola secondaria [3].

Il percorso didattico si articola in sei capitoli qui di seguito dettagliati:

- **situazioni motivanti:** questa sezione introduce il percorso attraverso una serie di domande stimolo radicate in contesti reali, quali il gioco d'azzardo, i test clinici e antidoping, i casi giudiziari, la genetica e i misconcetti legati ai numeri ritardatari del Lotto. Alle domande si risponderà solo durante il percorso dopo che gli studenti avranno acquisito gli strumenti matematici necessari;
- **i numeri del caso... valutazioni di probabilità:** il focus di questo capitolo è sulla quantificazione del grado di fiducia da attribuire al verificarsi di un evento stimolando la costruzione di modelli matematici in alternativa al semplice utilizzo della formula matematica. Infine, si riflette sul concetto di equiprobabilità guidando gli studenti a stimare criticamente l'ordine di grandezza dei valori probabilistici ottenuti;

- **la probabilità alla prova... esperimenti e simulazioni:** si discute sul vero significato dei valori probabilistici ottenuti attraverso l'uso di oggetti materiali e simulazioni informatiche condotte tramite foglio elettronico;
- **la probabilità in gioco:** il capitolo applica gli strumenti finora acquisiti all'analisi critica dei giochi d'azzardo e viene introdotto il calcolo combinatorio, affrontato, però, in modo intuitivo evitando formule rigide o classificazioni meccaniche. Viene, inoltre, formalizzato il concetto di gioco equo;
- **pensare in termini elementari... legge della moltiplicazione:** per risolvere i problemi complessi rimasti in sospeso nei primi capitoli, si propone una scomposizione degli eventi in elementi più semplici. Viene poi introdotta la legge della moltiplicazione, evitando di sovraccaricare gli studenti di terminologia tecnica;
- **probabilità di eventi che dipendono da altri:** destinato specificamente al secondo biennio della scuola secondaria, l'ultimo capitolo introduce la dipendenza della probabilità per poi ricavare la formula di Bayes mediante rappresentazioni grafiche d'impatto visivo.

2.4 Probabilità e gioco d'azzardo: conoscere per non “farsi giocare”

Il corso “*Probabilità e gioco d'azzardo: conoscere per non ‘farsi giocare’*”, promosso dal *Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia* [4] nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche per l'anno scolastico 2019-2020, si propone come un percorso gratuito rivolto agli insegnanti di matematica delle scuole secondarie di primo e secondo grado del Comune di Pavia e dintorni. L'obiettivo dell'iniziativa è fornire ai docenti i contenuti e gli strumenti metodologici necessari per costruire percorsi didattici di stampo laboratoriale su misura per gli studenti per insegnare loro i rischi del gioco d'azzardo e scardinare le credenze più diffuse. Il percorso è suddiviso in due moduli: il primo dedicato all'ambito matematico, il secondo all'ambito pedagogico.

Il primo modulo si concentra sulla preparazione di materiale didattico tra cui figurano come argomenti, il concetto di probabilità, il suo calcolo, la probabilità condizionata tramite la formula di Bayes, gli eventi indipendenti e alcune strategie di gioco come la martingala. Alla parte teorica vengono sempre affiancati esempi pratici relativi ai giochi d'azzardo più conosciuti.

Il secondo modulo invece è incentrato sull'ambito psicopedagogico e affronta gli

aspetti non matematici del fenomeno, definendo il gioco d'azzardo, la probabilità di vincita, i fattori contestuali, gli aspetti cognitivi ed emotivi e la dipendenza.

2.5 Fate il nostro gioco

Il progetto “*Fate il Nostro Gioco*” [5], ideato nel 2009 dalla società di divulgazione scientifica torinese *Taxi1729*, nasce con l'obiettivo di svelare i meccanismi nascosti dietro al fenomeno del gioco d'azzardo in Italia. La convinzione è che la conoscenza della matematica possa creare una diffusa consapevolezza e aiutare a sradicare il fenomeno del gioco d'azzardo. Nel corso degli anni, il progetto si è evoluto in molteplici esperienze, tra cui mostre, laboratori, conferenze, programmi televisivi, un libro e corsi di formazione. I percorsi sono principalmente ideati per i docenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado e per gli studenti universitari, ma si rivolgono anche ad operatori del settore bancario, finanziario e assicurativo.

La proposta si sviluppa intorno a sei aree tematiche fondamentali:

- **perdere è matematico:** viene descritto come la matematica può spiegare il gioco d'azzardo, ma allo stesso tempo capire i limiti del calcolo della probabilità;
- **l'estetica del caso:** le misconcezioni relative alla probabilità sono molteplici e diffuse, conoscerle può aiutare gli utenti a fare chiarezza sulle scelte errate che si possono compiere giocando d'azzardo;
- **come prendiamo decisioni:** vengono introdotti i principali bias e le più note “trappole cognitive” che portano l'essere umano a prendere decisioni irrazionali, ma prevedibili;
- **azzardo online:** si fa un approfondimento sul gioco d'azzardo sul web e si analizza anche una simulazione in modo da comprendere i segreti dietro questa tipologia di attività;
- **le 10 dimensioni del rischio:** non tutti i giochi d'azzardo presentano lo stesso rischio, l'attività quindi analizza i punti di forza (per la vendita) e la pericolosità (per il giocatore) dei principali gratta e vinci presenti sul commercio proponendo un'attività pratica adatta anche ad essere svolta in classe;
- **azzardo e investimenti:** il gioco d'azzardo e gli investimenti vengono spesso accostati, avendo caratteristiche in comune, ma anche tante differenze.

In questa sezione si analizza quando un investimento è “sano” e quando invece presenta dei rischi.

2.6 Trattazione della probabilità nei testi scolastici

In questa sezione verranno analizzati alcuni testi per la scuola secondaria di primo grado per capire e confrontare le diverse tipologie di approccio alla didattica della probabilità. Ho scelto manuali che ho personalmente utilizzato in classe a cui sono stati aggiunti libri con una struttura più particolare e innovativa. Nonostante alcuni volumi siano editi dalla medesima casa editrice, si è scelto di considerare solamente libri redatti da autori diversi in modo da avere più variabilità possibile. Questa analisi ovviamente non può essere esaustiva dato il numero molto elevato di testi disponibili sul mercato, ma fornisce comunque una panoramica basilare di come l'argomento della probabilità viene trattato nei manuali scolastici.

I testi considerati sono quasi tutti relativamente recenti (2021-2026), ma solamente il più aggiornato tiene in considerazione le nuove Indicazioni Nazionali entrate in vigore a partire dall'anno 2026 [11]. A queste pubblicazioni più attuali si è scelto di affiancare un manuale di Emma Castelnuovo del 2005 perché, nonostante la distanza temporale, quest'opera ha un carattere pionieristico infatti, il metodo proposto dalla Castelnuovo rappresenta un importante punto di riferimento per la metodologia laboratoriale.

I libri selezionati sono stati i seguenti:

- **La Matematica. Numeri B.**, Castelnuovo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005 [6]
- **Archimede. Algebra.**, Vacca R., Artuso B., Bezzi C., Atlas, Prima edizione: Gennaio 2023 [7]
- **Assi in matematica. Aritmetica 2.**, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024 [8]
- **Conosco risolvo argomento. Algebra.**, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024 [9]
- **Contaci! Volume 3.**, Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., Zanichelli, Prima edizione: Febbraio 2026 [10]

I vari manuali verranno organizzati secondo i seguenti parametri:

- argomenti trattati;
- esercizi proposti;
- proposte laboratoriali;
- esperienze aggiuntive;
- conclusioni.

2.6.1 La matematica

Come già affermato in precedenza, si è scelto di analizzare questo libro data l'importanza dell'autrice nell'ambito della didattica della matematica e per le sue idee pionieristiche nell'insegnamento di tipo laboratoriale. L'approccio così innovativo e multidisciplinare lo ha reso indicato per la presente tesi che punta ad avere lo stesso approccio di tipo pratico.

• Argomenti trattati

Il testo parte con una breve introduzione storica sul gioco dei dadi, nelle pagine successive poi si prosegue con una serie di esempi dedicati al lancio dei dadi e delle monete.



Figura 1: Introduzione e riferimenti storici. Tratto da: “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuevo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, p.64

Il primi due esempi riportati si riferiscono al lancio di una singola moneta e di un singolo dado, nei quali in modo induttivo si arriva a calcolarne la probabilità. Al termine di questa sezione viene enunciata la definizione di probabilità e il valore che può assumere (tra 0 e 1). Successivamente si parla della probabilità composta (senza mai definirla come tale) dove, con lo stesso approccio induttivo, si calcola la probabilità di lanciare 2 monete e 3 monete. Il libro prosegue con il calcolo della probabilità del lancio di due dadi arrivando a visualizzare la distribuzione triangolare che si ottiene effettuando un numero molto alto di lanci, questo serve come punto di partenza per arrivare a teorizzare la legge dei grandi numeri. Va sottolineato che, anche in questo caso, i concetti vengono spiegati, ma mai formalizzati dandogli un nome o una definizione. Dalla distribuzione triangolare si passa alla distribuzione normale che viene spiegata con diversi esempi pratici (botanica, fisica, tecnologia...).

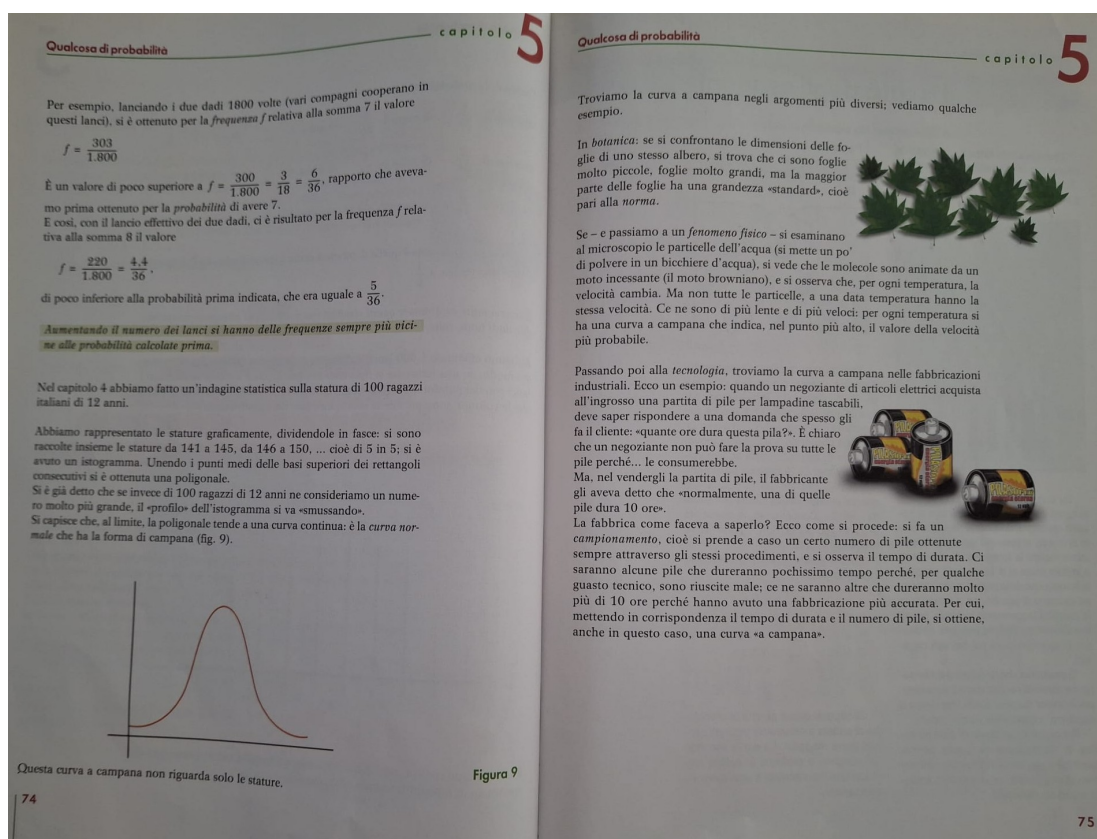


Figura 2: La distribuzione normale. Tratto da “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuevo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, pp.74-75

• Esercizi proposti

Gli esercizi proposti in questo testo sono molto variegati e seguono l'impostazione della parte teorica con esempi principalmente basati su estrazione di carte, lancio di dadi e monete ed estrazione di palline. In totale sono presenti 55 esercizi, la maggior parte sono problemi, ma sono presenti anche un esiguo numero di attività a completamento, vero e falso e risposta multipla. Un'intera sezione è dedicata agli esercizi relativi ai problemi di genetica che dimostrano il forte approccio pratico e interdisciplinare tipico di questo libro.

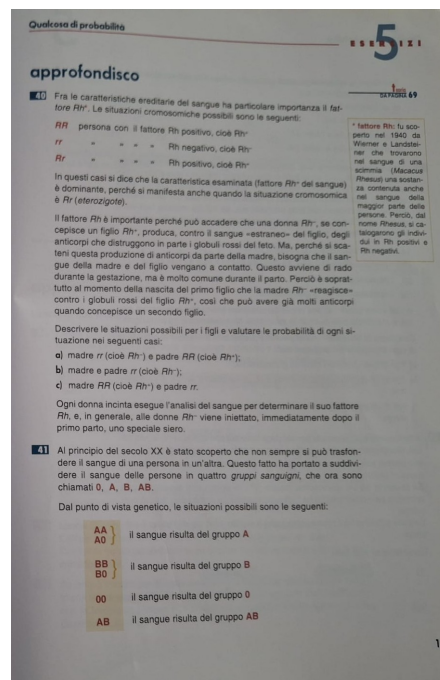


Figura 3: Esercizi di genetica. Tratto da “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuovo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, p.195

• Proposte laboratoriali

Al termine della parte contenente gli esercizi ci sono alcune proposte laboratoriali di diversa tipologia. La prima attività è “Le girandole della fortuna”, un progetto composto da 3 fasi in cui si costruiscono tre forme geometriche (esagono, ottagono, dodecagono) divise in spicchi uguali contrassegnati da colori o premi diversi per studiare la probabilità. Ruotando varie volte le girandole si possono fare considerazioni sia sulla frequenza relativa che su quella assoluta, arrivando poi anche a definire la legge dei grandi numeri.

La seconda esperienza di laboratorio proposta è un esercizio da eseguire su Excel riportando un grafico proposto nel capitolo in cui si analizzava

la distribuzione triangolare del lancio di due dadi. Partendo da questi si inserisce sul foglio di calcolo tutti i numeri raccolti per costruire un istogramma che rappresenta esattamente questa tipologia di distribuzione.

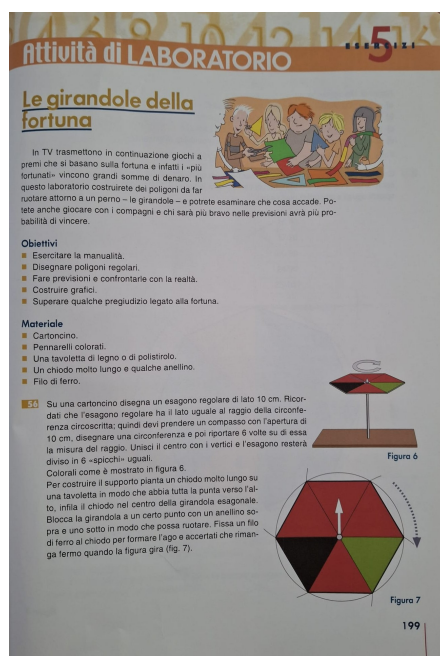


Figura 4: Laboratorio: le girandole della fortuna. Tratto da “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuovo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, p.199

• Esperienze aggiuntive

Nel testo è riportato un approfondimento interdisciplinare tra matematica e genetica. Viene presentato un caso studio relativo alla microcitemia che permette agli studenti di calcolare le probabilità di trasmissione con varie combinazioni parentali. Inoltre, viene fornito anche uno spaccato storico che spiega perché questa condizione è più frequente nelle zone italiane dove la malaria era particolarmente diffusa.

Un'altra interessante attività è rappresentata dalla tavola di Galton, un dispositivo che consente agli studenti di visualizzare concretamente la distribuzione triangolare. Nel testo è spiegato come funziona questo dispositivo e come calcolare le probabilità di posizionamento delle varie sferette.

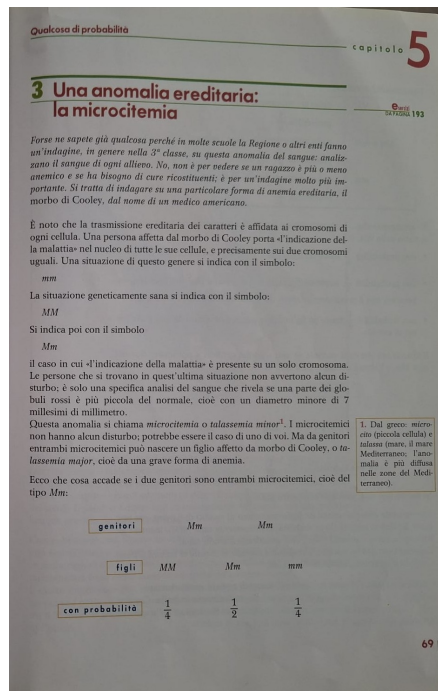


Figura 5: La microcitemia. Tratto da “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuovo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, p.69

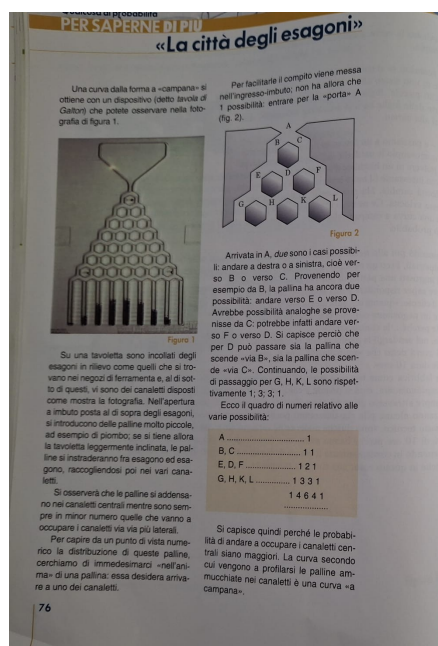


Figura 6: La tavola di Galton. Tratto da “La Matematica. Numeri B.”, Castelnuovo E., La Nuova Italia, Prima edizione: Gennaio 2005, p.76

- **Conclusioni**

Questo libro, seppur datato, ha un'impostazione molto innovativa che ben si adatta alle Nuove Indicazioni Nazionali [11] che portano il laboratorio e l'informatica al centro dell'insegnamento della matematica. Si tratta di un testo estremamente sintetico che parte da esempi concreti per arrivare alla definizione teorica. In ogni caso, la teoria è minimale e si ha un approccio prettamente pratico alla materia privilegiando un'impostazione di tipo laboratoriale. Nonostante ciò, il testo risulta molto sintetico e forse carente di qualche riferimento importante. Gli esempi reali sono numerosissimi e gli studenti hanno la possibilità di applicare i concetti probabilistici direttamente ad ambiti pratici. Il numero degli esercizi non è elevato, ma ci sono interessanti approfondimenti interdisciplinari.

2.6.2 Archimede

Il manuale Archimede è stato inserito nella tesi in quanto firmato da Roberto Vacca, autore di riferimento nella didattica della matematica; il libro presenta una forte impostazione teorica e si discosta quindi da altri testi che tendono a privilegiare una formazione di tipo più pratico.

- **Argomenti trattati**

Il manuale inizia con un semplice esempio visivo che mostra la probabilità di vincita di un giocattolo girando una ruota della fortuna. Si prosegue con la definizione teorica di evento e di probabilità includendo la formula di calcolo. Gli esempi pratici sono presenti, ma ridotti al minimo. Il capitolo si conclude con la definizione di evento certo, possibile ed impossibile. Successivamente, il testo apre una sezione sulla probabilità totale suddivisa in probabilità di eventi incompatibili, compatibili e complementari. Anche in questa sezione la parte teorica è preponderante, lasciando solo un piccolo spazio agli esempi. Infine si tratta anche la probabilità composta di eventi indipendenti e dipendenti. L'ultimo capitolo riguarda alcune definizioni alternative di probabilità: troviamo la definizione frequentista che sfocia nella legge dei grandi numeri e infine la definizione di probabilità soggettiva. Il libro riporta anche alcuni esempi di genetica.

Al termine della sezione sono presenti mappe concettuali e riassunti di tutti gli argomenti trattati.

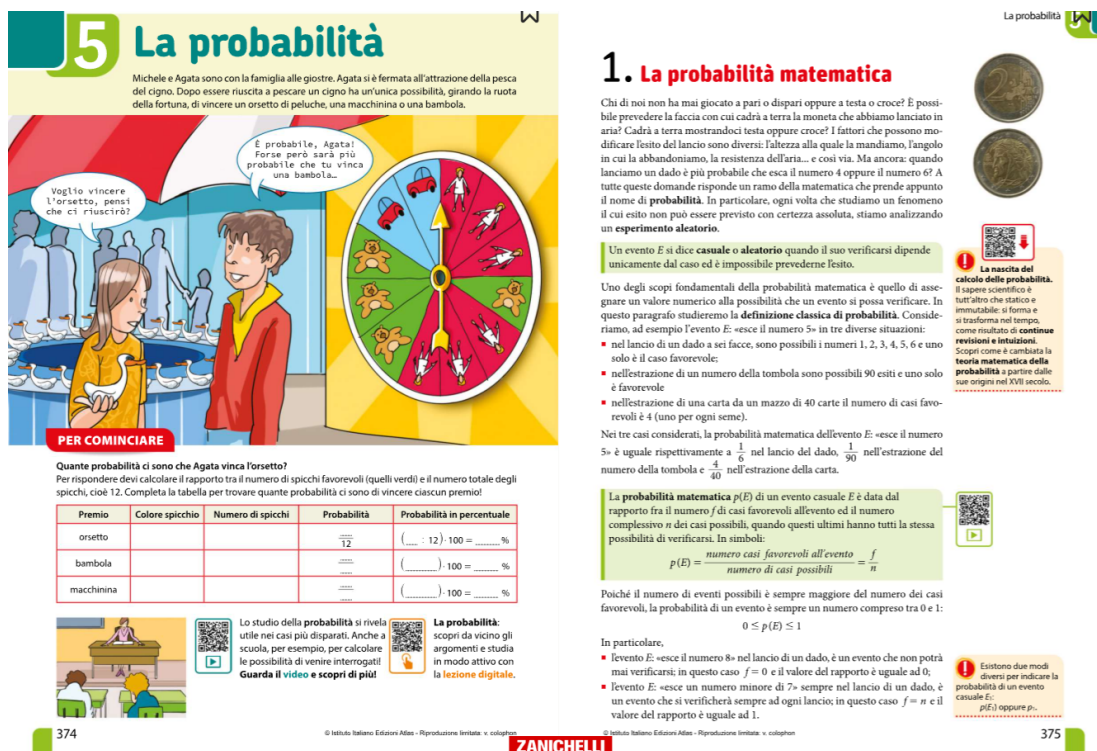


Figura 7: Introduzione alla probabilità. “Archimede. Algebra.”, Vacca R., Artuso B., Bezzi C., Atlas, Prima edizione: Gennaio 2023, pp.374-375

• Esercizi proposti

Gli esercizi proposti in questo libro sono numerosi e disseminati nelle varie sezioni del capitolo. Infatti, ci sono ben 178 esercizi nella sezione dedicata a cui si aggiungono diversi problemi inseriti nelle parti di teoria. La tipologia di esercizi è molto varia e include sia problemi legati alla teoria che a casi reali. In questo volume sono presenti anche applicazioni alla genetica, rendendo possibile un collegamento interdisciplinare tra scienze e matematica. Al termine del capitolo sono presenti attività di recupero, di potenziamento e CLIL di semplice esecuzione.

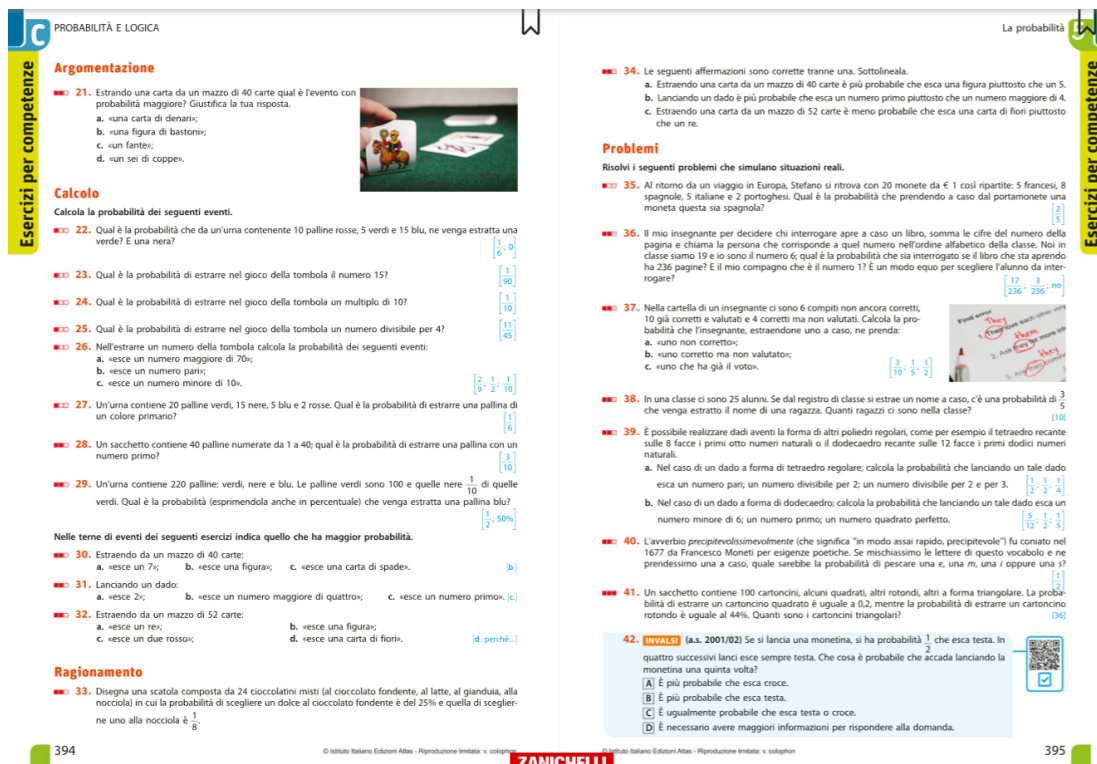


Figura 8: Esercizi. “Archimede. Algebra.”, Vacca R., Artuso B., Bezzi C., Atlas, Prima edizione: Gennaio 2023, pp. 394-395

• Proposte laboratoriali

Questo manuale non presenta proposte laboratoriali.

• Esperienze aggiuntive

Oltre ad un piccolo approfondimento di genetica, non sono presenti particolari esperienze o applicazioni della probabilità a contesti originali e interdisciplinari.

APPROFONDIMENTI

La probabilità e le scienze

La genetica è la scienza che studia come si trasmettono i caratteri ereditari dai genitori ai figli. Le origini della genetica si devono all'abate Gregorio Mendel (1822-1884) che eseguì numerose esperienze incrociando piante di pisello di razza pura a semi gialli e piante a semi verdi. Egli notò che alla prima generazione si manifestava solo il carattere semi gialli cioè, fra due caratteri puri che si incrociano, il primo, chiamato **dominante** (seme giallo), prevale sull'altro chiamato **recessivo** (seme verde). Cerchiamo di capire la giustificazione matematica di tale affermazione.

Dobbiamo sapere che ogni carattere di un individuo è determinato dalla presenza di due alleli; se indichiamo con AA gli alleli del carattere dominante e con aa gli alleli del carattere recessivo, nella fecondazione che porta alla prima generazione le piante avranno ricevuto un allele A da un genitore e un allele a dall'altro. Nella prima generazione si ha dunque un carattere "misto" (Aa) che si manifesta nel suo carattere dominante (A = seme giallo). Incrociando due piante della prima generazione Mendel ottenne alla seconda generazione piante a semi gialli per $\frac{3}{4}$ e piante a semi verdi per $\frac{1}{4}$.

Anche in questo caso, per comprendere il risultato, componiamo nuovamente gli alleli in una tabella. Gli individui della seconda generazione presentano per $\frac{1}{4}$ il carattere puro dominante (AA), per $\frac{2}{4}$ il carattere "misto" (Aa), che si manifesta nel suo carattere dominante, e per $\frac{1}{4}$ il carattere puro recessivo (aa).

	a	A
A	Aa	AA
a	aA	aa

Prima generazione

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	aa

Seconda generazione

Figura 9: Approfondimento di genetica. “Archimede. Algebra.”, Vacca R., Artuso B., Bezzi C., Atlas, Prima edizione: Gennaio 2023, p.383

- **Conclusioni**

Il presente testo ha un'impostazione tradizionale, con una forte componente teorica seguita da alcuni esempi pratici. Gli argomenti trattati sono numerosi e probabilmente anche complessi per una classe terza della scuola secondaria di primo grado, ma il manuale affronta i temi in modo generale senza entrare nel dettaglio. Gli esercizi, invece, sono numerosi e permettono allo studente di esercitarsi adeguatamente sia a casa che a scuola. La carenza principale di questo volume è la mancanza di un approccio laboratoriale con attività ed esempi che possano guidare l'alunno ad una comprensione maggiore dell'argomento.

2.6.3 Assi in matematica

La scelta di questo manuale è motivata dalla conoscenza pregressa del testo, precedentemente analizzato in occasione delle attività di valutazione e scelta dei libri per l'anno scolastico e data la sua impostazione ben bilanciata tra teoria, pratica ed esercizi si è ritenuta una valida scelta da confrontare con altri volumi con un approccio più definito.

- **Argomenti trattati**

Il testo si apre con un fumetto relativo alla vita di Gauss che introduce il concetto di curva gaussiana. L'impostazione è teorica, ma con una forte componente pratica rappresentata da esempi e da applicazioni in situazioni reali; il manuale è sintetico, ma copre un discreto numero di argomenti. Si prosegue con la definizione di evento aleatorio e la definizione classica di probabilità. Il libro fornisce poi la definizione di evento certo, incerto e impossibile e termina con la spiegazione degli eventi compatibili e incompatibili. Al termine del capitolo sono presenti riassunti e mappe concettuali.



Figura 10: Introduzione: la storia di Gauss. “Assi in matematica. Aritmetica 2.”, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024, p.247

1. Fenomeni ed eventi aleatori

NELLA REALTÀ

Lara sta giocando a un gioco di società con i suoi amici. Adesso è il suo turno, sta per tirare il dado e pensa: "Vorrei che uscisse un 2 o un 3". Può prevedere quale sarà il risultato del lancio?

Il lancio di un dado è un fenomeno di cui non possiamo prevedere l'esito, cioè il risultato. Infatti è impossibile sapere in anticipo quale numero uscirà. Fenomeni come questo sono detti **casuali** o **aleatori** (dal latino *alea* che significa "dado").

Un **fenomeno aleatorio** è un fenomeno di cui non si può prevedere l'esito.

Nel nostro esempio, il fenomeno ha 6 possibili esiti, che corrispondono alle 6 facce del dado.

Tra tutti i possibili esiti del lancio, Lara vorrebbe ottenere un 2 oppure un 3. Quando, come in questo caso, si considera un insieme dei possibili esiti di un fenomeno, si parla di **evento**.

Un **evento aleatorio** è un sottoinsieme dei possibili esiti di un fenomeno aleatorio.

insieme di tutti i possibili esiti

Come ogni insieme, un evento si indica con una lettera maiuscola e si può rappresentare in diversi modi:

- a parole $\rightarrow E$: "esce un 2 o un 3"
- per elencazione $\rightarrow E = \{2, 3\}$
- per caratteristica $\rightarrow E = \{x | x \text{ è uguale a } 2 \text{ o a } 3\}$
- graficamente, con i diagrammi di Eulero-Venn.

L'evento E si verifica in 2 casi (esce 2 o esce 3), quindi i **casi favorevoli** al verificarsi di E sono 2.

Esempio

Oscar estrae a caso una medaglietta per portachiavi dal sacchetto rappresentato e vorrebbe averne una di forma circolare.

Il fenomeno aleatorio ha 9 possibili esiti: uno per ogni medaglietta.

Oscar verrà accontentato se si verifica l'evento E : "esce una medaglietta circolare".

I casi favorevoli al verificarsi di E sono 3 e corrispondono alle medagliette racchiuse nell'insieme.

Attività

Trovi altri esercizi a p. A258

NELLA REALTÀ Ti presentiamo alcuni fenomeni aleatori "classici", che ritroverai più volte nelle prossime pagine. Per ciascuno di essi scrivi il numero di esiti possibili e il numero di casi favorevoli al verificarsi dell'evento indicato.

Lancio di una moneta

Gli esiti possibili sono testa o croce.

- Numero di esiti possibili: ... 2
- L'evento E : "esce testa" si verifica in ... 1 caso

Estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane

40 carte divise in 4 semi: spade, coppe, bastoni, denari. Ogni seme comprende i numeri da 1 a 7 e tre figure (fante, cavallo e re).

- Numero di esiti possibili: ... 40
- L'evento E : "esce una figura di bastoni" si verifica in ... 3 casi

Estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte francesi

52 carte divise in 4 semi: due semi rossi, cuori e quadri, e due semi neri, fiori e picche. Ogni seme comprende i numeri da 1 a 10 e tre figure (fante, regina e re).

- Numero di esiti possibili: ... 52
- L'evento E : "esce una carta rossa" si verifica in ... 26 casi

Estrazione di un numero della tombola o del Lotto

Viene estratto un numero compreso tra 1 e 90 (1 e 90 inclusi).

- Numero di esiti possibili: ... 90
- L'evento E : "esce un numero a una cifra" si verifica in ... 9 casi

Figura 11: Fenomeni ed eventi aleatori. “Assi in matematica. Aritmetica 2.”, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024, pp. 248-249

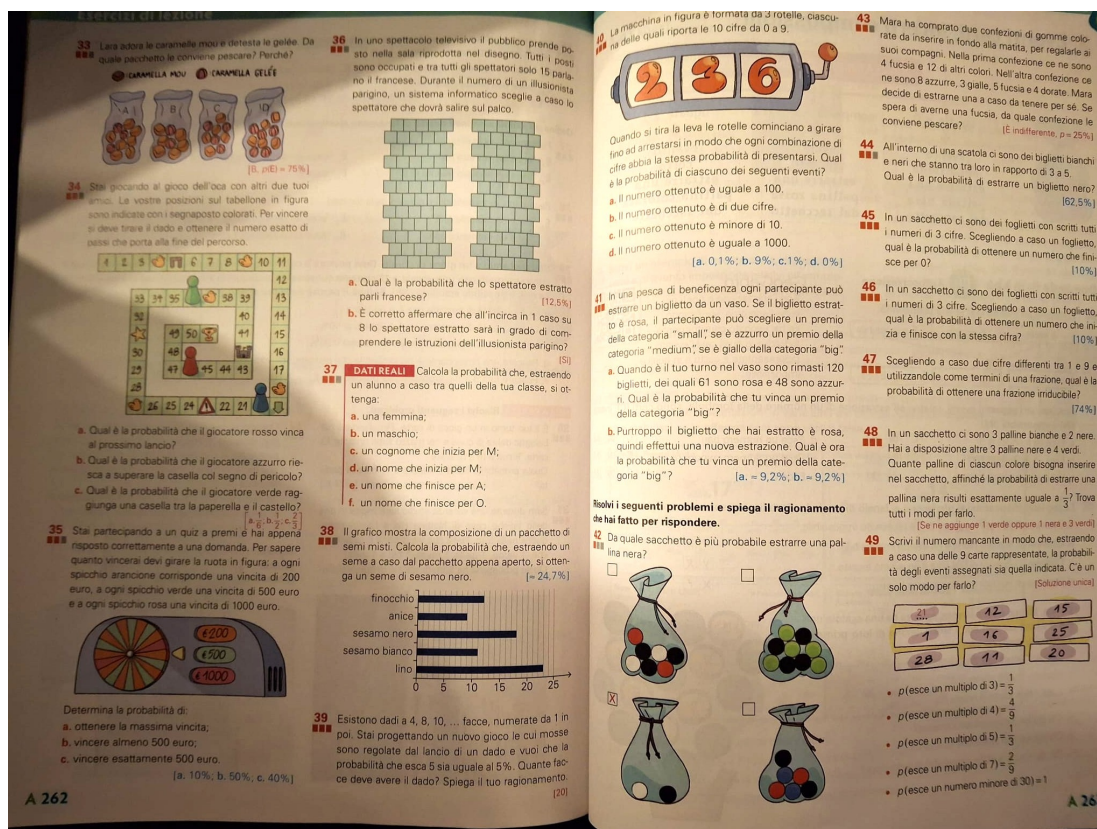


Figura 12: Esercizi. “Assi in matematica. Aritmetica 2.”, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024, pp. 262-263

• Esercizi proposti

Gli esercizi proposti sono molto variegati e spaziano da problemi semplici ad applicazioni nel mondo reale. Gli esercizi sono 72, ma nelle varie sezioni del capitolo sono presenti numerose attività intermedie. Al termine della sezione degli esercizi standard si possono trovare attività per sviluppare le competenze relative alla probabilità, problemi in preparazione alla prova Invalsi e un ripasso molto completo in vista della verifica.

• Proposte laboratoriali

In questo manuale sono presenti numerose proposte laboratoriali che verranno elencate di seguito:

- un compito di realtà che consiste nella progettazione di una pesca scolastica per una raccolta fondi;
- diverse attività di coding da svolgere su carta;
- attività di simulazione di scommesse con il lancio dei dadi.

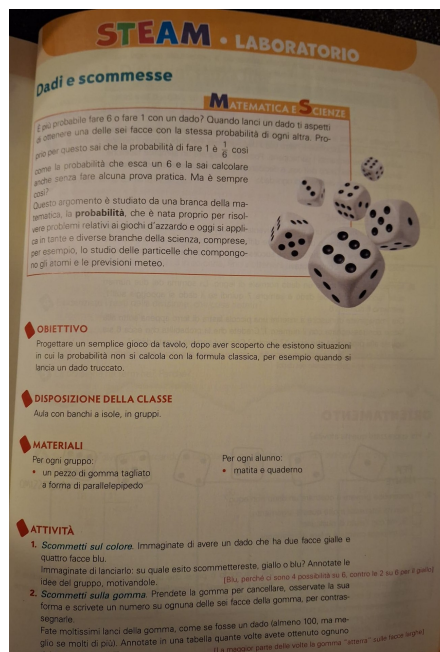


Figura 13: Laboratorio: dadi e scommesse. “Assi in matematica. Aritmetica 2.”, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024, p.279

- Esperienze aggiuntive** In questo volume sono presenti diverse attività aggiuntive molto interessanti. La prima consiste nello studiare tramite il foglio elettronico l'estrazione di una pallina da un contenitore e la funzione casuale, il libro prosegue poi con diversi esercizi di coding da risolvere tramite un software di programmazione a blocchi. È disponibile un approfondimento di educazione civica relativa al gioco d'azzardo e alla sua non equità di vincita. Al termine dell'intero capitolo è anche possibile svolgere una breve attività di orientamento che punta a far riflettere gli studenti su quanto appreso durante il percorso.

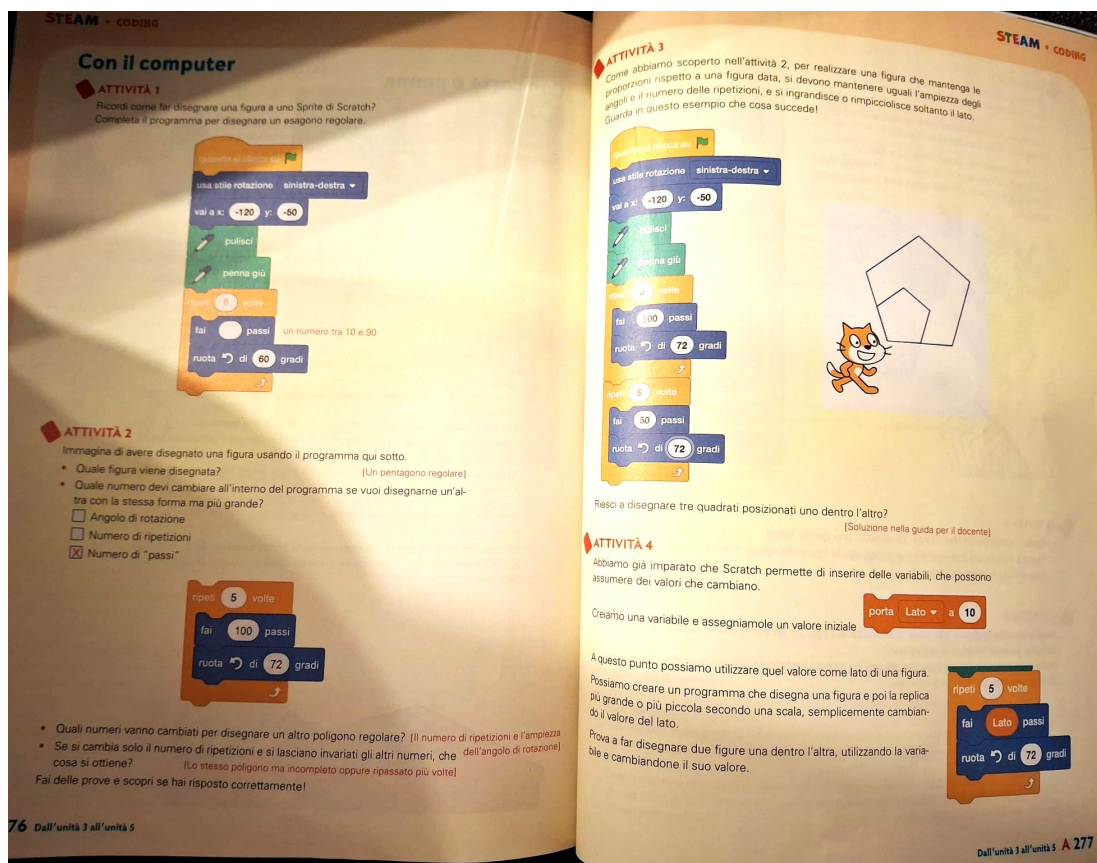


Figura 14: Attività di coding. “Assi in matematica. Aritmetica 2.”, Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, Prima edizione: Gennaio 2024, pp. 276-277

• Conclusioni

Questo testo rappresenta una valida alternativa se si cerca un compromesso tra teoria e pratica. La parte di conoscenze è ben presente, ma risulta sintetica ed adeguata al livello di una classe terza della scuola secondaria di primo grado. Gli esercizi non sono particolarmente numerosi, ma permettono agli studenti di esercitarsi a casa dato il grande numero di attività laboratoriali e aggiuntive che il manuale propone. Il vero punto di forza del libro, infatti, è proprio la sua completezza e il numero molto elevato di approfondimenti che riporta. Non ci sono invece collegamenti interdisciplinari con la genetica.

2.6.4 Conosco risolvo argomento

Il presente testo è stato scelto in quanto edito dalla casa editrice Zanichelli leader nel settore matematico e scientifico. Come per il testo “Assi in matematica” [8]

ha un approccio molto bilanciato che si presta ad essere confrontato con altri volumi.

• Argomenti trattati

Il manuale inizia con un esempio posto sotto forma di fumetto che spiega il perché il caso non ha memoria. Il testo prosegue con la definizione di probabilità, dando sia la formulazione frequentista che classica e successivamente introduce l'argomento della probabilità totale, che si articola nella definizione di eventi compatibili e incompatibili e il loro relativo calcolo. Si procede con la probabilità condizionata ed infine con il calcolo della probabilità composta tramite il metodo dei diagrammi ad albero. Al termine della sezione sono presenti mappe concettuali e riassunti di tutti gli argomenti trattati. Il volume ha una forte impostazione teorica, ma risulta comunque sintetico e intervallato da numerosi esempi che ne rendono la lettura e la comprensione più agevoli.

LEZIONE 4

Probabilità composta e diagrammi ad albero

► Probabilità composta

La probabilità composta di due eventi A e B è la probabilità che accada sia A sia B, cioè che accada l'evento $A \cap B$. Per calcolare la probabilità composta si può calcolare il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ e il numero di casi possibili, oppure si può usare la **legge della probabilità composta**:

La probabilità dell'intersezione di due eventi A e B è uguale al prodotto della probabilità dell'evento A per la probabilità dell'evento B condizionata all'evento A.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

Da un'urna che contiene 10 palline, di cui 3 bianche e 7 nere, estraiamo a caso successivamente due palline e consideriamo i due eventi.

B_1 = «Prima estrazione: pallina bianca»
 N_2 = «Seconda estrazione: pallina nera»

Vediamo un esempio che riguarda due eventi dipendenti: estraiamo a caso **senza rimettere la pallina estratta** nell'urna. Qual è la probabilità che escano in successione una pallina bianca e una pallina nera, cioè qual è $p(B_1 \cap N_2)$?

Applichiamo la legge della probabilità composta: $p(B_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p(N_2|B_1)$

- $p(B_1) = \frac{3}{10}$
- $p(N_2|B_1) = \frac{7}{9}$ perché, se alla prima estrazione è uscita una pallina bianca e non è stata rimessa nell'urna, le palline rimaste sono 9, di cui 7 nere.

Quindi $p(B_1 \cap N_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$

Vediamo ora un esempio che riguarda due eventi indipendenti: estraiamo a caso dalla stessa urna di prima, dopo aver rimesso la **pallina estratta** nell'urna. In questo caso, gli eventi sono indipendenti, perché la pallina estratta viene reinserita nell'urna e quindi viene ripristinata la situazione iniziale. In altri termini, $p(N_2|B_1) = p(N_2)$.

Quindi $p(B_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p(N_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$

Osserviamo che la **legge della probabilità composta di eventi indipendenti** assume una forma più semplice:

La probabilità dell'intersezione di due eventi **indipendenti** è uguale al prodotto delle probabilità dei due eventi.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

perché
 $p(B) = p(B|A)$

► Diagrammi ad albero

Consideriamo il problema:

► In un armadio ci sono 8 magliette, di cui 3 rosse e 5 bianche.
 Si prendono a caso contemporaneamente due magliette.

- Qual è la probabilità che siano estratte due magliette bianche?
- Qual è la probabilità che siano estratte una maglietta rossa e una bianca?

In questo caso le estrazioni sono senza rimpiazzo, cioè la maglietta estratta non viene reinserita nell'armadio.

Rappresentiamo le due estrazioni con un **diagramma ad albero**: ogni estrazione è rappresentata da un ramo su cui è indicata la probabilità dell'evento corrispondente.

Alla prima estrazione potremo avere una maglietta bianca (B_1) oppure una maglietta rossa (R_1), con probabilità $p(B_1) = \frac{5}{8}$ e $p(R_1) = \frac{3}{8}$.

Alla seconda estrazione possiamo ancora estrarre una maglietta bianca (B_2) oppure una maglietta rossa (R_2), ma le rispettive probabilità dipendono dall'esito della prima estrazione, perché, senza rimpiazzo, la situazione si modifica.

- se l'esito della prima estrazione è stato B_1 , il numero delle magliette bianche è diventato 4, e quindi avremo $p(B_2|B_1) = \frac{4}{7}$ e $p(R_2|B_1) = \frac{3}{7}$
- se l'esito della prima estrazione è stato R_1 , il numero delle magliette rosse è diventato 2, e quindi avremo $p(B_2|R_1) = \frac{5}{7}$ e $p(R_2|R_1) = \frac{2}{7}$

Completiamo il diagramma ad albero inserendo i rami delle seconde estrazioni e le probabilità corrispondenti. Per rispondere alle domande percorriamo i suoi rami.

Qual è la probabilità che siano estratte due magliette bianche?

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2|B_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 36\%$$

Qual è la probabilità che siano estratte una maglietta bianca e una maglietta rossa indipendentemente dall'ordine?

$$p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(R_2|B_1) + p(R_1) \cdot p(B_2|R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 54\%$$

Figura 15: Probabilità composta e diagrammi ad albero. “Conosco risolvo argomento. Algebra.”, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024, pp. 292-293

• Esercizi proposti

Gli esercizi proposti in questo libro sono numerosi e disseminati nelle varie sezioni del capitolo. Infatti, sono presenti 145 esercizi a cui si aggiungono

numerosi problemi inseriti nelle parti di teoria. La tipologia di esercizi è molto varia e include sia problemi legati alla teoria che a situazioni reali. In questo volume sono presenti anche applicazioni alla genetica, rendendo possibile un collegamento interdisciplinare tra scienze e matematica. Al termine del capitolo sono presenti esercizi di recupero e di autovalutazione.

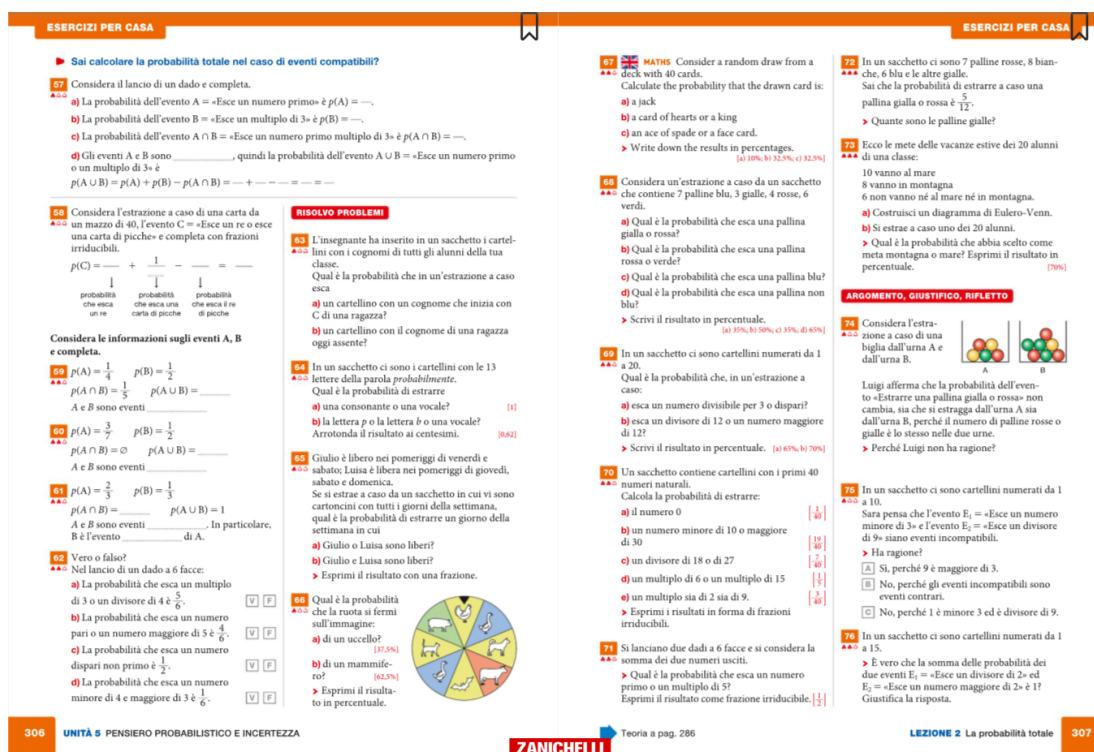


Figura 16: Esercizi. “Conosco risolvo argomento. Algebra.”, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024, pp. 306-307

• Proposte laboratoriali

Questo manuale non presenta proposte laboratoriali.

• Esperienze aggiuntive

In questo testo sono presenti diversi approfondimenti aggiuntivi.

Il primo è relativo alla genetica, dove vengono citate la prima e la seconda legge Mendel. L’approccio è puramente teorico e diventa un collegamento interessante tra matematica e scienze, da consolidare con gli esercizi presenti sul testo.

LEZIONE

5

Probabilità e genetica

Gregor Mendel (1822-1884) fu un monaco e scienziato che studiò il risultato di incroci su piante di pisello. Per enunciare le leggi di Mendel, definiamo

- piante di **linea pura** per un certo carattere, per esempio il colore del seme, quelle che riproducendosi per autoimpollinazione manifestano sempre quello stesso carattere
- piante **ibride** quelle portatrici di caratteri diversi ereditati dai genitori.

► **La prima legge di Mendel**

Mendel osservò che le piante ibride ottenute dall'incrocio di piante di linea pura che differivano per un solo carattere mostravano sempre il carattere di uno solo dei due genitori e concluse che esistevano **caratteri dominanti**, che si manifestavano, e **caratteri recessivi**, che rimanevano nascosti.

Prima legge di Mendel: se si incrociano individui di linea pura, che differiscono per un solo carattere, si ottengono ibridi che manifestano solo uno di questi caratteri, detto **dominante**.

Mendel suppose che ogni carattere fosse determinato da una coppia di fattori che indicò con una coppia di lettere, per esempio GG per il seme giallo (carattere dominante) e gg per il seme verde (carattere recessivo). Al momento della fecondazione si trasmette uno solo di questi fattori, e si ottengono le combinazioni rappresentate in tabella.

	G	G
G	GG	Gg
g	Gg	gg

Si ottengono $\frac{3}{4}$ di piante con seme giallo e $\frac{1}{4}$ di piante con seme verde.

Seconda legge di Mendel: se si incrociano ibridi della prima generazione si ottiene una seconda generazione, nella quale il carattere dominante e quello recessivo stanno nel rapporto 3 : 1.

CONOSCO E APPLICO

1 In una particolare pianta, il colore rosso (R) del fiore è dominante, il colore bianco (b) è recessivo.

a) Completa la tabella relativa all'incrocio di due piante pure rispetto al colore del fiore.

b) Se si incrociano due piante pure rispetto al colore del fiore, che colore avrà l'ibrido?

	R	R
b		
b		

2 Considera ancora il fiore della pianta in cui il colore rosso è dominante rispetto al bianco. Immagina di incrociare due ibridi Rb e Rb.

a) Completa la tabella relativa all'incrocio dei due ibridi di prima generazione.

	R	b
R		
b		

b) In base alla seconda legge di Mendel, qual è la probabilità di ottenere una pianta che manifesta il carattere recessivo?

3 **STEM** Nella tabella sono riportate le informazioni relative ai caratteri di una specie di pianta a cui sono applicabili le leggi di Mendel.

	Carattere dominante (D)	Carattere recessivo (d)
Colore del fiore	rosso 1955	bianco 600
Forma del baccello	assiale 6050	terminale 2010

a) Si incrociano due piante ibride rispetto al colore. Stima la probabilità di avere una pianta con il colore del fiore rosso. Arrotonda ai centesimi.

b) Si incrociano due piante ibride rispetto alla forma del baccello. Stima la probabilità di avere un baccello con forma assiale. Arrotonda ai centesimi.

4 **ARGOMENTO, GIUSTIFICAZIONE, RIFLETTO**

5 Anna e Gino hanno entrambi i capelli lisci, carattere dovuto a un fattore recessivo. Sperano di avere un figlio con i capelli ricci, come ha la mamma di Anna.

► Il figlio potrà avere i capelli ricci? Giustifica la risposta.

6 **CONFRONTATI** Nel nucleo di una cellula sono presenti alcune strutture dette cromosomi, responsabili della trasmissione dei caratteri ereditari. La coppia di cromosomi che nella maggior parte dei mammiferi determina il sesso di un individuo è indicata con XX per le femmine e XY per i maschi. Alberto afferma che per la seconda legge di Mendel la probabilità di avere un figlio maschio è del 50%.

► Ha ragione? Giustifica la risposta.

Figura 17: Probabilità e genetica. “Conosco risolvo argomento. Algebra.”, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024, pp. 296-297

Il secondo, invece, si configura come un approfondimento sul gioco d'azzardo in cui viene evidenziata l'improbabilità di vincita dei giochi a premi proponendo anche esercizi per far ragionare gli studenti sull'argomento.

Infine, è presente un contenuto sulla probabilità soggettiva ed una proposta di coding da svolgere su un foglio di calcolo. Si tratta di un esercizio che mira a verificare la tendenza della probabilità di raggiungere lo stesso valore all'aumentare del numero di lanci di una moneta.

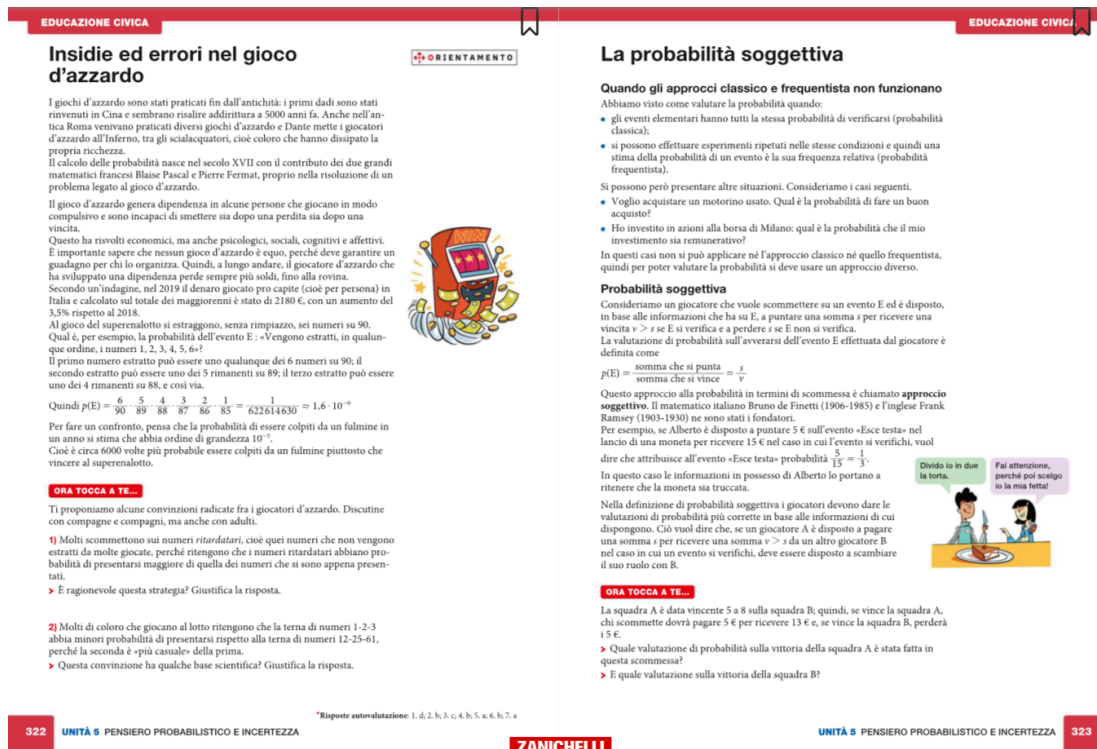


Figura 18: Gioco d’azzardo e probabilità soggettiva. “Conosco risolvo argomento. Algebra.”, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024, pp. 322-323

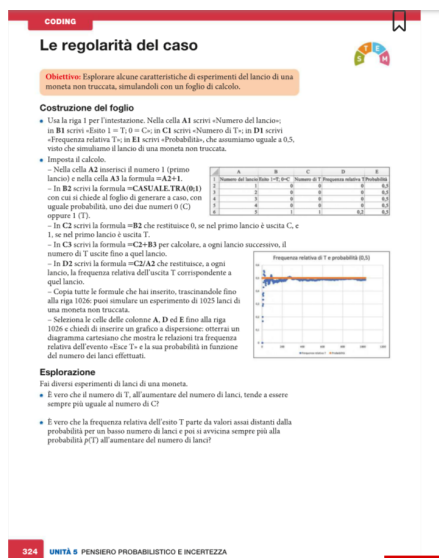


Figura 19: Attività da svolgere su Excel sul lancio di una moneta non truccata. “Conosco risolvo argomento. Algebra.”, Paola D., Sibilla A., Zamboni N., Zanichelli, Prima edizione: Settembre 2024, p.324

- **Conclusione**

Il testo ha un'interfaccia accattivante e, nonostante l'importante approccio teorico, mantiene una struttura concreta e pratica intervallando la teoria con numerosi esempi ed esercizi. Gli argomenti trattati sono numerosi e, come nel caso di Archimede [7], probabilmente complessi per una classe terza della scuola secondaria di primo grado, anche se l'approccio risulta più fruibile da parte degli studenti. Le esperienze laboratoriali e aggiuntive sono presenti, ma potrebbero essere ulteriormente implementate.

2.6.5 Contaci!

La scelta di includere questo testo è legata alla sua metodologia laboratoriale che riduce al minimo la parte teorica avvicinandosi al testo di Emma Castelnuovo [6] in una chiave più moderna. Inoltre, è l'unico volume che fa riferimento alle ultime Indicazioni Nazionali entrate in vigore nel 2026 [11], risulta quindi necessario valutare anche un tipo di testo con questo livello di aggiornamento.

- **Argomenti trattati**

Questo manuale ha un'impostazione particolare che si discosta dai classici libri di testo. La parte teorica è molto ridotta e lascia spazio a numerosi esercizi ed attività. Il capitolo parte con un riferimento all'improbabilità di vincita dei giochi d'azzardo e continua con la definizione di evento aleatorio. Si procede con la formalizzazione della probabilità classica e frequentista ed infine con la formula per il calcolo della probabilità composta di eventi indipendenti. Non sono presenti riassunti o mappe concettuali. Gli esercizi e le attività pratiche sono numerose e corredano ampiamente la proposta teorica del libro.

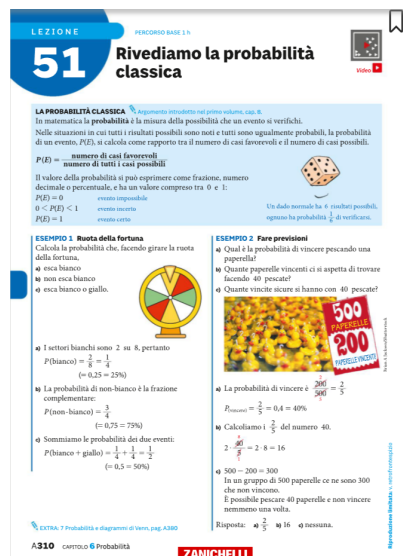


Figura 20: La definizione classica di probabilità. “Contaci! Volume 3.”, Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., Zanichelli, Prima edizione: Febbraio 2026, p.A310

• Esercizi proposti

Gli esercizi intervallati alla parte di teoria sono molto numerosi e vari come tipologia, mentre quelli a fine capitolo sono in numero limitato, pari a 34. Al termine del capitolo è presente una sezione con problemi di autovalutazione e esercizi in preparazione alla prova Invalsi. Le esercitazioni sono molto variegate e comprendono sia attività più teoriche che applicate alla vita reale, alle scienze e all’educazione civica.

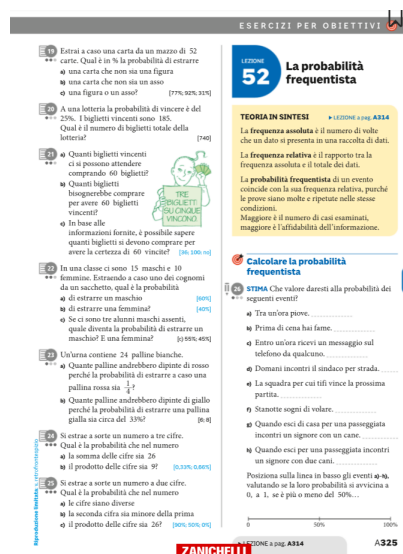


Figura 21: Esercizi. “Contaci! Volume 3.”, Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., Zanichelli, Prima edizione: Febbraio 2026, p.A325

- **Proposte laboratoriali**

Nel volume sono proposte tre attività laboratoriali inserite negli esercizi della prima sezione relativa alla definizione di eventi aleatori. La prima attività consiste in un lavoro a coppie in cui un alunno lancia una moneta e l'altro prova ad indovinare il risultato. La seconda proposta invece è il lancio di due monete con l'annotazione dei risultati. Il terzo e ultimo laboratorio tratta il tema del gioco con i dadi.

ESERCIZI IN CLASSE

GIOCHIAMO!

1 LAB L'indovino
Mettetevi a coppie. Lanciate una moneta come descritto nell'esempio: uno dei due fa la previsione e poi lancia. L'altro compila una tabella tipo quella a fianco. Dopo 3 minuti scambiate i ruoli.



Amplify Polypad
<http://polypad.amplify.com>
In «probabilità e dati» simulatori di dadi, monete e spinner

Calcolate

- a) la percentuale di lanci indovinati da ciascuno
- b) la percentuale di coppia.
- c) Unitevi a un altro gruppo e calcolate la percentuale di lanci indovinati complessivamente.

Previsione	Lancio

Figura 22: Proposta di laboratorio. “Contaci! Volume 3.”, Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., Zanichelli, Prima edizione: Febbraio 2026, p.A308

- **Esperienze aggiuntive**

Il testo propone una serie di esercizi di coding da svolgere tramite un software di programmazione a blocchi che permetta agli studenti di simulare il lancio di vari dadi per un numero molto alto di lanci e poi registrarne i risultati. Ad ogni proposta fa seguire poi una serie di domande stimolo da verificare modificando il programma e vedendo come cambia l'output. Questa sezione risulta molto importante per lo sviluppo del pensiero computazionale.

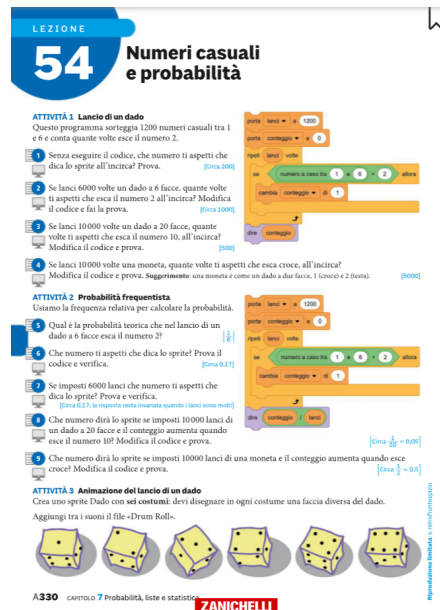


Figura 23: Attività di coding. “Contaci! Volume 3.”, Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., Zanichelli, Prima edizione: Febbraio 2026, p.A330

• Conclusioni

Questo testo rappresenta un buon compromesso tra teoria e pratica, mostrando un buon bilanciamento tra le due componenti della materia. L’approfondimento degli argomenti è buono, ma rimane comunque accessibile a qualunque classe terza della scuola secondaria di primo grado, non trattando temi troppo complessi. Il numero degli esercizi non è elevato, ma sono molto vari e diversificati; nonostante l’approccio tendenzialmente pratico, le proposte laboratoriali sono limitate e potrebbero essere ampliate ulteriormente.

3 Organizzazione delle attività in aula

3.1 La scelta di un'attività didattica di stampo laboratoriale

L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo grado rappresenta una sfida, dovuta non solo alla complessità della disciplina, ma anche allo sforzo da parte degli studenti di riuscire a generalizzare i concetti matematici. Spesso, infatti, gli alunni riescono a risolvere esercizi legati a schemi già noti, ma incontrano notevoli ostacoli nell'applicare gli stessi concetti a situazioni nuove, reali o con una struttura diversa da quello mostrato dai libri di testo. All'interno di questo quadro, l'insegnamento della probabilità e della statistica assume un ruolo strategico poiché si presta particolarmente ad essere messo in relazione con problemi reali e quotidiani offrendo l'opportunità di generalizzare i concetti acquisiti. Per rispondere a queste esigenze formative e per ideare un percorso che si discosti dalla tradizionale lezione frontale in aula, si è scelto di adottare un approccio didattico di tipo laboratoriale fondato sull'esperienza pratica e diretta degli studenti.

L'UMI (*Unione Matematica Italiana*) definisce il laboratorio non come un semplice spazio fisico, ma come [14] *“una serie di indicazioni metodologiche trasversali[...] finalizzate alla costruzione di significati matematici. [...] L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.”* Questa visione trasforma l'aula in un ambiente dinamico e le conoscenze matematiche vengono acquisite tramite pratica e riflessione sugli argomenti. Tale impostazione trova pieno riscontro anche nelle politiche educative correnti. Già presente nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* del 2012 [12], questa metodologia è stata riaffermata nelle *Nuove Indicazioni 2025 per Scuola dell'infanzia e Primo ciclo di istruzione* [11] che attribuiscono al laboratorio un ruolo fondamentale nella didattica della matematica. L'approccio laboratoriale viene proposto in modo trasversale nelle discipline STEM con l'obiettivo di stimolare negli alunni la voglia di sperimentare, la collaborazione tra pari e la formazione di un pensiero critico. Il laboratorio è concepito come luogo di costruzione attiva del sapere, dove si formulano ipotesi e si riflette a partire dall'esperienza pratica. L'aula stessa si dovrebbe trasformare in un ambiente flessibile e dinamico, adatto a supportare argomenti e metodologie differenti. Questo aspetto non sempre

è facile da realizzare data la rigidità dell'impostazione delle classi nella scuola italiana e la mancanza di risorse pratiche ed economiche. Si possono comunque trovare strategie di compromesso: modificare la disposizione dei banchi, utilizzare supporti digitali, portare in classe dispositivi elettronici, utilizzare materiali manipolativi. Infine, tra gli obiettivi di apprendimento riportati nelle Indicazioni nazionali del 2025 [11], è importante sottolineare l'importanza dello sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, che consenta agli studenti di percepire l'utilità degli strumenti appresi nella risoluzione di problemi reali.

Tali concetti sono ripresi anche nell'articolo di Giorgio Bolondi del 2006 [15] che insiste sull'importanza di "fare" matematica per capirla pienamente.

Da questo testo sono stati ripresi alcuni concetti interessanti per la progettazione dell'attività oggetto della presente tesi di laurea. Infatti, il laboratorio di matematica deve diventare un luogo di apprendimento con le seguenti caratteristiche:

- 1) non è un luogo necessariamente fisico (come riportato in precedenza anche la classe può rappresentare un laboratorio) in cui si entra per capire, spinti da una forte motivazione. Il ruolo dell'insegnante è quello di far ritrovare lo stimolo ai ragazzi e risvegliare in loro la voglia di imparare;
- 2) nei laboratori si parte dal problema e non direttamente dalla sua soluzione. La soluzione è il punto di arrivo della ricerca matematica, ma non può rappresentare il punto di partenza nelle scuole. Questo aspetto verrà particolarmente tenuto in considerazione per lo sviluppo delle varie attività didattiche;
- 3) gli studenti devono saper attingere a tutto il loro sapere matematico allontanandosi dallo schema degli esercizi guidati che già nel testo forniscono il procedimento da seguire;
- 4) le attività del laboratorio non devono essere svolte individualmente, ma devono stimolare la collaborazione tra insegnante e studenti e tra studenti stessi, per questo motivo si darà particolare importanza allo svolgimento di attività in gruppo.

In conclusione, il laboratorio di matematica rappresenta un'occasione fondamentale per fornire un contesto di apprendimento in cui lo studente è protagonista attivo nella costruzione del sapere ed è proprio attraverso l'esplorazione di problemi concreti che l'allievo può arrivare ad una generalizzazione dei concetti matematici partendo da casi particolari. Il coinvolgimento attivo favorisce, inoltre, lo sviluppo di un atteggiamento positivo verso la disciplina, promuovendo una maggiore fiducia nelle proprie capacità di analisi e risoluzione dei problemi.

La scelta, quindi, di propendere per questo tipo di approccio deriva dalla

volontà di sperimentare una pratica didattica diversa da quella che abitualmente si utilizza in classe. Nonostante la metodologia del laboratorio si stia sempre di più diffondendo, la scuola italiana basa l'insegnamento ancora su un'impostazione principalmente di tipo frontale. Vista l'opportunità di poter intraprendere un percorso di arricchimento parallelo all'attività didattica, si è voluto ridurre al minimo le conoscenze teoriche e svolgere tutto l'intervento puntando in gran parte sulla partecipazione attiva degli studenti. La scelta metodologica di adottare un approccio laboratoriale trova riscontro anche in studi fondamentali sulla didattica della probabilità. Tra questi, è opportuno citare l'articolo di Fischbein e Gazit [18] che evidenzia come la sola spiegazione teorica risulti insufficiente, sottolineando la necessità di una progettazione didattica di stampo pratico per garantire un apprendimento efficace della materia.

3.2 Progettazione della programmazione didattica

La progettazione dell'attività didattica presentata in questo lavoro nasce dall'incontro tra approfondimento teorico ed esperienza diretta nell'insegnamento di questi contenuti disciplinari. La probabilità, pur essendo un concetto centrale nella matematica, viene spesso considerata astratta e lontana dall'esperienza quotidiana, si è quindi deciso di ideare un percorso didattico nel quale l'esperienza pratica precede e fonda le basi per il consolidamento teorico, permettendo agli studenti di scoprire i concetti attraverso l'azione diretta. Per garantire la coerenza dell'attività con i programmi didattici della scuola secondaria di primo grado, si è inizialmente proceduto all'analisi dei testi scolastici, esaminandone attentamente contenuti e approcci metodologici, per poi sviluppare un percorso didattico più articolato e approfondito. Partendo da questa base, sono state elaborate attività originali, ideate appositamente per il progetto, alle quali si sono affiancati alcuni spunti tratti dalla letteratura di riferimento e suggerimenti forniti dai docenti universitari, così da giungere ad un percorso didattico finale calibrato sul livello di competenze degli studenti e basato su modalità di apprendimento di tipo laboratoriale. L'inserimento di momenti ludici e di attività pratiche ha avuto lo scopo di catturare l'interesse degli studenti e di mettere in risalto aspetti della probabilità che raramente trovano spazio nell'insegnamento di questa disciplina nella scuola secondaria di primo grado.

Nei paragrafi che seguono si illustrano nel dettaglio le fasi dell'attività, le motivazioni alla base delle scelte operate, gli strumenti utilizzati e le proposte scartate per garantire che l'esperienza risultasse efficace e originale rispetto alle pratiche tradizionali.

3.2.1 Definizione del percorso didattico: analisi del curricolo, selezione dei contenuti e formulazione di obiettivi e prerequisiti

La progettazione dell'unità didattica oggetto di questa tesi, è stata sviluppata in stretta collaborazione con l'Istituto Comprensivo "Fabriani" di Spilamberto (MO), rivolgendosi ad una classe terza della scuola secondaria di primo grado. L'attività è stata inserita nel primo quadrimestre dell'anno scolastico, con il supporto della docente tutor, la Prof.ssa Chiara Ferrari, titolare della disciplina di matematica e scienze. L'unità didattica si colloca all'interno dell'insegnamento di Matematica, in particolare nel nucleo tematico Dati e Previsioni, in accordo con le Indicazioni Nazionali[11].

Per una corretta comprensione del percorso è necessario che gli studenti abbiano raggiunto alcuni prerequisiti essenziali tra i quali dimostrare padronanza delle operazioni di base, conoscere il concetto di rapporto, di frazione, di percentuale e il passaggio tra una formulazione e l'altra.

Il progetto, inoltre, punta allo sviluppo di abilità trasversali fondamentali per un'efficace formazione degli studenti. Tra le più importanti possiamo citare lo sviluppo del pensiero critico e della consapevolezza matematica, l'analisi del rischio e l'utilizzo di strumenti matematici in contesti reali.

Dal punto di vista degli atteggiamenti, infine, l'obiettivo è quello di stimolare la curiosità e la voglia di sperimentare degli studenti nei confronti di un argomento comune, ma non trattato adeguatamente a livello scolastico.

A partire da attività pratiche e intuitive, si porterà gli studenti a riflettere su diversi contenuti di seguito esposti. L'argomento iniziale è l'introduzione della definizione di probabilità, a cui seguono gli aspetti più teorici. Successivamente, viene trattata la differenza tra eventi certi, possibili e impossibili, arrivando alla definizione di eventi molto improbabili. Infine, gli studenti dovranno discutere ed affrontare un breve test per analizzare e capire se l'insegnamento è stato efficace e interessante. L'aspetto del gioco d'azzardo viene trattato solo marginalmente per non allontanarsi troppo dall'oggetto della tesi; tuttavia, tale richiamo è stato reso possibile dal fatto che gli studenti avessero già acquisito le basi necessarie durante un precedente modulo di Educazione Civica svolto dalla docente di matematica e scienze. Quest'ultimo, ha approfondito il tema delle dipendenze in chiave prope-deutica al presente intervento.

Nelle sezioni seguenti, la progettazione dell'unità didattica viene approfondita nel dettaglio indicando la scelta dei contenuti, le metodologie utilizzate, le alternative individuate e le strategie più idonee all'esecuzione delle varie attività.

Si è deciso di optare per un linguaggio informale e semplice, di facile comprensione da parte degli studenti e che si rivolga direttamente agli alunni per garantirne il loro coinvolgimento.

Lo scopo finale di questa attività è di consentire agli studenti di raggiungere una conoscenza della probabilità consapevole, approfondita e dinamica in accordo con il livello degli argomenti proposti.

È fondamentale che gli studenti abbiano capito i concetti, li sappiano utilizzare, riescano a fare ragionamenti e a spiegare ciò che conoscono. Questo, in accordo con quanto teorizzato da Fandiño Pinilla [19], può avvenire solo se gli studenti hanno interiorizzato le diverse tipologie di apprendimenti che non sono indipendenti tra di loro, ma insieme concorrono a far raggiungere un risultato positivo nell'apprendimento della matematica.

Per quanto riguarda la scelta del titolo è stata svolta una valutazione per cercare di individuare la forma e il tono più adeguati per comunicare in modo efficace con gli studenti.

Nella scelta del titolo si è cercato di includere questi aspetti:

1. forma giocosa e accattivante;
2. richiamo al concetto di probabilità;
3. richiamo ai giochi d'azzardo, ma evitando titoli troppo espliciti;
4. evitare formulazioni troppo teoriche.

La scelta è ricaduta sul titolo *“Scommettiamo con la matematica?”*.

Il termine *scommettiamo* è stato selezionato per richiamare immediatamente una parola largamente utilizzata anche nel linguaggio comune, infatti tutti i ragazzi ne dovrebbero conoscere il significato e probabilmente l'hanno utilizzata in prima persona o sentita nei contesti sociali. Il secondo termine fondamentale del titolo, *matematica*, è stato scelto per la familiarità che hanno gli studenti con la materia. Introdurre già da subito il concetto di probabilità poteva essere fuorviante per i ragazzi, che hanno poca conoscenza degli aspetti teorici di questa disciplina.

La decisione di adottare questo titolo è, quindi, il risultato di un equilibrio tra chiarezza, richiamo ai contenuti teorici del progetto e rappresenta pienamente il contenuto dell'attività.

Nota sulle illustrazioni: il materiale grafico inserito nella presente tesi è costituito da foto originali prodotte dall'autrice oppure da rappresentazioni del materiale utilizzato durante l'attività didattica. In classe sono state utilizzate

immagini e grafiche per rendere l'esperienza più accattivante per gli studenti; nonostante tutte le rappresentazioni scelte avessero licenza Creative Commons, non sono state riportate integralmente nella tesi con l'obiettivo di avere una visione più chiara e immediata dei dati.

3.2.2 Prima attività: domande introduttive

La prima attività che si è scelto di proporre in classe è stata la formulazione di domande aperte che rientrano in un'esercitazione di brainstorming strutturato. Questa scelta, non ha solo scopo introduttivo, ma risponde precise finalità. Facendo riferimento, infatti, al rapporto tecnico di Bartolini Bussi, Boni e Ferri [21], è possibile far rientrare questa metodologia nella *discussione matematica orchestrata* dall'insegnante. La discussione matematica è definita nel testo come "è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento apprendimento." [21] In particolare, può rientrare nella *discussione di concettualizzazione iniziale* [21] che ha lo scopo di far emergere conoscenze, conflitti e preconcetti date dall'esperienza già acquisita dagli studenti.

Oltre a questa generalizzazione, l'attività risponde a tre precise finalità, illustrate di seguito.

In primo luogo, l'esercizio permette una conoscenza del gruppo di studenti sia a livello relazionale che cognitivo. Entrare in una classe nella quale non si conoscono gli alunni, le dinamiche e le relazioni preesistenti è sempre molto complicato, è quindi necessario effettuare una conoscenza preliminare che permetta al docente di inquadrare immediatamente il contesto. Già da queste prime risposte, infatti, è possibile ottenere diverse informazioni: chi è più propenso a partecipare attivamente, chi vorrebbe intervenire, ma è intimorito dal docente, chi ha la tendenza ad esporre il proprio pensiero anche quando non ha una risposta coerente o corretta. A livello cognitivo, invece, si può dare un primo inquadramento sul livello della classe e sulle conoscenze preliminari che gli studenti possiedono. Come secondo aspetto è fondamentale considerare l'importanza di far emergere teorie e convinzioni relative alla probabilità [21]. Essendo un argomento con forti radici in aspetti reali, gli studenti hanno una grande intuizione iniziale (le cosiddette "*intuizioni primarie*" citate nel libro "The intuitive sources of probabilistic thinking in children" di Fischbein E. [23]), accompagnata, però, da misconcezioni e teorie ingenuie. Infatti, come emerso dallo studio di Ang e Shahrill [24], esistono quattro differenti misconcezioni riscontrabili nei giovani studenti: la *rappresentatività* [25] ovvero la valutazione della probabilità in base a situazioni familiari agli alunni

senza valutare l'adeguatezza del campione, il *bias di equiprobabilità* ovvero supporre che tutti gli esiti di un evento abbiano la stessa probabilità anche in caso di eventi con esiti non equiprobabili, le *credenze* ovvero il pensiero che la probabilità dipenda da qualche evento esterno al controllo dello studente ed infine il *controllo umano* cioè la possibilità di influenzare la probabilità con il proprio intervento, come teorizzato già da Nicolson nel 2005 [29].

Infine, terzo aspetto per ordine, ma non per importanza, è l'utilizzo di questa metodologia come attività iniziale per introdurre l'argomento in modo dinamico e divertente con il fine ultimo di stimolare la curiosità tra i ragazzi.

Le domande scelte sono state le seguenti:

1. **secondo voi cosa intendiamo quando parliamo di caso?**
2. **qual è la differenza tra caso e scelta? Perché alcuni eventi capitano a caso?**
3. **pensate che ci sia qualcosa di completamente casuale nel mondo? Qualche esempio?**
4. **raccontate un'esperienza in cui avete puntato sul caso. Ha funzionato o vi siete pentiti?**

Con le prime tre domande si è valutato di focalizzarsi sul concetto di caso, fondamento dello studio della probabilità, per far iniziare a ragionare gli alunni sull'argomento e farli interrogare sulla natura dello stesso e sulla sua possibile misurazione con l'obiettivo finale di far emergere le intuizioni primarie [23] e le misconcezioni [24]. Infine, con la quarta domanda, si è voluto porre l'attenzione sull'azione di puntare sul caso, senza fare specifici riferimenti al gioco d'azzardo, argomento che verrà trattato, ma solamente in modo marginale evitando di farlo diventare il focus dell'attività.

Il titolo scelto "*Attenti, domande in arrivo!*" ha come obiettivo il coinvolgimento degli alunni, richiamando la loro attenzione con una modalità giocosa e divertente. L'uso della parola "attenti" ha lo scopo di porre l'attività quasi in termini di sfida, cercando, ancora una volta, di stimolare la loro attenzione e la loro curiosità, in un'ottica di partecipazione attiva.

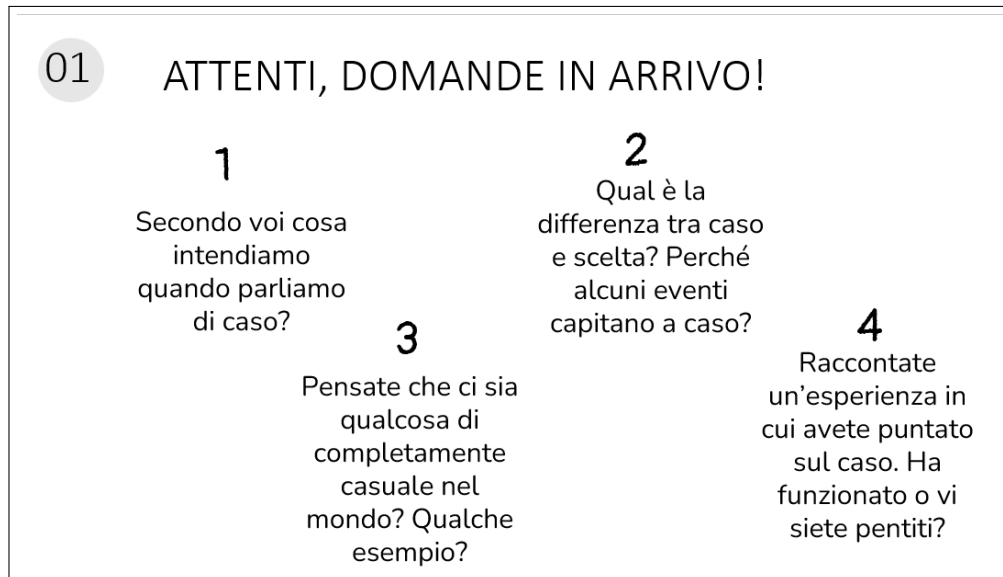


Figura 24: Slide numero 2. Domande introduttive.

3.2.3 Seconda attività: attività laboratoriale introduttiva al concetto di probabilità

L'intervento prosegue con un'attività pratica atta a introdurre l'argomento della probabilità, partendo da un'esercitazione per poi arrivare successivamente alla formulazione teorica come indicato da Fischbein [18]. Questo esercizio permette agli studenti di scoprire le regole alla base della probabilità partendo da un'esperienza guidata dall'insegnante e arrivando a formulare le regole teoriche utilizzate.

L'attività proposta è stata pensata per essere svolta in piccoli gruppi in modo da favorire la condivisione e l'apprendimento cooperativo, ma allo stesso tempo consentire a tutti i partecipanti di avere un ruolo attivo nello svolgimento del compito.

L'apprendimento cooperativo è una metodologia didattica molto affermata e ampiamente utilizzata da più di cinquanta anni in ambito scolastico, per i numerosi benefici che apporta. Secondo Gillies [26] quando gli studenti possono interagire tra di loro, condividere idee e problemi, possono imparare molto di più rispetto alla classica lezione teorica. Questo aspetto è riportato anche dal Prof. Mario Comoglio [28] il quale, facendo riferimento alla meta-analisi di Roseth e dei fratelli Johnson (2008) [27], riporta come le strutture cooperative siano associate a livelli più alti di risultati (in particolare nel periodo della pre-adolescenza) rispetto alle strutture individualistiche. L'attività prescelta è basata sull'utilizzo dei dadi. L'utilizzo dei dadi nella didattica della probabilità, infatti, è ben documentato

nell'articolo di Fischbein e Gazit [18] ed è consigliato per far approcciare gli alunni all'argomento.

Gli studenti devono lanciare per 30 volte un dado non truccato a sei facce e annotare i numeri usciti. Per ciascun dei sei esiti possibili si conta il numero di uscite per ciascuno di essi. Infine, viene richiesto ai ragazzi di calcolare il rapporto tra il numero di uscite per ciascun esito e il numero totale di lanci, che è pari a trenta. Il risultato si chiede che sia riportato in frazione per consentire agli studenti di acquisire familiarità con la definizione classica di probabilità, che verrà introdotta successivamente.

02

CHE COS' È LA PROBABILITÀ?

- Verrete divisi in gruppi da 2-3 persone.
- Lanciate un dado per 30 volte annotando il numero uscito.
- Contate quante volte è uscito ciascun numero da 1 a 6 e annotatelo sulla scheda.
- Dividete il numero di volte per 30 lasciando il risultato in forma di frazione.



**SECONDO VOI COSA
RAPPRESENTA QUESTO
ULTIMO NUMERO
CALCOLATO?**

Figura 25: Slide numero 3. Istruzioni operative per il lancio di un dado.

Nota sulle slide: ogni volta che compare il simbolo di un pittogramma stilizzato di un documento di testo con angolo ripiegato, come riportato in alto a destra nella slide numero 3, significa che per svolgere quella determinata attività è presente un modulo aggiuntivo da fornire agli studenti.

La totalità dei dati va riportata nel documento mostrato in figura 78 (presente negli allegati), il quale è suddiviso nelle seguenti sezioni:

1. istruzioni operative;
2. tabella per inserire i risultati dei lanci effettuati;
3. tabella suddivisa in tre colonne in cui nella prima sono riportati i sei esiti possibili dei lanci, nella seconda il numero di ciascun esito e nell'ultima il risultato del rapporto calcolato.

Al termine dell'attività si discute sul significato del rapporto calcolato ponendo direttamente agli studenti la domanda. Si chiede poi di condividere i risultati trovati e riflettere sulla diversità dei dati calcolati. Questo confronto consente agli alunni di formulare ipotesi sul significato del rapporto tra gli esiti ottenuti e il numero totale di lanci per poi procedere alla formulazione della formula del calcolo della probabilità classica; si vuole poi ragionare sul significato delle diversità riscontrate nell'esecuzione della prova. Infatti, è ipotizzabile che gli studenti troveranno risultati molto variegati e distanti dall'aspettativa teorica: questo prima attività serve per iniziare a far allontanare gli alunni dal bias della *fallacia del giocatore* (*negative recency effect* [18]) nel quale ci si aspetta che se un evento è stato poco frequente nel passato è più probabile che si verifichi in futuro (e viceversa) portando ad un'uguaglianza della probabilità di tutti gli esiti indipendentemente dal numero di lanci [18]. Questo aspetto verrà ripreso successivamente in altre sezioni della presente tesi.

Va evidenziato, inoltre, che in questa fase dell'attività si è scelto di effettuare una transizione guidata dalla formulazione frequentista alla definizione classica di probabilità. Tale scelta è necessaria per fornire agli studenti un ponte tra questi due aspetti: si parte dall'analisi dei dati ottenuti sperimentalmente per arrivare alla comprensione della formula teorica. Questo passaggio permette di dimostrare come la teoria matematica non sia un concetto astratto, ma la sintesi di aspetti pratici e osservabili sperimentalmente.

Al termine dell'esercitazione si procede a dare la formulazione teorica della probabilità di un evento E definendola come *il rapporto tra il numero f degli esiti favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti gli esiti possibili di quel fenomeno*.

$$p(E) = \frac{f}{n} \quad (2)$$

Si fornisce anche un semplice esempio per consentire agli alunni di prendere familiarità con la formula. La formulazione matematica viene introdotta in modo funzionale, senza soffermarsi su una trattazione teorica approfondita per dare priorità rapidamente all'aspetto più pratico e applicativo del calcolo della probabilità. Questa scelta trova riscontro nel lavoro di Zhu e Simon [30] che dimostrano che, l'utilizzo diretto di esempi strutturati, può risultare più efficace della semplice spiegazione teorica, consentendo agli studenti di derivare (o trovare riscontro se precedentemente mostrata) la conseguente formulazione matematica. L'esempio scelto è il calcolo della probabilità di uscita di un numero pari in un

dado non truccato a sei facce, dove abbiamo:

$E = \text{estrarre un numero pari di un dado}$

$$f = 3$$

$$n = 6$$

Si lascia agli studenti il calcolo del rapporto.

La probabilità matematica di un evento E è il rapporto tra il numero f degli esiti favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti gli esiti possibili di quel fenomeno.

$$p(E) = \frac{f}{n}$$

ESEMPIO

$E = \text{estrarre un numero pari di un dado}$

$$f = 3$$

$$n = 6$$

Figura 26: Slide 4. Formulazione teorica della probabilità.

Successivamente si introduce la possibilità di riportare il valore della probabilità in quattro diverse formulazioni: *frazioni*, *quoziente*, *numero decimale e percentuale*. Questa scelta si basa sull'idea esposta da Fandiño Pinilla [19], già citata nella presente tesi, che per una corretta acquisizione delle competenze e conoscenze matematiche, sia necessario acquisire una combinazione ben riuscita di apprendimenti specifici e distinti. Nello specifico, è importante che gli studenti sviluppino un uso consapevole delle *trasformazioni semiotiche*, ovvero la capacità di passare con agilità da una rappresentazione all'altra dello stesso valore matematico. Per mostrare questo aspetto in modo pratico e interattivo, si è deciso di proporre agli studenti un breve esercizio.

Nella lezione l'insegnante propone a tutta la classe una discussione a partire da un sacchetto non trasparente contenente tre caramelle e due cioccolatini. Sebbene gli elementi della stessa categoria siano tra loro uniformi, la differenza tra caramella e cioccolatino rimane distinguibile al tatto. Prima di procedere al calcolo della probabilità, si stimola una riflessione sul concetto di *equiprobabilità*: dato che

caramelle e cioccolatini sono ben riconoscibili anche senza il supporto della vista, è automatico che l'estrazione di un pezzo non rappresenti più un evento equiprobabile, ma possa essere guidato dalla mano di colui che estrae. Risulta quindi necessario fare questo tipo di astrazione per svolgere correttamente l'attività. Il sacchetto utilizzato è unico e viene manipolato dall'insegnante, sarebbe stato possibile fornire più modelli ai vari gruppi di studenti, ma per ragioni di tempo e organizzative si è scelto di snellire questa lezione per lasciare spazio ad altre attività.

La fase finale del lavoro consiste nel calcolo della probabilità di estrazione di un cioccolatino e di una caramella, formulando poi il risultato nelle quattro diverse rappresentazioni introdotte in precedenza. L'attività viene svolta congiuntamente da alunni e insegnante, adottando sempre una metodologia di discussione collettiva guidata dal docente.

L'attività si conclude riportando insieme agli studenti i dati calcolati, i quali sono elencati nella tabella 1.

Tabella 1: Calcolo della probabilità di estrazione di una caramella e di un cioccolatino

Oggetto	Quantità nel sacchetto	Frazione	Rapporto	Numero decimale	Percentuale
Caramelle	3	$\frac{3}{5}$	3 : 5	0,6	60%
Cioccolatini	2	$\frac{2}{5}$	2 : 5	0,4	40%

Ma si tratta di un rapporto quindi...

Possiamo scriverlo sotto forma di frazione, di quoziente, di numero decimale o di percentuale.

ESEMPIO

In un sacchetto ci sono 3 caramelle e 2 cioccolatini. La probabilità di estrarre una caramella è:

E=estrarre una caramella

f=3

n=5

$$p(\text{caramella}) = \frac{f}{n} = \frac{3}{5}$$

$$p(\text{caramella}) = \frac{3}{5} = 3:5 = 0,6 = 60\%$$

Figura 27: Slide 5. Esercitazione con caramelle e cioccolatini, prima slide.

ESEMPIO

In un sacchetto ci sono 3 caramelle e 2 cioccolatini. La probabilità di estrarre una caramella è

$$p(\text{caramella}) = \frac{3}{5}$$

$$p(\text{caramella}) = \frac{3}{5} = 3:5 = 0,6 = 60\%$$

$$p(\text{cioccolatino}) = \frac{2}{5} = 2:5 = 0,4 = 40\%$$

Figura 28: Slide 6. Esercitazione con caramelle e cioccolatini, seconda slide.

3.2.4 Terza attività: il concetto di equiprobabilità e esempi di calcolo della probabilità

Al termine di queste prime attività introduttive di stampo quasi prettamente pratico, si è voluto procedere con una breve panoramica teorica sulla probabilità, fornendo il significato di alcuni termini specifici. I termini di *esito* e *fenomeno*, già impiegati in modo intuitivo e in connessione con l'attività laboratoriale svolta, vengono ripresi per essere formalizzati. Partendo quindi dalla definizione di *esito*, si giunge alla formulazione teorica del concetto di *fenomeno aleatorio o casuale*, infine, si forniscono alcuni esempi di fenomeni casuali. Questo passaggio risulta fondamentale per dare un inquadramento rigoroso a concetti che fino a questo momento sono stati trattati solo in modo pratico con assenza di sistematicità. Tale principio rientra nelle *situazioni di istituzionalizzazione* citate da D'Amore nel libro *Elementi di didattica della matematica* [32], le quali hanno lo scopo di formalizzare e stabilire conoscenze apprese durante le varie attività in aula. Infine, come ultimo aspetto da sottolineare, si è deciso di puntare l'attenzione sul concetto di equiprobabilità, ovvero che gli esiti di un certo fenomeno hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi. Su quest'ultimo aspetto si vuole far prestare molta attenzione agli studenti e nelle sezioni successive si faranno ulteriori approfondimenti.

03

INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

Il lancio del dado è un fenomeno di cui non possiamo prevedere il risultato (ESITO) in anticipo, sappiamo quali sono le possibilità, ma non quale di esse uscirà durante il lancio. Fenomeni come questo si chiamano ALEATORI (o CASUALI).

Il fenomeno è il lancio del dado, il lancio di una moneta, l'estrazione di una carta.

Tutti gli esiti di cui parleremo sono EQUIPROBABILI ovvero hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi.

Figura 29: Slide 7. Introduzione alla probabilità: aspetti teorici.

Nella seconda slide di questa attività si riportano alcuni esempi classici di fenomeni con esiti equiprobabili, per rendere più comprensibile ed accessibile agli studenti il concetto di equiprobabilità. Si ritiene, infatti, che questo aspetto sia fondamentale da far comprendere alla classe, ma allo stesso tempo di non immediata decodifica. La complessità nasce dal fatto che l'intuizione degli studenti è spesso inquinata da misconcezioni, come quelle individuate da Ang e Shahrill [24]. Nello specifico, la rappresentatività e il controllo umano possono alterare la comprensione del concetto di caso e di conseguenza di quello di equiprobabilità, portando gli studenti a pensare che certi esiti siano più probabili di altri.

Per ogni caso preso in esame vengono riportate le caratteristiche principali in modo da chiarire quali siano tutte le possibilità di estrazione. L'analisi dei fenomeni aleatori è stata condotta mostrando esempi che spaziano dai classici dadi e carte, che sono utilizzati anche da Fischbein nei suoi esperimenti [18], fino ad arrivare alla genetica mendeliana.

Il parallelismo tra i giochi d'azzardo e la genetica, trova riscontro anche nell'opera di Richard Dawkins [20] dove l'autore evidenzia come la trasmissione ereditaria operi con la stessa modalità di una "lotteria", dove la sopravvivenza e la trasmissione di un tratto genetico non è deterministica, ma legata è alla probabilità statistica di ricombinazione dei geni.

Gli esempi riportati sono mostrati nella tabella 2.

Tabella 2: Esempi di esiti equiprobabili

Numero	Esempio	Caratteristiche	Casi riportati									
1	Carte da briscola estratte a caso	Quattro semi (coppe, denari, spade, bastoni), ventotto carte numerate dal 1 al 7, dodici carte con figure (fante, cavallo, re)	$p(2) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $p(figura) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ $p(bastoni) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$									
2	Dado non truccato	Numeri da 1 a 6, tre numeri pari e tre numeri dispari	$p(3) = \frac{1}{6}$ $p(pari) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $p(< 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$									
3	Moneta non truccata	Due facce: testa e croce	$p(testa) = \frac{1}{2}$ $p(croce) = \frac{1}{2}$									
4	Trasmissione genetica degli occhi azzurri	Occhi marroni gene dominante, occhi azzurri gene recessivo	Se un genitore ha occhi azzurri e l'altro occhi marroni, ma con presenza di gene recessivo: $p(azzurri) = \frac{1}{2}$ $p(marroni) = \frac{1}{2}$ Per tabulare le varie possibilità si utilizza il quadrato di Punnet. <table><tr><td></td><td>a</td><td>M</td></tr><tr><td>a</td><td>aa</td><td>aM</td></tr><tr><td>a</td><td>aa</td><td>aM</td></tr></table>		a	M	a	aa	aM	a	aa	aM
	a	M										
a	aa	aM										
a	aa	aM										

ESEMPI

CARTE DA BRISCOLA ESTRATTE A CASO

- 4 semi (coppe, denari, spade, bastoni)
- 28 carte numerate dall'1 al 7
- 12 carte con figure (fante, cavallo, re)

$$p(2) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$p(figura) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

$$p(bastoni) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

DADO NON TRUCCATO

- Numeri da 1 a 6
- 3 numeri pari e 3 numeri dispari

$$p(3) = \frac{1}{6}$$

$$p(pari) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(< 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

	a	M
a	aa	aM
a	aa	aM

MONETA NON TRUCCATA

- Testa e croce

$$p(testa) = \frac{1}{2}$$

$$p(croce) = \frac{1}{2}$$

OCCHI AZZURRI

- Occhi marroni gene dominante
- Occhi azzurri gene recessivo
- Se un genitore ha occhi azzurri e l'altro occhi marroni, ma con presenza di gene recessivo

$$p(azzurri) = \frac{1}{2}$$

$$p(marroni) = \frac{1}{2}$$

Figura 30: Slide 8. Esempi di esiti equiprobabili.

Terminata questa parte del progetto, che va svolta come una discussione guidata, si pone agli studenti la seguente domanda: *esistono esiti non equiprobabili?* Dopo aver visto e assimilato diversi esempi di fenomeni equiprobabili, dovrebbe essere possibile avviare un brainstorming guidato dal docente per far emergere dubbi, difficoltà e intuizioni legati a questo aspetto dello studio della probabilità. Come è stato già spiegato nei capitoli precedenti, il concetto di equiprobabilità può essere interessato da un bias molto comune [24] e quindi è importante verificare che gli studenti abbiano compreso questo argomento per poter parlare di esiti non equiprobabili.

Per rispondere a questo interrogativo e permettere agli studenti di toccare con mano la differenza tra probabilità teorica e risultati empirici, si propone un'attività pratica. Si forniscono due dadi, uno truccato e uno non truccato. Si è già vista l'importanza dell'utilizzo dello strumento dei dadi in Fischbein [18], in questa attività si approfondisce ulteriormente la didattica laboratoriale introducendo il concetto di "imparare facendo" teorizzato da John Dewey. Secondo Dewey [28], fare praticamente un'attività e vedere quali saranno le conseguenze derivanti, costituisce il fondamento dell'apprendimento pratico che permette agli studenti di capire a pieno l'argomento. Gli studenti, infatti, dovranno lanciare i due diversi dadi e capire se ci sono differenze tra un oggetto e l'altro, se il risultato viene influenzato dall'esemplare che viene utilizzato e come si può legare questo esercizio al concetto di equiprobabilità. I dadi sono stati costruiti appositamente per la tesi in oggetto, stampando su carta lo schema costruttivo di un dado e poi ripiegandolo su stesso per formare i due esemplari. Prima di chiudere la struttura con la colla, in uno dei due dadi, sono state aggiunte cinque monetine da 2 centesimi sul lato rappresentante il numero tre. Con questa modifica, il dado truccato, darà una maggiore frequenza di esiti pari a quattro.

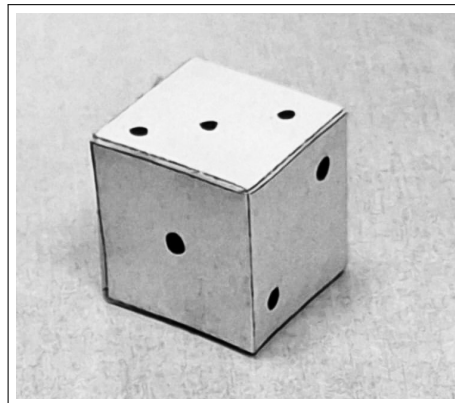


Figura 31: Dado truccato.

Al termine dell'attività si fornisce la risposta al quesito, ovvero che gli esiti del lancio di un dado sono equiprobabili solo se il dado non è stato truccato.

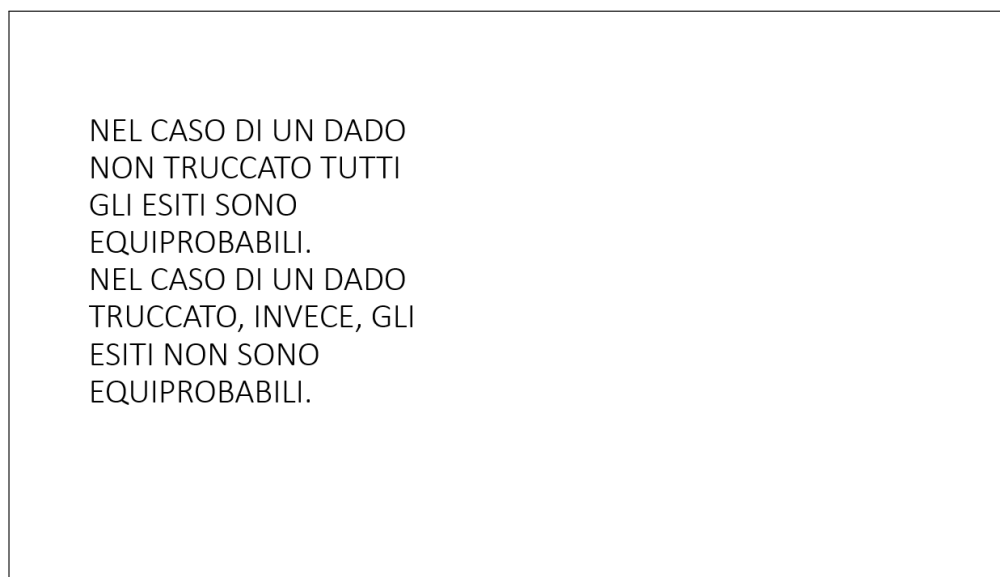


Figura 32: Slide 10. Spiegazione del lancio del dado: esiti equiprobabili e non.

Una volta appreso il concetto di equiprobabilità, il progetto si sposta su sistemi più complessi. Si passa quindi dal lancio del dado truccato all'analisi della somma di due dadi, per mostrare come l'equiprobabilità possa venire meno non solo per un intervento esterno, ma per la natura stessa degli eventi considerati. Per approfondire questo concetto si è valutato di proporre agli studenti un'attività da svolgere in piccolo gruppo, in modo da potenziare anche l'apprendimento cooperativo tra pari [28].

L'esercizio consiste nel lanciare due dadi di diverso colore trenta volte ciascuno registrando i risultati ottenuti. Per ogni coppia di lanci è necessario calcolare la somma ottenuta addizionando i due diversi esiti. Infine, si tabulano i dati: gli studenti dovranno annotare le frequenze assolute dei singoli numeri del dado (totale 60) e le frequenze assolute delle somme (totale 30).



- Verrete divisi in gruppi da 2-3 persone.
- Fate 30 lanci di due dadi di colore diverso contemporaneamente.
- Compilate la tabella inserendo ad ogni lancio la somma ottenuta e gli esiti sui due dadi.
 - Compilate la seconda tabella.
- Infine disegnate due istogrammi relativi alla somma e ai singoli numeri.

COSA POTETE OSSERVARE?

Figura 33: Slide 11. Istruzione operative per il lancio di due dadi.

Agli alunni verrà fornito il documento mostrato in figura 79 nel quale annotare tutti i dati richiesti.

Quest'ultimo è composto dalle seguenti sezioni:

- 1) istruzioni operative;
- 2) tabella in cui riportare gli esiti dei lanci effettuati per ciascuno dei due dadi e la loro somma;
- 3) tabella in cui riportare la frequenza assoluta dei singoli numeri;
- 4) tabella in cui riportare la frequenza assoluta delle somme calcolate.

Lo scopo di questa attività è di mostrare che, mentre l'estrazione di un singolo numero da un dado non truccato a sei facce è un esito equiprobabile con probabilità pari a $\frac{1}{6}$, la somma non rispecchia questa caratteristica. Infatti, a livello teorico, la somma risultante dal lancio di due dadi a sei facce non truccati ha una *distribuzione triangolare discreta* perché i singoli esiti non sono tutti equiprobabili. Anche in questo caso l'obiettivo è di scardinare il bias di equiprobabilità [24] e far comprendere che esistono esiti che non lo sono. Infatti, per gli studenti dovrebbe essere più immediato comprendere che un dado truccato non rappresenta un esempio di equiprobabilità dato che è una modifica introdotta dall'uomo, mentre risulta difficile capirlo per somma ottenuta da un lancio di due dadi.

Questo aspetto è ben documentato da Fischbein che nei suoi studi riporta la difficoltà mostrata dagli studenti nel maneggiare le probabilità composte nel lancio di due dadi. Afferma, infatti, che la comprensione degli eventi composti come il lancio di due dadi non è di immediata decodifica. Questa difficoltà deriva probabilmente da un errato calcolo delle combinazioni totali, che vengono

calcolate come $6+6=12$ invece di $6 \times 6=36$ [18]. Il calcolo della probabilità totale non verrà comunque affrontato, ma lasciato solo all'intuizione degli studenti. Nella tabella vengono mostrate le probabilità di estrazione di ciascuna somma ottenibile lanciando due dadi a sei facce; come si può notare i valori sono differenti gli uni dagli altri dimostrando l'assenza di equiprobabilità.

Tabella 3: Valori di probabilità della somma ottenuta lanciando due dadi non truccati a sei facce.

Somma	Combinazioni	Numero di combinazioni	Probabilità
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2) (2,1)	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
11	(5,6) (6,5)	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$
		Totale=36	

Infine, al termine di questo pacchetto di attività, si pone agli studenti una domanda stimolo che fungerà da introduzione per la sezione successiva del progetto: *la probabilità può essere maggiore di 1 o del 100%?* Gli alunni, al termine di una discussione in cui far emergere idee e criticità, sono pronti per iniziare l'attività successiva che li porterà a comprendere il concetto di evento certo, probabile e impossibile.

3.2.5 Quarta attività: eventi certi possibili e impossibili

La quarta attività proposta è probabilmente la parte più consistente dell'intero progetto, sia per numero di attività proposte che per la natura più astratta dei concetti analizzati. Questo modulo si concentra, infatti, sulla differenza tra *evento certo, possibile ed impossibile*, su un accenno alla *legge dei grandi numeri* e sulla teoria dei *numeri ritardatari*, per fornire anche un esempio pratico di facile comprensione da parte degli studenti.

Si inizia ricollegandosi alla domanda finale posta nella sezione precedente, ovvero se la probabilità può essere maggiore di 1. Naturalmente la risposta è no, ma non essendo un concetto immediato per gli studenti, si propongono due semplici esercizi per dimostrare il range di variazione della probabilità tra 0 e 1. Anche in questo caso si procede proponendo una lezione che parte da due domande

stimolo che permettono di avviare una discussione guidata in classe per attivare il coinvolgimento degli alunni.

Si offrono i seguenti due esempi:

1. **qual è la probabilità di estrarre a caso un 12 da un mazzo di carte da briscola?**
2. **qual è la probabilità di estrarre una carta qualsiasi da un mazzo di carte da briscola?**

Calcolando la probabilità si evidenzia che nel primo caso il risultato è pari a 0, nel secondo caso invece è 1. Si sono così trovati i due estremi del range di variazione della probabilità: 0 che corrisponde ad un evento impossibile, 1 che corrisponde ad un evento certo.

$$p(12) = \frac{0}{40} = 0 \quad (3)$$

$$p(\text{carta qualsiasi}) = \frac{40}{40} = 1 \quad (4)$$

04

EVENTI CERTI, POSSIBILI E IMPOSSIBILI

Se ho un mazzo di carte da briscola qual è la probabilità di estrarre a caso un 12? E di estrarre una carta qualsiasi?

Quanti 12 ci sono nel mazzo? 0!

Quindi...

$$p(12) = \frac{0}{40} = 0$$

E di estrarre una carta qualsiasi?

Tutte le carte vanno bene!

Quindi...

$$p(\text{carta}) = \frac{40}{40} = 1$$

ABBIAMO VERIFICATO QUANTO DETTO IN PRECEDENZA!

Figura 34: Slide 13. Esercizi su eventi con probabilità 0 e 1.

Successivamente si procede a fornire la definizione di evento certo, possibile ed impossibile, evidenziando che il primo e l'ultimo sono gli estremi dello spettro delle probabilità, l'evento possibile invece rappresenta tutto ciò che è compreso tra i due limiti.

Far comprendere la differenza tra eventi certi, possibili ed impossibili, sembra banale ed intuitivo, ma non lo è. Riprendendo il quadro teorico di Fischbein [18], la distinzione degli eventi risulta difficoltosa per tre motivazioni: la confusione tra un forte desiderio ed una probabilità reale, la confusione tra la certezza oggettiva e la certezza che deriva dalle decisioni umane ed infine la mancanza di dati scientifici per definire un evento impossibile.

Le definizioni riportate sono le seguenti:

1. **evento certo:** ha probabilità 1 (o 100%) perché si realizzerà certamente;
2. **evento possibile:** ha probabilità compresa tra 0 e 1 (o 0% e 100%) perché probabilmente si realizzerà;
3. **evento impossibile:** ha probabilità 0 (o 0%) perché non si realizzerà mai.

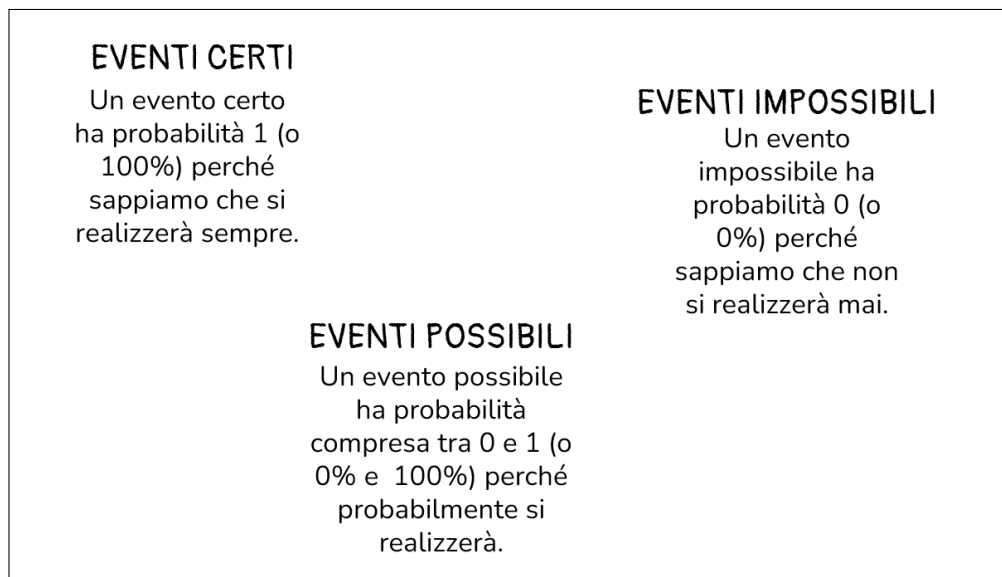


Figura 35: Slide 14. Definizione di evento certo, possibile, impossibile.

Per fissare i concetti appena esposti, si fornisce un esempio vicino all'esperienza diretta degli studenti prendendo come esempio le valutazioni di una verifica di matematica.

Gli esempi proposti sono:

1. **evento certo:** prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica;

2. **evento possibile:** prendere 10 nella verifica di matematica;
3. **evento impossibile:** prendere 11 nella verifica di matematica.

ESEMPIO		
CERTO	POSSIBILE	IMPOSSIBILE
Prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica	Prendere 10 nella verifica di matematica	Prendere 11 nella verifica di matematica

Figura 36: Slide 15. Esempi di evento certo, possibile, impossibile.

Partendo dagli esempi forniti dal docente e discussi in classe, si propone agli studenti una rapida attività da svolgere oralmente con l'obiettivo di capire anche se gli alunni hanno compreso correttamente il concetto di evento certo, possibile ed impossibile.

Si chiede, quindi, di fare esempi a piacere per ogni tipologia di evento coinvolgendo direttamente gli alunni mostrando una slide che riporta la seguente frase: "Tocca a voi! Fate qualche esempio di eventi certi, possibili e impossibili".

Si prosegue con l'introduzione della *legge dei grandi numeri* che afferma che la media dei risultati osservati converge alla probabilità teorica all'aumentare delle prove effettuate. Si è valutato di non spiegare e di non dare la definizione rigorosa di questo concetto teorico perché gli studenti potrebbero non avere le conoscenze e le competenze necessarie alla comprensione e, a questo stadio dello sviluppo cognitivo, potrebbe costituire un *ostacolo didattico* [32]. Un'ostacolo didattico è un'idea che nel corso della vita degli studenti è stata utile per affrontare problemi e trovare soluzioni, ma finisce per diventare una barriera all'apprendimento dei concetti successivi. Per ovviare al problema, viene fornito un approccio di tipo empirico per far ragionare gli alunni sulla differenza tra probabilità e numero di prove da effettuare per ottenere quel determinato risultato, mostrando che i due dati non coincidono.

Iniziando con un esempio semplice e intuitivo, ovvero la probabilità di estrazione

di un tre lanciando un dado non truccato a sei facce, si chiede agli alunni di lanciare un dado e verificare quanti lanci sono necessari per ottenere quel determinato numero.

$$p(3) = \frac{1}{6} \quad (5)$$

Ipotizzando che parte della classe intuitivamente pensi che lanciando sei volte il dado si abbia la certezza di ottenere un tre, questo esercizio ha l'obiettivo di dimostrare che non sempre ciò si verifica: in taluni casi il risultato si raggiunge con meno lanci, in altri con più lanci.

Al termine dell'attività viene svolta una breve discussione per parlare dei risultati ottenuti e accompagnare gli studenti alla soluzione del quesito posto in precedenza.

Abbiamo imparato a calcolare la probabilità e sappiamo che lanciando un dado:

$$p(3) = \frac{1}{6}$$

Quindi se faccio 6 lanci ottengo sicuramente un 3?

- Lanciate un dado a testa fino ad ottenere un 3.
- Poi contate quanti lanci sono serviti.

Figura 37: Slide 17. Esercizio per verificare in modo empirico la legge dei grandi numeri.

Successivamente, viene mostrata una slide esplicativa degli argomenti appena esposti, focalizzandosi sul concetto che probabilità pari ad $p(3) = \frac{1}{6}$ non significa che ogni sei lanci sicuramente otterrò un tre, ma che in media mi aspetto questa occorrenza. Inoltre, per ritrovare questo numero, devo effettuare un numero molto grande di lanci potenzialmente tendente ad infinito.

Come ribadito in precedenza, non si vuole entrare in dettagli teorici troppo complicati, ma solamente far comprendere questo concetto articolato in modo semplice ed intuitivo.

LA PROBABILITÀ CI DICE COSA CI POSSIAMO
ASPETTARE NEL LUNGO PERIODO, NON
COSA SUCCEDDE CON CERTEZZA IN POCHI
TENTATIVI.

Dire che la probabilità di ottenere 3 con un dado è $1/6$
non significa che su 6 lanci uscirà sicuramente un 3, ma
che in tanti lanci ci aspettiamo che, in media, il 3 esca una
volta ogni 6.

Serve un **numero molto grande di
lanci** perché la frequenza si avvicini a
 $1/6$.

Figura 38: Slide 18. Spiegazione della legge dei grandi numeri.

Il modulo prosegue con un esempio pratico e quotidiano di un'errata applicazione della legge dei grandi numeri. Nell'ambito della lottologia, esiste la falsa convinzione che, se un numero non viene estratto da molto tempo, abbia una probabilità maggiore di uscire rispetto agli altri per recuperare le estrazioni perse. Secondo la legge dei grandi numeri, infatti, tutti i numeri del lotto sul lungo periodo devono avere la stessa probabilità di uscita quindi, se un numero ritarda, "deve recuperare i lanci perduti", nasce così l'idea dei *numeri ritardatari* che deriva dal bias della fallacia del giocatore già spiegato nel capitolo 4.2.4[18]. Questo assunto è sbagliato perché ad ogni estrazione la situazione si azzerava e tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti indipendentemente da ciò che è avvenuto prima, infatti, come riportato nelle slide, "il passato non influenza il futuro". Inoltre, non bisogna confondere la frequenza assoluta con la frequenza relativa: solo la seconda segue la legge dei grandi numeri per un numero di prove molto alto che difficilmente si riesce a raggiungere nell'ambito del gioco del lotto dove consideriamo come unità di misura solo centinaia di estrazioni [33].

Avete mai sentito parlare di numeri ritardatari al Lotto?

Anche se un numero non esce da moltissimo tempo, non è 'più probabile' che esca. Al prossimo turno ha sempre la stessa probabilità degli altri.

ESEMPIO

Il numero 53 non esce da 100 estrazioni?
Non importa: anche alla prossima estrazione ha **esattamente la stessa probabilità** di uscire degli altri numeri, perché il gioco è casuale. Il passato non influenza il futuro.

Figura 39: Slide 19. I numeri ritardatari.

Per concludere il modulo dedicato al concetto di equiprobabilità e di eventi certi, possibili e impossibili, si sottopone agli studenti una semplice esercitazione composta da due sezioni: nella prima gli alunni dovranno determinare se l'evento è certo, possibile o impossibile, nella seconda inventare per ogni tipologia di un evento un esempio spiegandone la motivazione. Trattandosi di un'attività di chiusura, ha la funzione di fissare i concetti appresi durante lo svolgimento di questa sezione e verificare il grado di apprendimento degli studenti. Si è optato, anche in questo caso, per l'esecuzione dell'esercizio in piccoli gruppi per favorire l'apprendimento tra pari [28].

Il modulo fornito agli studenti è mostrato in figura 80.

Gli eventi scelti sono i seguenti:

1. lanciare un dado e ottenere il numero 6 (P);
2. estrarre un re da un mazzo di carte da briscola (P);
3. estrarre una pallina blu da un sacchetto che ha solo palline rosse (I);
4. ottenere un numero da 1 a 6 lanciando un dado a 6 facce (C);
5. prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica (C);
6. trovare un unicorno nel corridoio (I).

Tra parentesi è indicata l'iniziale della tipologia di evento a cui appartiene ogni esempio riportato.

3.2.6 Quinta attività: eventi possibili, ma molto improbabili

Nella quinta sezione del presente progetto si trattano gli eventi possibili, ma molto improbabili per permettere agli studenti di familiarizzare con il concetto che la probabilità possa assumere infiniti valori numerici che, anche se molto piccoli, rappresentano eventi possibili nonostante la nostra percezione possa dirci il contrario. Questa attività ha un approccio pratico e ludico, ancora una volta con l'intenzione di catturare l'attenzione degli studenti.

Si inizia con una breve definizione di evento possibile, ma molto improbabile: sono tutti quegli eventi con probabilità con valore molto basso. Ad un primo sguardo risulta difficile distinguere quale evento è più probabile se stiamo trattando con numeri molto piccoli, bisogna quindi essere in grado di posizionare in ordine crescente (o decrescente) i numeri per comprendere quale è maggiore ed essere consapevoli che numeri di questi ordini di grandezza rappresentano una possibilità verificabile, seppur remota.

05 **EVENTI POSSIBILI, MA MOLTO IMPROBABILI**

Abbiamo visto che gli eventi possibili hanno probabilità compresa tra 0 e 1 o 0 e 100%.
Ma se abbiamo delle probabilità molto basse come facciamo a capire quante evento si potrà verificare più facilmente?

Per esempio, se abbiamo una probabilità dello 0,000008% o una probabilità del lo 0,00000035%, riusciamo a capire a colpo d'occhio quale esito è più probabile?

Figura 40: Slide 21. Introduzione ad eventi possibili, ma molto improbabili.

Successivamente, per fornire un approccio concreto a questi numeri che possono risultare astratti e difficili da maneggiare, viene proposto un esercizio di visualizzazione mediante l'utilizzo di un modello fisico di gratta e vinci. Per non mostrare un prodotto reale, è stato creato un prototipo con misure simili ai gratta e vinci standard, mostrato in figura 41.

L'attività si configura, ancora una volta, come una discussione collettiva guidata dal docente ed è stata adattata dal materiale proposto nell'ambito del progetto

Bet on Math [1]. Si ipotizza che questo gratta e vinci abbia, come premio massimo, un biglietto vincente da 5.000.000 di euro ogni 9.360.000 biglietti stampati (un lotto da 37.440.000 contiene 4 biglietti con il premio massimo) [34] e che abbia la dimensione maggiore di circa 20 cm.

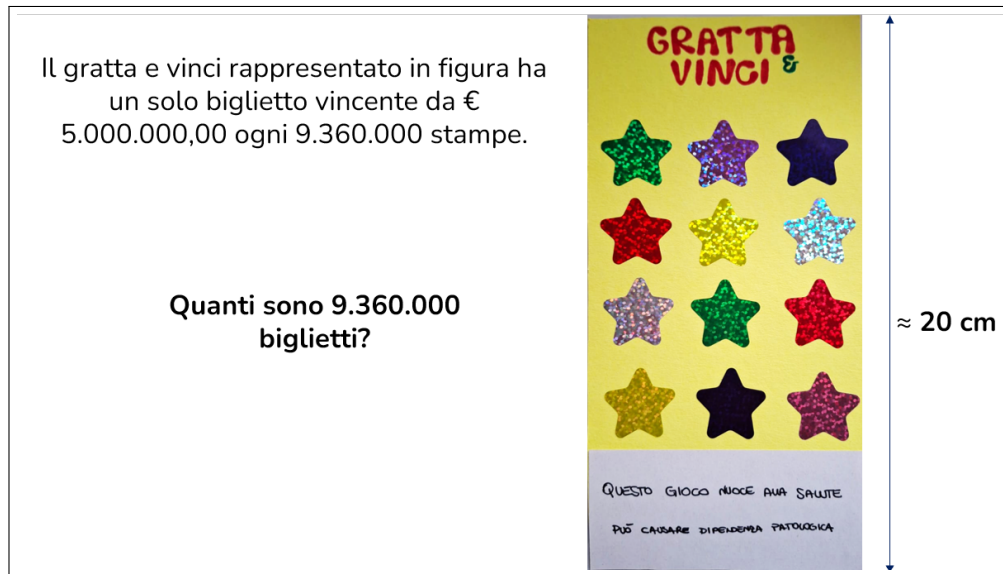


Figura 41: Slide 22. Quanti sono 9.360.000 biglietti?

Se teoricamente si potesse acquistare l'intero lotto stampato avendo così la certezza di possedere un biglietto da 5.000.000 ogni 9.360.000, a livello visivo quanti sarebbero tutti questi biglietti?

Per rispondere a questa domanda si propongono vari esempi in cui vengono allineati diversi biglietti mostrando quale lunghezza si raggiunge.

Il primo caso è una cucina standard di 4m x 6m. Se si posizionano in fila i gratta e vinci sul lato più corto si vede che il numero raggiunto è pari a 20 biglietti, ancora bene lontano dal target di 9.360.000.

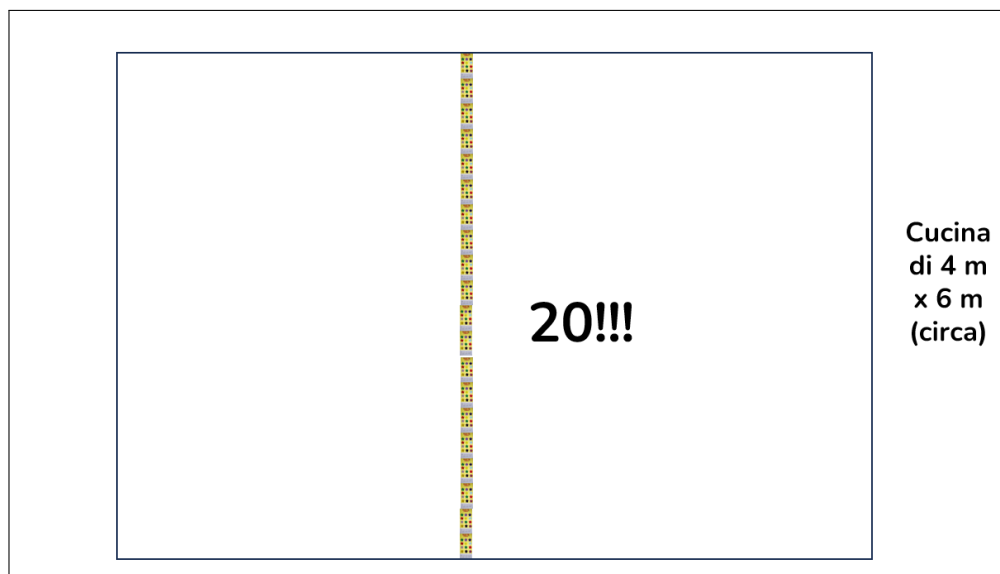


Figura 42: Slide 23. Gratta e vinci in una cucina.

Successivamente, si provano ad allineare i biglietti nei due lati di una piscina olimpionica che ha dimensioni di 25m x 50m. In questo caso si ottengono i valori di 125 e 250 biglietti, ancora assolutamente non sufficiente a coprire la distanza cercata.

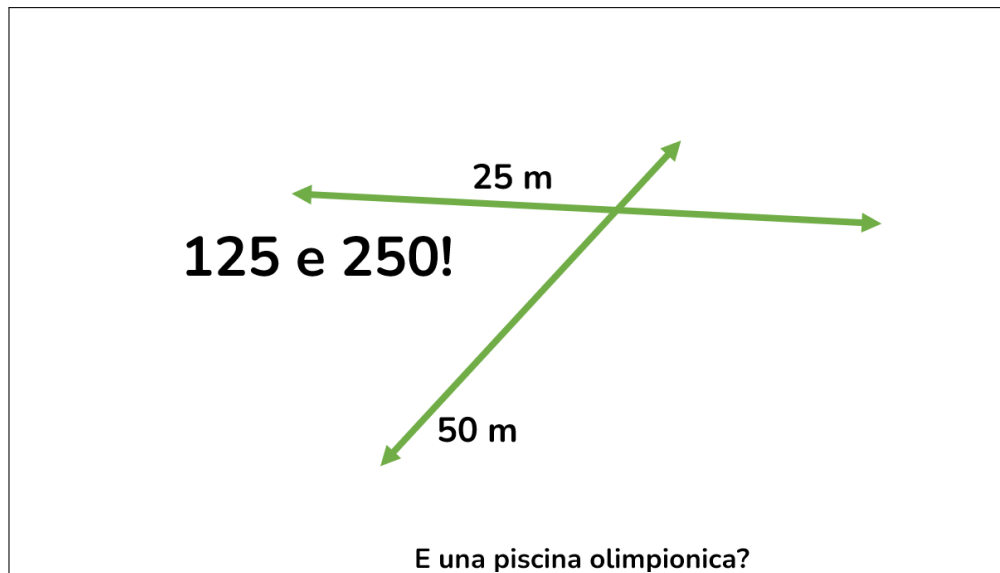


Figura 43: Slide 24. Gratta e vinci in una piscina olimpionica.

Dato che i valori ottenuti risultano ancora distanti dall'obiettivo prefissato, si richiede agli studenti di determinare la lunghezza complessiva occupata da 9.360.000 biglietti allineati. Una volta conclusa l'attività individuale, vengono mostrati i passaggi risolutivi per consentire un confronto diretto e una verifica dei risultati.

$$20\text{ cm} \times 9.360.000\text{ biglietti} = 187.200.000\text{ cm} \quad (6)$$

$$187.200.000\text{ cm} = 1.872.000\text{ m} = 1.872\text{ km} \quad (7)$$

Al termine di questo calcolo si pone la domanda: *quanti sono 1.872 km?*

Per mostrare graficamente la distanza ricercata, si è deciso di utilizzare alcune immagini tratte da Google Maps [35] nelle quali, partendo dalla posizione dell'IC Fabriani di Spilamberto, il docente, mostra i passaggi sequenziali e arriva ad individuare la distanza di 1.872 km in una zona a nord del Regno Unito. Le possibilità sono infinite, dato che tutti i punti appartenenti alla circonferenza con centro a Spilamberto e raggio di 1.872 km sono idonei a rappresentare lo scopo di questi esercizio.

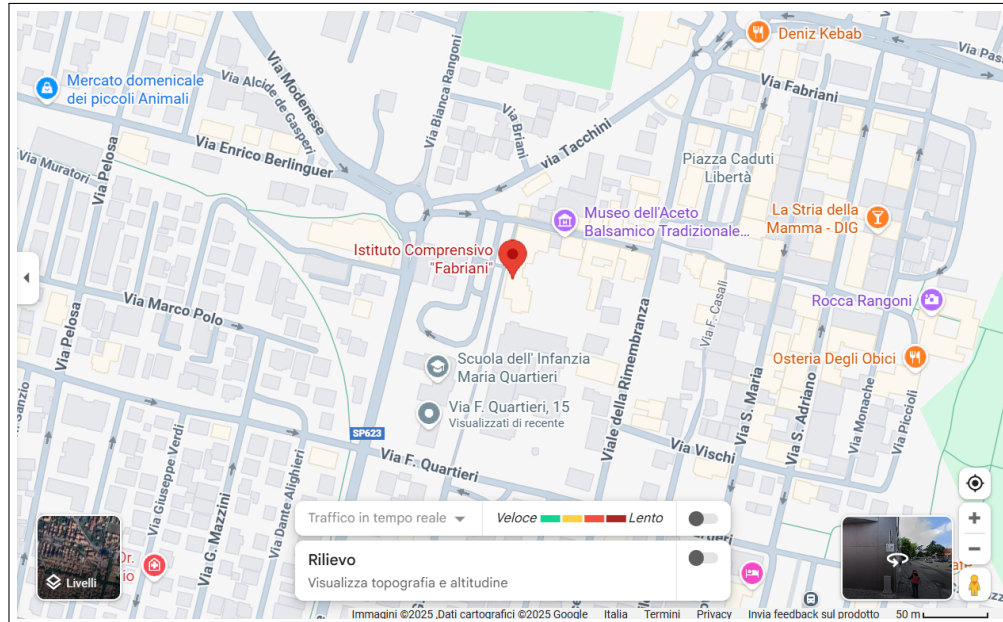


Figura 44: Google Maps (2025). Posizione dell'IC Fabriani. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026

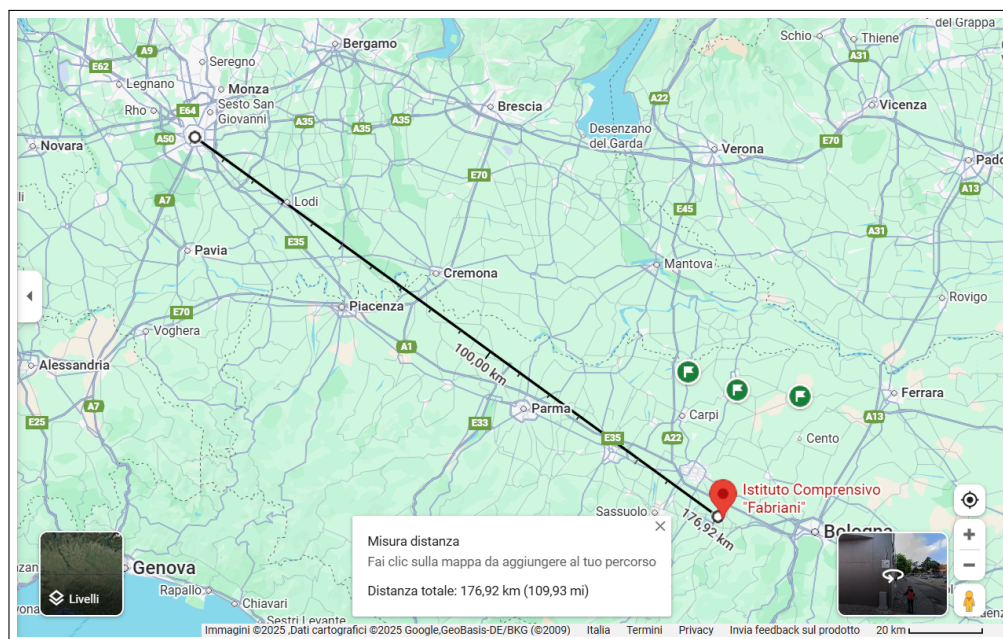


Figura 45: Google Maps (2025). Distanza dell'IC Fabriani da Milano, Italia. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026



Figura 46: Google Maps (2025). Distanza dell'IC Fabriani da Parigi, Francia. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026

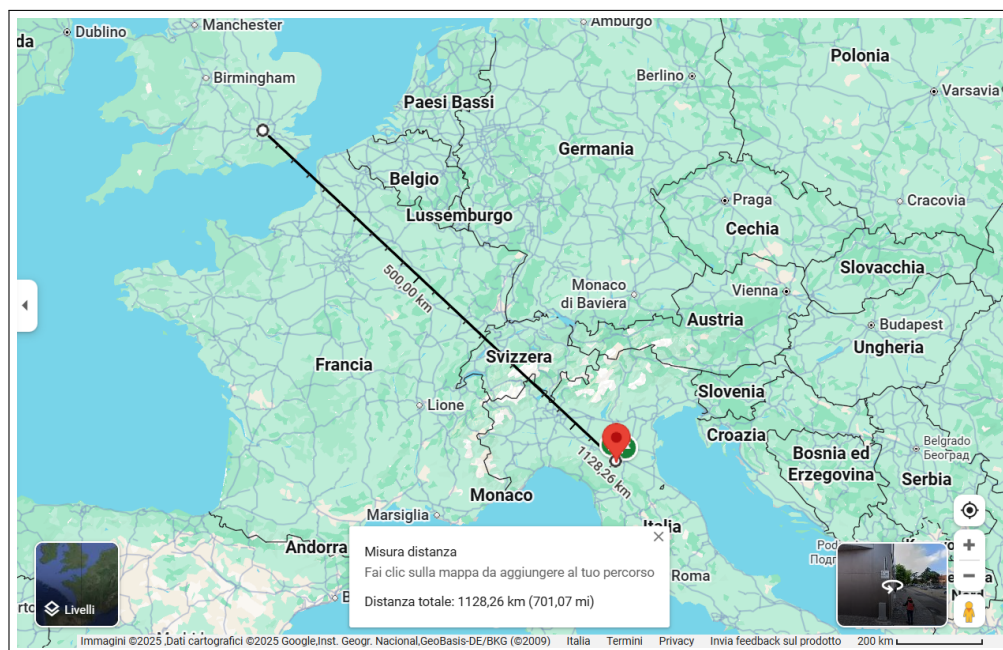


Figura 47: Google Maps (2025). Distanza dell'IC Fabriani da Londra, Regno Unito. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026

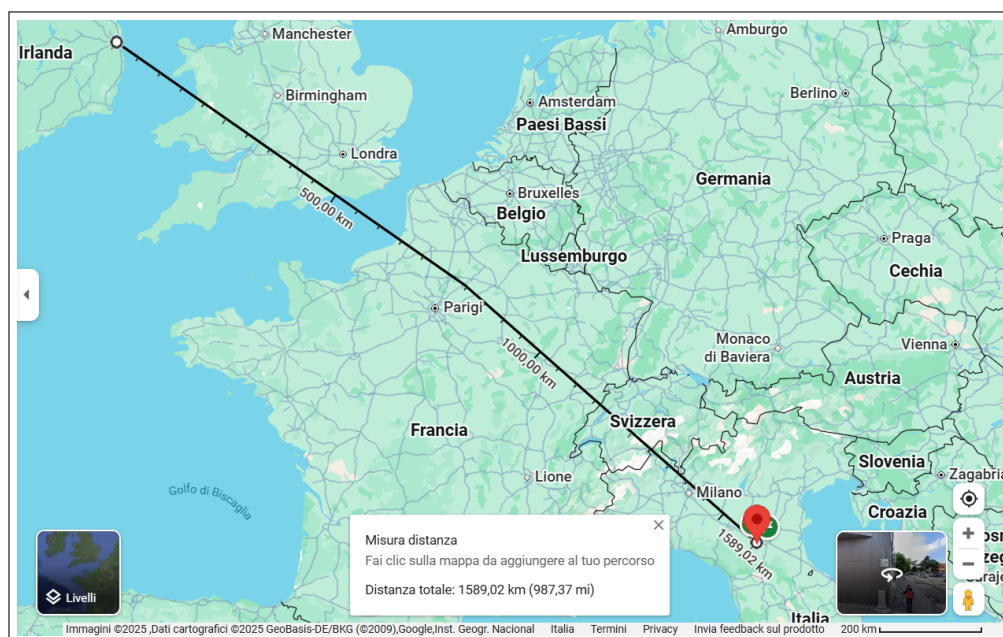


Figura 48: Google Maps (2025). Distanza dell'IC Fabriani da Dublino, Irlanda. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026

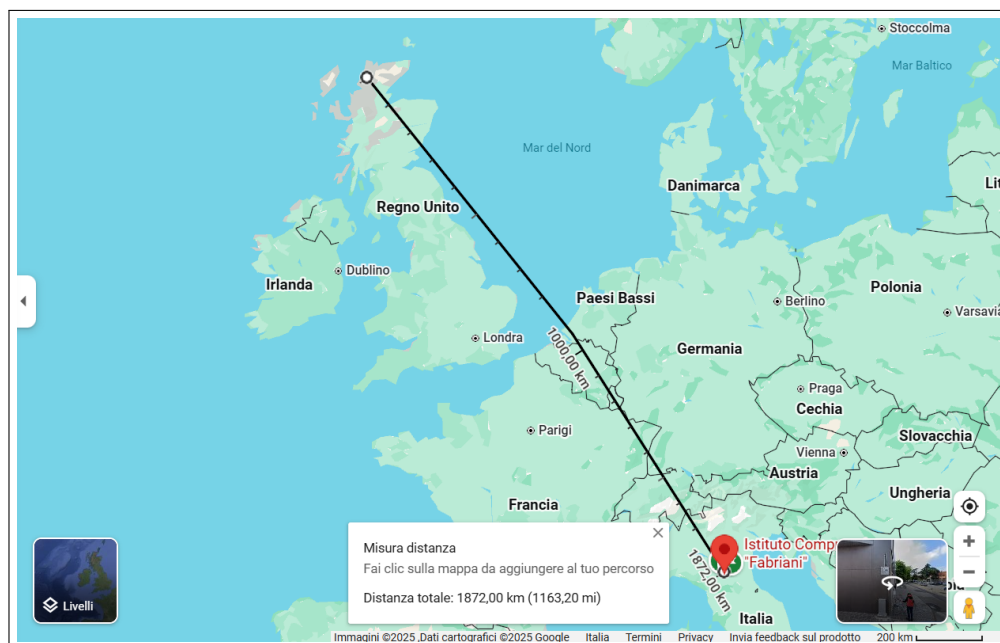


Figura 49: Google Maps (2025). Distanza di 1872 km dell'IC Fabriani dal nord del Regno Unito. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Gennaio 2026

Al termine di questa esercitazione la medesima attività viene proposta agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi [28]. Come svolto dal docente, anche gli alunni devono cercare di localizzare una posizione sulla mappa che sia distante 1.872 km dalla loro scuola. Questo esercizio ha lo scopo di farli familiarizzare con le distanze per comprendere che ordine di grandezza si sta considerando per trasformare un dato numerico asettico in un aspetto più concreto e facilmente manipolabile.

Si prosegue nel modulo riguardante gli eventi possibili, ma molto improbabili con un esempio ideato per catturare l'attenzione degli studenti e farli riflettere su quanto sia poco probabile vincere nei giochi d'azzardo. Come esempio è stato scelto la probabilità che un asteroide molto grande e distruttivo colpisca la Terra ogni 100.000 anni: questa evenienza ha la probabilità dello 0,001%. Questo dato è stato tratto dal sito web della Nasa *"StarChild: a Learning Center for Young Astronomers"* [36], portale che contiene materiale informativo relativo allo spazio di facile comprensione per bambini e ragazzi. In particolare, alla domanda di quanto spesso la Terra viene colpita da asteroidi, la Nasa risponde che, nonostante sia estremamente raro che un asteroide distruttivo con dimensione maggiore di 1 km impatti il nostro pianeta, in media si ha una collisione ogni 100.000 anni.

Questo si traduce in:

$$p(\text{collisione ogni anno}) = \frac{1}{100.000} = 0,00001 = 0,001\% \quad (8)$$

Il dato viene confrontato con la probabilità che un singolo giocatore entri in tabaccheria e con una sola giocata risulti vincitore del premio massimo del Superenalotto (indovinare tutti i sei numeri dell'estrazione scelti a caso da 1 a 90). Il calcolo di questa probabilità è stato estrapolato dal materiale informativo prodotto nell'ambito del progetto Bet on Math [1] e l'attività è stata modificata prendendo come esempio l'asteroide (nel progetto di Bet on Math come confronto era usato la probabilità di trovarsi in mezzo ad una rapina, ma si è ritenuto un esempio non adeguato per l'età degli studenti).

In questo caso la probabilità è:

$$p(\text{sei al superenalotto}) = \frac{1}{622.614.630} \approx 0,0000000016 = 0,00000016\% \quad (9)$$

Confrontando i due dati, ottengo che la probabilità che la Terra sia colpita da un asteroide distruttivo è circa 6000 volte più probabile rispetto ad entrare in una tabaccheria e indovinare la sequenza dei sei numeri del Superenalotto.

$$\frac{0,00001\%}{0,00000016\%} = 6.250 \quad (10)$$

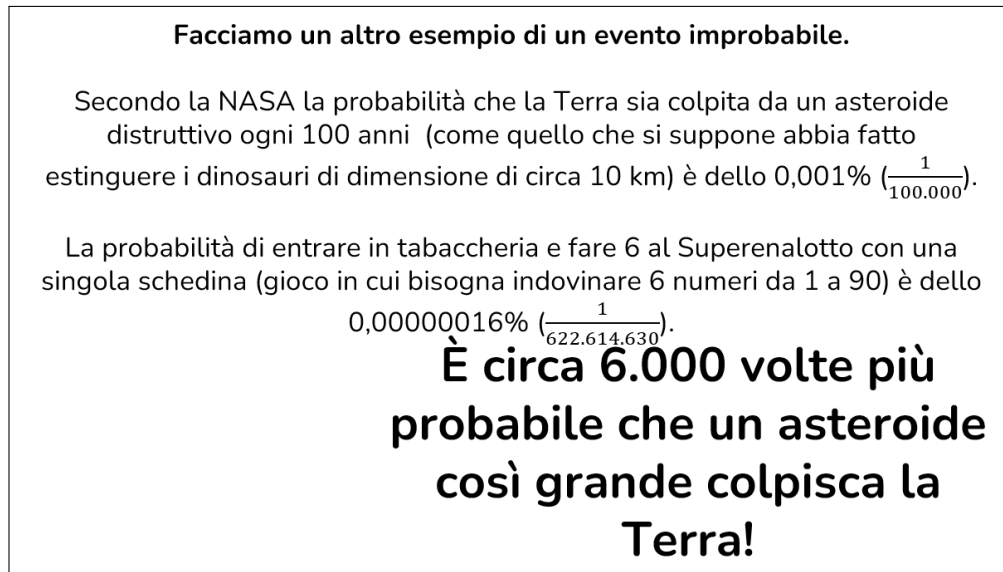


Figura 50: Slide 29. Confronto tra probabilità: la collisione di un asteroide con la Terra e la vincita massima al Superenalotto.

Questo semplice paragone consente agli studenti di comprendere come un evento che loro sicuramente reputano improbabile (la collisione di un grande asteroide con la Terra) sia in realtà molto più probabile rispetto a vincere il premio massimo ad un gioco d'azzardo diffuso come il Superenalotto.

È atteso che qualche studente ponga la domanda sul perché non si abbiano ricordi di asteroidi distruttivi che colpiscono la Terra mentre periodicamente qualche giocatore vince il premio massimo al Superenalotto. Si valuta, quindi, di inserire una slide contenente il seguente quesito per spiegare il motivo di questo paradosso: *se è molto più probabile che un asteroide colpisca la Terra rispetto a vincere al Superenalotto, come è possibile che ogni tanto qualcuno vinca, mentre gli asteroidi non cadono così frequentemente?*

Infatti, gli asteroidi che si muovono vicino alla Terra e che possono diventare potenzialmente pericolosi sono rari, invece, le persone che giocano al Superenalotto e di conseguenza il numero di partite giocate è enormemente superiore, nell'ordine di grandezza dei milioni [37]. Di conseguenza, moltiplicando una probabilità estremamente piccola per milioni o miliardi (se consideriamo il numero di partite giocate), si ottiene una probabilità che diventa più significativa e giustifica le sporadiche vincite al Superenalotto che occasionalmente vengono citate nei canali di informazione.

Inoltre, questo meccanismo rientra nell'*effetto possibilità* descritto da Daniel Kahneman, premio Nobel per l'economia nel 2002 [46]. Acquistare un biglietto fornisce una probabilità di vincita che non ci sarebbe senza possedere il biglietto: non

importa che la probabilità sia infinitesima, il giocatore acquista “il diritto di cullarsi nel sogno di vincere” [46].

È inoltre necessario considerare un ulteriore aspetto che porta a ritenere una vincita al Superenalotto molto più probabile dell’impatto di un asteroide sulla Terra. Daniel Kahneman [46] sostiene che un evento raro venga quasi sempre sovraponderato qualora sia in grado di attirare l’attenzione e generare immagini vivide nel soggetto. Poiché l’essere umano è periodicamente esposto a notizie e narrazioni riguardanti vincite milionarie, si produce un’immagine mentale facilmente accessibile che viene richiamata alla memoria, alterandone la percezione delle reali probabilità. Ad esempio, sebbene gli tsunami siano fenomeni rari in Giappone, la chiarezza delle immagini dei media porta i turisti a sovrastimarne la frequenza. Al contrario, eventi altrettanto rari ma privi di un riscontro visivo frequente subiscono il processo opposto: l’eventualità di un asteroide distruttivo che colpisca il nostro pianeta non è presente nella memoria umana e quindi viene percepita come un’eventualità quasi nulla.

3.2.7 Sesta attività: probabilità in giallo

Con l’attività numero cinque è stata terminata la parte didattica e di inquadramento dei concetti cardine della probabilità, successivamente si è quindi deciso di orientarsi su una fase di consolidamento dei concetti esposti attenendosi sempre ad un approccio di tipo laboratoriale e ludico.

Si propone agli studenti un gioco, in cui gli alunni dovranno risolvere dei quiz relativi agli argomenti visti in classe per risolvere un caso strutturato come un racconto giallo. La storia proposta è la seguente:

Il Professor Gaussino, genio della matematica, ha annunciato di aver fatto una scoperta rivoluzionaria. La mattina dopo, il suo laboratorio è stato trovato sottosopra e i documenti contenenti la scoperta sono spariti! Cinque persone erano presenti nella scuola il giorno prima. Ognuna ha un movente, ma solo uno è il colpevole. Per aiutare la polizia dovrete risolvere 15 quiz di probabilità: ogni risposta corretta vi farà ottenere un indizio. Alla fine, metterete insieme i fatti per identificare il ladro.

Si è optato per una forma semplice e scorrevole, ma molto breve per focalizzare l’attenzione dei ragazzi, ma allo stesso tempo non far diventare l’attività dispersiva. Lo scopo, infatti, è quello di consolidare le conoscenze matematica relative alla probabilità e non di concentrarsi sulla risoluzione del caso.

06

PROBABILITA' IN GIALLO



Il Professor Gaussino, genio della matematica, ha annunciato di aver fatto una scoperta rivoluzionaria. La mattina dopo, il suo laboratorio è stato trovato sottosopra e i documenti contenenti la scoperta sono spariti!

Cinque persone erano presenti nella scuola il giorno prima. Ognuna ha un movente, ma solo uno è il colpevole. Per aiutare la polizia dovreste risolvere 15 quiz di probabilità: ogni risposta corretta vi farà ottenere un indizio. Alla fine, metterete insieme i fatti per indentificare il ladro.

Trovate il colpevole.

Figura 51: Slide 31. Probabilità in giallo, il racconto.

Agli studenti vengono proposti quindici quesiti relativi alla probabilità che spazino tra tutti gli argomenti visti in classe. Ad ogni risposta esatta vengono fornite una o due lettere che unite insieme andranno a formare una frase che indica il colpevole del caso. I quiz proposti sono mostrati nella figura, mentre il modulo fornito agli studenti è mostrato in figura 81. L'esercizio viene proposta sotto forma di gara, decretando un vincitore alla fine del tempo prestabilito.

Sottoporre agli studenti questo test sotto forma di gara e gioco rientra nella metodologia della gamification che risulta essere molto efficace nell'insegnamento della matematica purché rispetti alcuni requisiti. Come riportato nell'articolo di Dorit Alt [39], il gioco si trasforma in un'attività utile ai fini didattici solo se gli studenti partecipano attivamente all'attività sentendosi coinvolti direttamente nella risoluzione del problema proposto dal gioco. Si è ipotizzato di raggiungere questo obiettivo proponendo l'attività sia come caso da risolvere che come gara tra gli studenti, come anticipato già in precedenza.

La progettazione e la scelta delle domande è stata eseguita seguendo la Tassonomia di Bloom [22], con l'obiettivo di strutturare una serie di test validi ed efficaci. La Tassonomia di Bloom è un modello educativo che classifica l'apprendimento in sei livelli gerarchici di complessità crescente. Ogni livello funge da base per quello successivo e deve essere consolidato adeguatamente prima di passare al superiore per poter far progredire correttamente il livello di apprendimento. I sei livelli sono (partendo dal più basso): *ricordare*, *capire*, *applicare*, *analizzare*, *valutare*, *creare*. Le domande sono quindi state così categorizzate:

1. **capire**: studente deve capire il significato di un'informazione e tradurla nei

vari formati (quiz 4, quiz 7, quiz 13);

2. **applicare:** lo studente deve utilizzare formule procedure in situazioni pratiche (quiz 1, quiz 2, quiz 3, quiz 6, quiz 8, quiz 9, quiz 11, quiz 12, quiz 14, quiz 15);
3. **analizzare:** lo studente deve scomporre i problemi nelle sue parti costitutive, trovare le relazioni e fare confronti (quiz 5, quiz 10).

Gli ultimi due step della tassonomia non sono stati raggiunti sia per la difficoltà di rappresentarli con una prova a risposta multipla che per il livello scolastico degli studenti, mentre il primo (ricordare) non è stato inserito in questa attività.

Le domande con relativa risposta e gli indizi da fornire agli studenti sono riportati nella tabella 4 mentre il modulo fornito agli studenti è rappresentato in figura 81.

Tabella 4: Risposte e indizi relativi ai quesiti dell'attività probabilità in giallo.

Quesito (Testo della domanda)	Risposta	Indizi
1. Qual è la probabilità di ottenere un numero pari lanciando un dado non truccato a 6 facce?	$\frac{1}{2}$	È
2. Lanci una moneta non truccata. Qual è la probabilità che esca testa?	$\frac{1}{2}$	R
3. Un sacchetto ha 3 palline rosse, 2 blu. Qual è la probabilità di estrarre a caso una pallina blu?	$\frac{2}{5}$	M
4. Prendere 11 in una verifica è un evento certo, possibile o impossibile?	Impossibile	I
5. In un'urna ci sono 5 palline: 2 rosse, 3 nere. Senza rimettere la prima, qual è la probabilità di estrarre a caso una pallina nera e successivamente estrarne un'altra?	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$	O
6. Estrai a caso una carta da un mazzo da briscola. Qual è la probabilità di ottenere un asso?	$\frac{1}{10}$	E

Quesito (Testo della domanda)	Risposta	Indizi
7. Domani ci sarà il sole. Questa affermazione rappresenta un evento certo, possibile o impossibile?	Possibile	O
8. Un sacchetto contiene 5 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5. Qual è la probabilità di pescare a caso un numero dispari?	$\frac{3}{5}$	P
9. Un dado non truccato ha le facce: 1, 2, 2, 3, 3, 3. Qual è la probabilità di ottenere un 3?	$\frac{1}{2}$	L
10. Lanci due dadi non truccati. Qual è la probabilità che la somma sia 7?	$\frac{1}{6}$	E
11. Ad una gara partecipano 11 persone. Qual è la probabilità che Andrea vinca se tutti i partecipanti hanno la stessa possibilità di successo?	$\frac{1}{11}$	A
12. Una ruota della fortuna ha 5 spicchi: 3 rossi, 2 gialli. Qual è la probabilità che esca giallo?	$\frac{2}{5}$	V-L
13. Calcola la probabilità di estrarre a caso una regina da un mazzo di carte da briscola.	0	C-L
14. Se scegli a caso un giorno della settimana, qual è la probabilità che sia un giorno feriale?	$\frac{5}{7}$	O
15. In una scatola ci sono 10 biglie: 4 rosse, 3 verdi, 3 blu. Qual è la probabilità di pescare a caso una biglia blu?	$\frac{3}{10}$	I

3.2.8 Settima attività: laboratorio di simulazione di un gratta e vinci

Al fine di verificare la comprensione dei giochi a premi e il calcolo delle relative probabilità di vincita, si è scelto di proporre agli studenti un'attività laboratoriale focalizzata sulla creazione di gratta e vinci personalizzati. Tale approccio si fonda sulla teoria del *costruzionismo* di Seymour Papert [45], secondo cui l'apprendimento risulta più incisivo se supportato dalla realizzazione di un *artefatto materiale*. Attraverso la costruzione di un artefatto, gli alunni sviluppano competenze legate alla collaborazione tra pari [28] e sono stimolati a riflettere sulle regole matematiche sottese al gioco creato. L'attività si configura primariamente come una proposta ludico-didattica in cui la componente di gioco e manuale sono fondamentali, mantenendo comunque una solida base educativa per il perseguimento degli obiettivi didattici oggetto della presente tesi.

07 LABORATORIO: SIMULA UN GRATTA E VINCI

- Verrete divisi in gruppi di 4-5 studenti.
- Seguite le istruzioni per creare un gratta e vinci.
 - Infine discutiamone insieme.

Quanti hanno vinto?
Era più o meno di quanto ti aspettavi?
Come si calcola la probabilità?

Figura 52: Slide 32. Attività: laboratorio di simulazione di un gratta e vinci.

L'esercizio si compone di quattro fasi:

1. **discussione in gruppo:** gli studenti decidono quanti biglietti totali creare (massimo dieci biglietti), quanti saranno vincenti e che premi mettere in palio. Si puntualizzerà di non inserire premi monetari;
2. **costruzione dei biglietti:** verrà fornito il modello mostrato in figura 54, creato appositamente per il presente progetto di tesi. Dopo aver inserito nel cerchio a destra il premio scelto, si rivestirà il biglietto con nastro adesivo trasparente e poi si andrà a coprire il premio con una vernice fatta con colore acrilico addizionato con una piccola quantità di detersivo per piatti. Le istruzioni verranno fornite a voce durante lo svolgimento della lezione;
3. **distribuzione casuale:** tutti i biglietti vengono mescolati e distribuiti casualmente ai gruppi. Ogni gruppo sceglie quanti biglietti prendere e successivamente li gratta svelando o meno la vincita;
4. **discussione finale:** al termine dell'attività si svolge una discussione guidata investigando le aspettative di vincita degli studenti, le percentuali di vincita conteggiando il numero dei biglietti vincenti rispetto a quelli totali e la conseguente probabilità di vittoria.

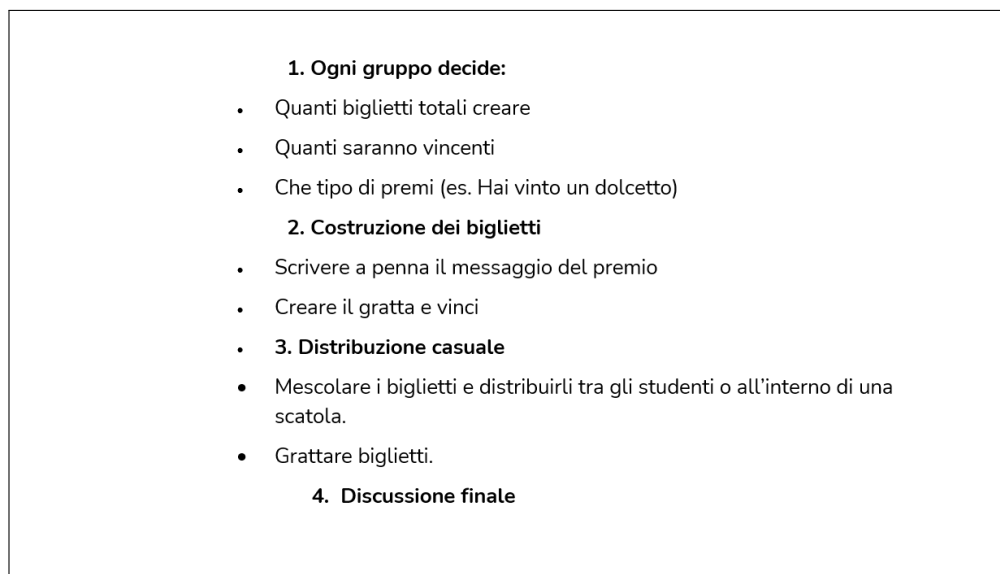


Figura 53: Slide 33. Fasi operative del laboratorio di simulazione di un gratta e vinci.



Figura 54: Modello per l'attività creativa sui gratta e vinci.

3.2.9 Ottava attività: discussione finale

In chiusura la progetto didattico sulla probabilità, sono state ideate alcune attività finali con l'obiettivo di terminare il percorso e raccogliere dati per la seguente tesi. Questa sezione e le successive si configurano quindi come strumenti per verificare l'apprendimento dei ragazzi, ottenere un feedback sul percorso svolto e creare un database di dati utili ad una successiva analisi.

In particolare, l'ottava attività proposta è una discussione con domande guida per finalizzare il percorso. Questa metodologia può rientrare nella *discussione di concettualizzazione* introdotta nel testo di Bartolini Bussi, Boni e Ferri [21] che fa emergere i "sensi personali" degli studenti per poi guidarli verso il significato matematico della probabilità.

Le domande scelte sono state le seguenti:

1. cosa ti ha colpito di più di questo argomento?
2. qual è stata l'attività più divertente o interessante per te? Perché?
3. hai scoperto qualcosa che non ti aspettavi sulla probabilità?
4. cosa ti è sembrato difficile all'inizio ma poi sei riuscito a capire?
5. hai cambiato il modo in cui pensi al caso o alla fortuna grazie a questo percorso?
6. in quali altri ambiti scolastici o della vita pensi che potrai usare ciò che hai imparato sulla probabilità?
7. cosa ti piacerebbe approfondire se continuassimo a parlare di probabilità?

Le domande sono state scelte con l'obiettivo principale di investigare come la concezione degli alunni rispetto alla probabilità, al caso, alla fortuna e al gioco d'azzardo è cambiata dopo lo svolgimento del presente percorso didattico, mentre la verifica degli aspetti più teorici e didattici è lasciata ad una fase successiva in cui si andrà a svolgere una verifica scritta.

08 DISCUSSIONE FINALE

- 1. Cosa ti ha colpito di più di questo argomento?
- 2. Qual è stata l'attività più divertente o interessante per te? Perché?
- 3. Hai scoperto qualcosa che non ti aspettavi sulla probabilità?
- 4. Cosa ti è sembrato difficile all'inizio ma poi sei riuscito a capire?
- 5. Hai cambiato il modo in cui pensi al caso o alla fortuna grazie a questo percorso?
- 6. In quali altri ambiti scolastici o della vita pensi che potrai usare ciò che hai imparato sulla probabilità?
- 7. Cosa ti piacerebbe approfondire se continuassimo a parlare di probabilità?

Figura 55: Slide 34: discussione finale.

3.2.10 Nona attività: compito per casa

Per verificare ulteriormente la concezione degli alunni relativamente alla probabilità e al gioco d'azzardo, si propone un breve testo da sviluppare a casa in cui gli

studenti dovranno indicare perché i giochi d'azzardo non sono una buona strategia per guadagnare. Questo esercizio ha l'obiettivo di verificare se gli studenti abbiano compreso il concetto di improbabilità di vincita nei giochi a premi e come la fortuna non influisca sulle nostre probabilità di vittoria.

Il testo proposto è il seguente:

Scrivi un breve testo in cui spieghi ad un amico perché i giochi d'azzardo non sono una buona strategia per guadagnare.

3.2.11 Decima attività: verifica in classe

Come fase finale del progetto si propone agli studenti una verifica sommativa per testare il livello di conoscenza degli argomenti trattati in classe. La verifica verrà fornita alla fine di tutto il percorso e si concorderà con la docente la volontà di utilizzare il voto come valutazione curricolare. Nel test sono presenti dieci domande a risposta multipla molto simili a quelle proposte nell'attività "probabilità in giallo" che spaziano tra tutti gli argomenti trattati. Sono presenti anche tre domande aperte per valutare ulteriormente le conoscenze teoriche acquisite. Gli esercizi e le domande ideate sono fornite nella tabella 5, mentre i risultati dei quiz sono mostrati nella tabella 6. Il modulo fornito agli studenti è mostrato in figura 82.

Tabella 5: Quiz e risposte della verifica finale.

Domanda	Opz. 1	Opz. 2	Opz. 3	Opz. 4
1. Se pesco a caso una pallina da un sacchetto contenente 4 palline blu, 3 rosse e 5 verdi, qual è la probabilità di estrarre una pallina blu?	1/3	1/2	2/3	5/6
2. Un evento con probabilità 1 è:	Impossibile	Possibile	Certo	Nessuna
3. Qual è la probabilità di non ottenere un multiplo di 3 lanciando un dado non truccato?	1/3	2/3	50%	1/2
4. Quale di questi eventi ha una probabilità maggiore?	Pari 1-10	Primo 1-10	Numero 7	> 8 (1-10)
5. Qual è la probabilità di estrarre a caso una carta di bastoni da un mazzo da briscola?	1/4	1/10	1/5	1/2
6. La probabilità di un evento impossibile è:	1	0	0,5	100%
7. Lanciando un dado non truccato a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere un numero pari?	1/3	1/2	2/3	5/6

Domanda	Opz. 1	Opz. 2	Opz. 3	Opz. 4
8. In una classe ci sono 12 maschi e 18 femmine. Qual è la probabilità di estrarre a caso una femmina?	3/5	2/3	18%	12/30
9. Quale di questi è un evento impossibile?	Auto fuori casa	Dado con 10	Carta denari	Vincere lotteria
10. Quanti lanci di un dado servono per ottenere teoricamente un 3 ($P=1/6$)?	1	6	60	Molto grande

I quiz sono stati così scelti e categorizzati secondo la Tassonomia di Bloom [22], già esposta nel paragrafo 4.2.8:

1. **ricordare**: lo studente deve recuperare definizioni acquisite mnemonicamente senza effettuare calcoli (quiz 6, quiz 9);
2. **capire**: studente deve capire il significato di un'informazione e tradurla nei vari formati (quiz 2, quiz 8);
3. **applicare**: lo studente deve utilizzare formule procedure in situazioni pratiche (quiz 1, quiz 3, quiz 5, quiz 7, quiz 10);
4. **analizzare**: lo studente deve scomporre i problemi nelle sue parti costitutive, trovare le relazioni e fare confronti (quiz 4).

Anche in questo caso, gli ultimi due step della tassonomia non sono stati raggiunti, mentre sono state inserite domande teoriche che afferiscono al livello del ricordare.

Tabella 6: Risposte relative alla verifica finale.

Quesito	Risposta
1	$\frac{1}{3}$
2	Certo
3	$\frac{2}{3}$
4	Pescare a caso un numero pari da 1 a 10
5	$\frac{1}{10}$
6	0
7	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{2}{5}$
9	Lanciare un dado non truccato e ottenere 10
10	Un numero molto grande

4 Analisi dei risultati

4.1 Dalla proposta alla pratica didattica

L'intera progettazione mostrata nel capitolo 4.2 è stata sottoposta all'attenzione della Prof.ssa Chiara Ferrari prima della sperimentazione pratica. Tutti i punti sono stati analizzati in sinergia con l'obiettivo di rendere il progetto idoneo allo svolgimento in classe. Si è deciso di svolgere il percorso in quattro lezioni della durata di due ore ciascuna nel primo quadrimestre in una classe terza. Al termine dell'analisi, la struttura progettata è rimasta pressoché invariata ad eccezione di alcuni aspetti che verranno elencati analiticamente di seguito.

1. **seconda attività:** la slide numero 4 è stata modificata aggiungendo la descrizione dei termini f ed n presenti nella definizioni di probabilità per rendere la scrittura più comprensibile agli studenti. La formula 2 è stata modificata in:

$$p(E) = \frac{\text{numero di esiti favorevoli}}{\text{numero di tutti gli esiti possibili}} = \frac{f}{n} \quad (11)$$

La probabilità matematica di un evento E è il rapporto tra il numero f degli esiti favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti gli esiti possibili di quel fenomeno.

$$p(E) = \frac{\text{numero di esiti favorevoli}}{\text{numero di tutti gli esiti possibili}} = \frac{f}{n}$$

ESEMPIO

E =estrarre un numero pari di un dado

$f=3$
 $n=6$

$$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Figura 56: Slide 4 modificata.

2. **quarta attività:** la slide numero 15 è stata modificata aggiungendo un'immagine cromatica per mostrare il campo di variazione degli eventi possibili che rappresentano tutta la zona compresa tra gli eventi certi e quelli impossibili. In questa stessa attività è stata aggiunta una slide prima di introdurre

l'argomento dei numeri ritardatari per far ragionare gli studenti sulla differenza tra probabilità e tentativi necessari per ottenere un determinato risultato;

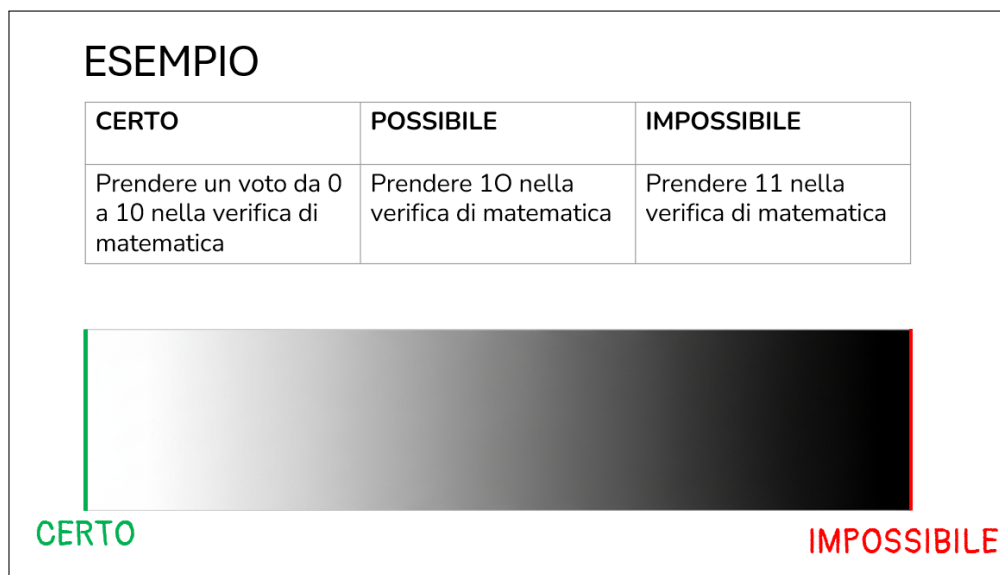


Figura 57: Slide 15 modificata.

Giovanni sta giocando a dadi con il suo amico Lorenzo, ha fatto 10 lanci con, ma ancora non ha ottenuto un 6.

Come è possibile?

Figura 58: Slide aggiuntiva nella quarta attività.

3. **quinta attività:** è stata inserita una slide aggiuntiva prima di mostrare i calcoli necessari per calcolare la distanza coperta da 9.360.000 biglietti. In questa scheda è riportato un invito ai ragazzi a provare a svolgere i calcoli in autonomia prima di visualizzare la dimostrazione proiettata alla lavagna. Questa semplice sfida risulta funzionale all'apprendimento delle conversioni

con le unità di misura, argomento che spesso crea difficoltà negli studenti della scuola secondaria di primo grado;

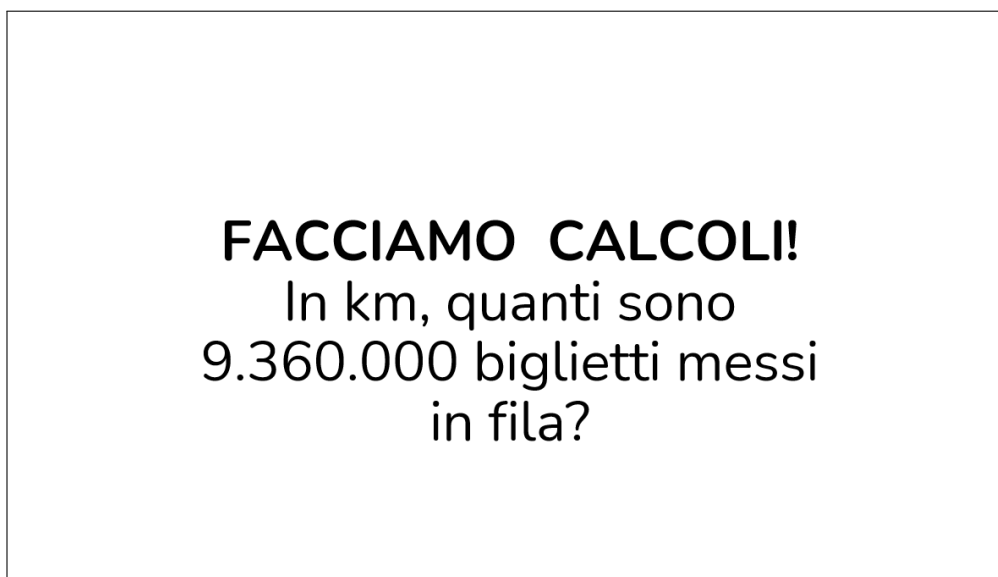


Figura 59: Slide aggiuntiva nella quinta attività.

4. **settima attività:** il laboratorio di simulazione dei gratta e vinci è stato ritenuto superfluo e non strettamente necessario per l'acquisizione delle conoscenze relative alla probabilità. Per questo motivo e per ragioni di tempo, è stato rimosso dalla progettualità;
5. **nona attività:** il testo ideato nella presente attività è stato proposto alla Prof.ssa Luciana Di Giuseppe, docente di lettere della classe in cui è stato svolto il progetto che si è resa disponibile a far eseguire il tema in classe ai ragazzi non appena avranno acquisito le competenze necessarie per produrre un testo argomentativo. L'attività è stata svolta in gruppo e gli alunni hanno prodotto un unico testo collaborando gli uni con gli altri;
6. **autovalutazione:** la Prof.ssa Ferrari ha proposto di inserire al termine del percorso un'attività di autovalutazione. Come evidenziato da Topping [47], l'obiettivo dell'autovalutazione è favorire la riflessione sui propri processi cognitivi con l'obiettivo di trasformare gli studenti da semplici spettatori a elementi attivi della costruzione del proprio sapere. Le domande proposte con le possibili risposte, sono mostrate nella tabella 7.

Tabella 7: Questionario completo di autovalutazione

Competenze personali/imparare ad imparare/competenze organizzative				
Ho compreso l'argomento svolto?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Ho raggiunto gli obiettivi prefissati dalla verifica?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Ho svolto le attività in modo consapevole?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Ho preso appunti sull'argomento affrontato?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Competenze sociali				
Ho partecipato attivamente all'attività?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Ho rispettato gli altri senza prenderli in giro?	☐ Mai	☐ Poco	☐ Abb.	☐ Molto
Le attività ti sono sembrate facili o difficili?				
Lancio dadi singoli	☐ Facile		☐ Difficile	
Lancio dadi doppi	☐ Facile		☐ Difficile	
Dado truccato	☐ Facile		☐ Difficile	
Estrazione caramelle da sacchetto	☐ Facile		☐ Difficile	
Eventi certi/incerti/impossibili	☐ Facile		☐ Difficile	
Numeri ritardatari lotto	☐ Facile		☐ Difficile	
Gratta e vinci (calcoli)	☐ Facile		☐ Difficile	
Gratta e vinci (Google Maps)	☐ Facile		☐ Difficile	
Quiz giallo	☐ Facile		☐ Difficile	
Sapevi già qualcosa su questi argomenti?	☐ Sì		☐ No	
Ti è servito per realizzare meglio il tuo lavoro?	☐ Sì		☐ No	
Considera il tuo impegno e la serietà con cui hai lavorato in questi incontri. Su una scala da 4 a 10 che voto ti daresti?				
Cosa ti è piaciuto? Perché?				
Cosa non ti è piaciuto? Perché?				
Cosa sapevi?				
Scrivi 3 cose che hai imparato o che ti sono rimaste impresse.				

4.2 Interpretazione dei risultati e valutazione del percorso

Nel presente capitolo vengono esposti i dati raccolti durante le attività condotte in classe, con l'obiettivo di fornire un quadro delle evidenze emerse. È necessario precisare che la rilevazione dei dati sperimentali si è concentrata esclusivamente su alcune parti del progetto, in quanto la natura stessa delle attività si prestava a una raccolta di dati oggettivi e misurabili. Per tutte le altre sezioni si è proceduto tramite la raccolta di evidenze di natura qualitativa basate sull'osservazione diretta in classe.

4.2.1 Domande introduttive

L'attività introduttiva, strutturata attraverso una metodologia di brainstorming strutturato, ha avuto un riscontro molto positivo dal gruppo classe. Nonostante l'iniziale esitazione a rispondere, dovuta probabilmente al timore di

sbagliare e alla non conoscenza del docente, gli alunni hanno successivamente mostrato interesse e partecipazione per l'attività.

Le risposte fornite alle domanda sono mostrate nella tabella 8.

Tabella 8: Risposte alle domande introduttive.

1. Secondo voi cosa intendiamo quando parliamo di caso?
Qualcosa di difficile da prevedere
Qualcosa di improvviso
Fortuna
Coincidenze
Esempio: estrazione casuale dei numeri della tombola
2. Qual è la differenza tra caso e scelta? Perché alcuni eventi capitano a caso?
Il meteo è casuale, non si ha potere decisionale
Il caso è un insieme di eventi che capitano casualmente (es. inciampare)
Quando si compie una scelta si pensa di poter decidere, ma spesso c'è una componente anche casuale
3. Pensate che ci sia qualcosa di completamente casuale nel mondo? Qualche esempio?
Il futuro
Il meteo
Il tempo
L'universo
Eventi che non si possono scegliere
Il lancio dei dadi
4. Raccontate un'esperienza in cui avete puntato sul caso. Ha funzionato o vi siete pentiti?
Blackjack
Briscola
Fantacalcio
Scopa
Scommesse

Dalle risposte è emerso che per gli alunni il caso è tutto ciò che non si può controllare, vedendolo come il contrario di una scelta volontaria, il meteo e la possibilità di inciampare riflettono queste credenze. Un aspetto interessante riguarda le risposte più astratte, come l'universo, il tempo e il futuro perché, nonostante possano sembrare risposte fuori tema, evidenziano come un evento difficile da prevedere sia per gli studenti automaticamente casuale mettendo sullo stesso piano eventi incerti, ma fisici, con eventi matematicamente casuali come il lancio dei dadi.

Le risposte dimostrano, inoltre, la presenza delle misconcezioni individuate da Ang e Shahril [24], in particolare le credenze ovvero forze che guidano il caso, totalmente esterne al controllo umano.

Infine, è evidente come l'idea di probabilità degli studenti sia legata alla vita di tutti i giorni e alle emozioni infatti, citando il fantacalcio, le scommesse o giochi di carte, gli alunni dimostrano di conoscere bene il concetto di “puntare” su qualcosa. Anche in questa situazione, il riferimento alle misconcezioni [24] è evidente: *gli alunni hanno la tendenza alla rappresentatività ovvero l'abitudine di fare riferimento al caso partendo da esperienze quotidiane note.*

4.2.2 Attività laboratoriale introduttiva al concetto di probabilità

L'osservazione della classe durante lo svolgimento di questa prima attività ha evidenziato un elevato grado di partecipazione e curiosità. Gli studenti non si sono limitati alla sola esecuzione dei compiti, ma hanno interagito attraverso l'ascolto attento e la formulazione di domande, soprattutto durante l'attività pratica del lancio di un dado. Nonostante, come atteso, il numero di lanci effettuato non sia stato sufficientemente elevato da mostrare una tendenza alla convergenza dei risultati verso la probabilità teorica, gli alunni hanno mostrato di aver compreso l'argomento in seguito alla spiegazione fornita dal docente.

Un aspetto importante da sottolineare riguarda la modalità di restituzione dei risultati numerici, infatti, sebbene le consegne indicassero esplicitamente l'utilizzo della notazione frazionaria per esprimere la probabilità, diversi gruppi di alunni hanno riscontrato difficoltà nel riportare i dati in tale forma preferendo il calcolo del rapporto numerico. *Questo dettaglio indica che la capacità di passare da una trasformazione semiotica [19] all'altra non è ancora ben consolidata, portando a concludere che l'acquisizione delle conoscenze e competenze degli studenti relative alla probabilità non è ancora giunta ad un livello ottimale.*

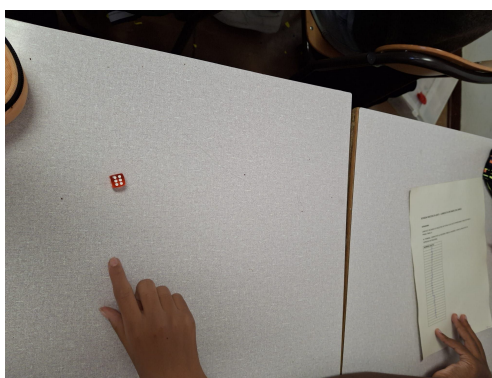


Figura 60: Attività: lancio di un dado.

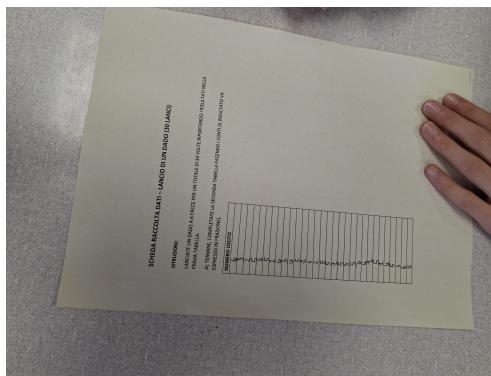


Figura 61: Attività: lancio di un dado.

4.2.3 Il concetto di equiprobabilità e esempi di calcolo della probabilità

La sezione dedicata al concetto di equiprobabilità ha confermato l'atteggiamento propositivo della classe, che ha partecipato con interesse nonostante la natura più astratta dell'argomento. Come previsto, gli studenti hanno manifestato un maggior numero di dubbi rispetto alla parte precedente, ponendo numerose domande all'insegnante.

L'attività pratica ha previsto il lancio di due dadi per analizzare la frequenza della somma ottenuta, ma va evidenziato che i trenta lanci effettuati per ciascun gruppo non sono stati sufficienti a mostrare in modo evidente l'andamento triangolare della distribuzione di probabilità. Infatti, solo pochi gruppi hanno ottenuto risultati che hanno mostrato visivamente questa tendenza e la mancanza di un riscontro pratico ha generato alcune perplessità che non sono state totalmente colmate dalla spiegazione della docente. *Tale fenomeno può essere riconducibile a quanto teorizzato da Fischbein [18] in merito alla difficoltà di decodifica degli eventi composti.*

Infine, l'attività di lancio del dado truccato, ha generato molto interesse e divertimento da parte degli alunni che hanno partecipato in prima persona all'esercizio e in breve tempo hanno compreso quali dei due dadi fosse alterato e quale no. È interessante segnalare che gli studenti sono rimasti stupiti del fatto che il dado truccato non fornisse sempre lo stesso numero ad ogni lancio.

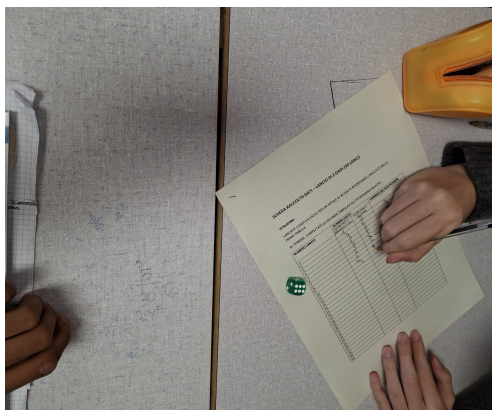


Figura 62: Attività: lancio di due dadi.

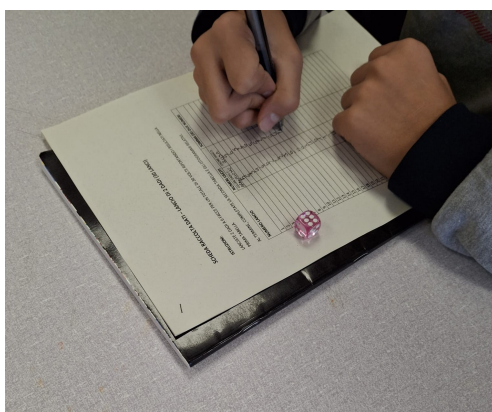


Figura 63: Attività: lancio di due dadi.

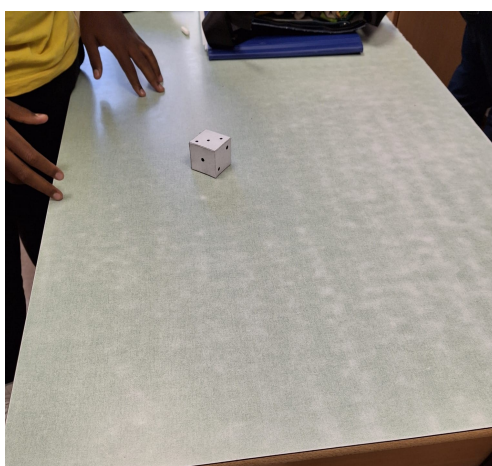


Figura 64: Attività: lancio di un dado truccato.

4.2.4 Eventi certi, possibili e impossibili

La sezione dedicata alla classificazione degli eventi certi, possibili e impossibili è risultata chiara per la quasi totalità degli studenti che hanno dimostrato un'ottima comprensione dell'argomento. *Tuttavia, come teorizzato da Fischbein [18], è emerso un ostacolo in merito alla comprensione della definizione di evento impossibile. Diversi studenti hanno manifestato, infatti, difficoltà nel discriminare tra evento impossibile e evento altamente improbabile sbagliando a produrre esempi corretti quando richiesto.*

Il modulo, che è proseguito con un approccio iniziale alle legge dei grandi numeri, ha stimolato la classe a riflettere sul numero di lanci necessari per osservare un determinato esito su un dado, ma per motivi temporali, non è stato possibile procedere all'esercizio pratico che avrebbe permesso di osservare empiricamente il fenomeno. La difficoltà degli alunni nel comprendere la differenza tra frequenza assoluta e relativa su numeri così alti, ha reso la spiegazione di questo argomento complessa e la classe ha anche mostrato una scarsa comprensione del concetto di infinito. Infatti, nel discutere la necessità di un numero elevato di prove per approssimare la probabilità teorica, alcuni studenti hanno manifestato perplessità, osservando che non siano necessari infiniti lanci per ottenere un dato risultato, in quanto l'evento potrebbe verificarsi anche in pochi tentativi. *Ciò rivela la difficoltà degli alunni nel distinguere tra la l'evento singolo e l'andamento della legge che invece descrive la frequenza relativa sul lungo periodo.*

L'ultima attività relativa all'analisi dei numeri ritardatari nel gioco del Lotto, si è rivelata inizialmente complessa per gli studenti data la poca conoscenza di questo gioco a premi, ma il fenomeno è risultato chiaro dopo la spiegazione e non ha sollevato particolari obiezioni o domande da parte degli alunni.

Di seguito verranno mostrate le tabelle 9, 10 e 11 con i dati raccolti durante l'attività. Si segnalano due aspetti: il numero del gruppo di studenti (10 gruppi totali) non è corrispondente tra le 3 tabelle e alcune risposte sono state considerate non pertinenti in quanto di difficile decodifica linguistica.

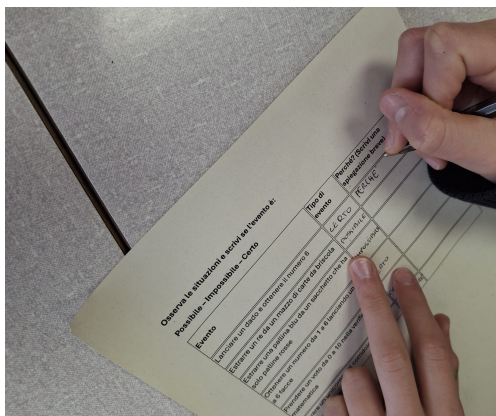


Figura 65: Attività: eventi certi, possibili, impossibili.

Tabella 9: Rilevazione delle risposte degli alunni sull'identificazione degli eventi.

	Lanciare un dado e ottenere il numero 6	Estrarre un re da un mazzo di carte da briscola	Estrarre una pallina blu da un sacchetto che ha solo palline rosse	Ottenere un numero da 1 a 6 lanciando un dado a 6 facce	Prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica	Trovare un unicorno nel corridoio
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1
	<i>Possibile</i>	<i>Possibile</i>	<i>Impossibile</i>	<i>Certo</i>	<i>Certo</i>	<i>Impossibile</i>

Tabella 10: Motivazioni fornite dagli alunni per la classificazione degli eventi.

	Lanciare un dado e ottenere il numero 6	Estrarre un re da un mazzo di carte da briscola	Estrarre una pallina blu da un sacchetto che ha solo palline rosse	Ottenere un numero da 1 a 6 lanciando un dado a 6 facce	Prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica	Trovare un unicorno nel corridoio
1	Non è sicuro che ogni volta esca 6	Perché nel mazzo di carte sono presenti 4 re	Perché non ci sono palline blu	/	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
2	Perché c'è una probabilità di 1 su 6	Perché nel mazzo di carte sono presenti 4 re	Perché non ci sono palline blu	Perché lanciando un dado un numero da 1 a 6 esce sicuramente	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
3	Perché è una delle 6 facce	Perché nel mazzo di carte sono presenti 4 re	Perché non ci sono palline blu	Perché lanciando un dado un numero da 1 a 6 esce sicuramente	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
4	RISPOSTA NON PERTINENTE	RISPOSTA NON PERTINENTE	Perché non ci sono palline blu	RISPOSTA NON PERTINENTE	/	Perché gli unicorni non esistono
5	Perché c'è una probabilità di 1 su 6	Perché non è detto che venga estratto un re	Perché non ci sono palline blu	RISPOSTA NON PERTINENTE	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono

	Lanciare un dado e ottenere il numero 6	Estrarre un re da un mazzo di carte da briscola	Estrarre una pallina blu da un sacchetto che ha solo palline rosse	Ottenere un numero da 1 a 6 lanciando un dado a 6 facce	Prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica	Trovare un unicorno nel corridoio
6	Perché c'è la possibilità che esca il 6	Perché c'è la possibilità che esca un re	Perché non ci sono palline blu	Perché lanciando un dado un numero da 1 a 6 esce sicuramente	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
7	Perché prima o poi il 6 deve uscire	Non è certo che ogni volta esca un re	Perché non ci sono palline blu	Dipende da quante volte lo lanci	Si può prendere 10, ma è raro	Perché gli unicorni non esistono
8	Perché è una delle 6 facce	Perché ci sono 4 possibilità su 40	Perché non ci sono palline blu	Perché il dado ha sei facce	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
9	Perché è una delle 6 facce	Perché le carte da briscola hanno il re	Perché non ci sono palline blu	Perché lanciando un dado un numero da 1 a 6 esce sicuramente	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono
10	Quando si lancia il dado la possibilità è sempre la stessa	Quando si estrae la possibilità rimane la stessa	Perché non ci sono palline blu	Perché lanciando un dado un numero da 1 a 6 esce sicuramente	Perché i voti vanno da 0 a 10	Perché gli unicorni non esistono

Tabella 11: Esempi di eventi formulati dagli studenti.

	Evento possibile	Perché?	Evento impossibile	Perché?	Evento certo	Perché?
1	Un fulmine colpisce una persona	Perché i fulmini cadono casualmente	Lanciare un dado a 4 facce e ottenere 5	Perché il dado ha 4 facce e i numeri vanno da 1 a 4	La gomma cancella la matita	Perché è il suo scopo
2	Avere un amico dottore	/	Nascere con la pelle verde	/	/	/
3	Trovare in un salvadanaio una moneta da 2 euro	Nel salvadanaio ci sarà sicuramente una moneta da 2 euro	Viaggiare nel tempo	Perché non si può andare indietro nel tempo	Estrarre una moneta da un portamonete	Perché è pieno di monete
4	Prendere 6 nella verifica di matematica	Se si studia è possibile	Che un dinosauro entri in classe	Perché i dinosauri sono estinti	Il sole tramonta	Perché ogni giorno il sole tramonta
5	Inizia a piovere in questo momento	Perché è nuvoloso e oggi ha già piovuto	Che le persone possano volare	Perché non si può volare	Il sole sorge e tramonta	Perché ogni giorno il sole sorge e tramonta
6	Domani ci sarà il sole	Non è detto che domani ci sarà il sole	Vedere un elfo	Gli elfi non esistono	C'è freddo	/
7	/	/	Essere rapiti da un goblin	/	/	/
8	Domani pioverà	Non siamo certi sul meteo di domani	Bere da una bottiglia vuota	Non si può bere se l'acqua non c'è	Oggi usciremo da scuola	Non si può restare a scuola dopo l'orario previsto
9	Prendere 6 nell'interrogazione di storia	Perché i voti vanno da 0 a 10	Il sole tramonta a mezzogiorno	Perché il sole tramonta solo alla sera	In una scatola piena di margherite estrai una margherita	Perché dentro ci sono solo margherite
10	Avviene un terremoto ora	Perché è un fenomeno naturale	Il muro può trasformarsi in un cane	Perché il muro non si può trasformare	Bisogna mangiare per sopravvivere	Perché se non si mangia si muore

Nella prima attività di riconoscimento degli eventi, la classe ha mostrato una competenza eccellente: tutti gli alunni hanno classificato correttamente gli eventi forniti come certi, possibili o impossibili. Tuttavia, quando gli studenti hanno dovuto giustificare il perché delle loro scelte, è emerso che in alcuni gruppi le argomentazioni date siano basate quasi esclusivamente sul vissuto quotidiano dimostrando la persistenza di bias e credenze. *In particolare, l'idea che un numero "prima o poi debba uscire" evidenzia la presenza dei bias di equiprobabilità e del controllo umano [24] per cui l'alunno ritiene di poter influenzare l'esito futuro.* Un altro esempio è relativo alla valutazione del voto scolastico: definire raro un evento matematicamente certo (ottenere un voto nel range 0-10) dimostra come sia ben presente il bias della rappresentatività [24].

La seconda fase dell'attività, relativa alla produzione autonoma di esempi, è stata più critica perché gli studenti hanno faticato a riportare su un piano matematico le loro idee, facendo sempre riferimento a verità soggettive che però loro considerano assolute. Un esempio interessante è rappresentato dall'affermazione che il tramonto del sole a mezzogiorno sia impossibile, che, pur essendo corretta nella realtà geografica dell'alunno, ignora le variabili che lo rendono possibile in altre zone del mondo. *In molti casi, la certezza è stata confusa con la funzione degli oggetti o con le leggi biologiche, come nel caso della gomma da cancellare o di dover mangiare per sopravvivere.* Va segnalato che in questa seconda parte dell'attività, molti studenti non hanno fornito esempi.

L'analisi completa di questa sezione ha reso evidente che gli alunni sono ancora molto ancorati a concezioni personali e, seppur abbiano compreso la differenza tra eventi certi, possibili e impossibili, faticano a applicare le regole ad esempi più matematici e legati alla probabilità pura. Risulta perciò evidente il quadro teorico evidenziato da Fischbein [18] che indica come la distinzione tra la tipologia di evento risulta ancora difficoltosa per gli studenti.

4.2.5 Eventi possibili, ma molto improbabili

La sezione sugli eventi possibili, ma molto improbabili ha rappresentato un'opportunità per gli studenti di confrontarsi con ordini di grandezza non comuni nella vita quotidiana. L'attività di visualizzazione della distanza coperta da 9.360.000 Gratta e Vinci svolta dall'insegnante, ha catturato l'interesse degli alunni, ma successivamente ha mostrato delle criticità quando l'esercitazione è stata svolta a gruppi direttamente dagli studenti. Alcuni studenti hanno segnalato difficoltà nell'attività di misurazione tramite Google Maps trovando complesso raggiungere la distanza calcolata di 1872 km, *mentre la quasi totalità di loro si è concentrata*

eccessivamente sull'esecuzione pratica dell'esercizio allontanandosi dal significato probabilistico sotteso.

Nella seconda parte della sezione, relativa al confronto tra la probabilità di essere colpiti da un asteroide distruttivo e di fare sei al Superenalotto, è emersa un'altra resistenza facilmente ipotizzabile. Sebbene la maggioranza degli studenti abbia riconosciuto l'improbabilità di vincere a questo gioco a premi, è emersa una forte convinzione che la scelta di giocare possa dare l'opportunità di vincere. *Questo atteggiamento è riconducibile all'effetto possibilità [46] già menzionato nel capitolo 4.2.7: la speranza di un guadagno, tende a cancellare le valutazioni probabilistiche che si possono fare su un determinato fenomeno.*

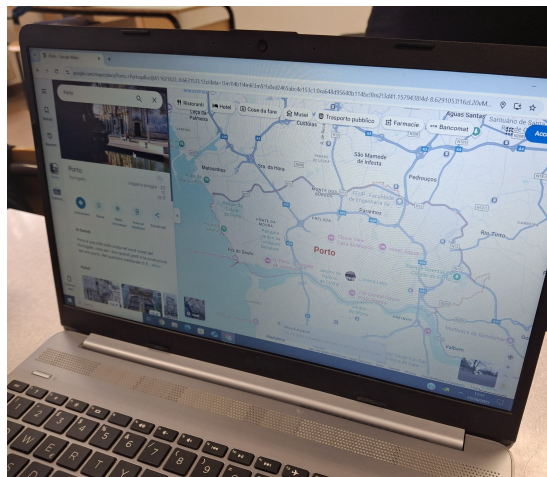


Figura 66: Google Maps (2025). Attività: calcolo della distanza tramite Google Maps. Disponibile all'indirizzo: <https://www.google.com/maps>. Consultato in data: Ottobre 2025

4.2.6 Probabilità in giallo

L'attività "Probabilità in giallo" ha suscitato un interesse molto forte tra gli studenti, come verrà approfondito anche nelle sezioni successive, *confermando come il gioco possa esercitare un impatto significativo sui processi di apprendimento [39]*. Nella tabella 12 sono mostrati il numero di tentativi che gli studenti hanno fatto prima di giungere alla risposta corretta. Nell'ultima riga è indicato il numero di tentativi extra effettuati dagli alunni rispetto ai dieci calcolati come base standard per l'attività. Eventuali numeri negativi derivano dalla mancanza di alcune risposte.

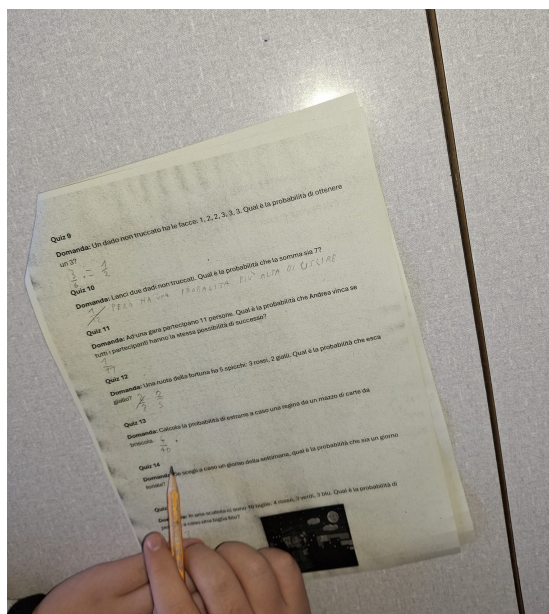


Figura 67: Attività: probabilità in giallo.

Tabella 12: Risultati dell'attività "Probabilità in giallo".

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	3	1
2	1	1	1	1	3	4	2	1	1	5	1	3	1	4	1
3	1	1	1	1	5	1	1	1	1	4	1	1	1	2	1
4	2	1	1	1	1	1	1	2	2	4	1	1	1	3	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1
8	1	1	1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	1	1	1
9	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
10	1	1	2	X	4	2	X	2	2	5	2	2	2	6	2
Tot	2	0	2	-1	10	4	2	3	2	21	2	4	3	14	1

L'analisi dei risultati evidenzia che la maggior parte dei quesiti ha richiesto un numero esiguo di tentativi per essere risolto, suggerendo una buona padronanza dei concetti base della probabilità. Emergono, però, tre eccezioni rappresentate dai quiz 5, 10 e 14. Per quanto riguarda i primi due casi, il numero elevato di tentativi trova conferma nella tassonomia di Bloom [22] che classifica queste domande nel livello "analizzare", imponendo quindi agli studenti di dover effettuare ragionamenti aggiuntivi per arrivare alla risposta. Il quiz 14 presenta invece una problematica differente poiché l'alto numero di tentativi deriva da una barriera di tipo linguistico infatti, la mancata comprensione del termine "feriale", ha impedito l'immediata identificazione dei giorni della settimana utili al calcolo della probabilità.

4.2.7 Discussione finale

In linea generale, l'attività è stata accolta con un riscontro positivo mostrando un elevato gradimento da parte degli alunni che si sono dimostrati più partecipativi rispetto alla fase di somministrazione delle domande iniziali. L'alto livello di interazione, può essere sia dovuto alla maggiore competenza acquisita sull'argomento che al consolidamento del rapporto di fiducia con il docente. *Le risposte sono riportate nella tabella 13 e mostrano come il percorso abbia stimolato anche un pensiero critico oltre al consolidamento delle sole nozioni tecniche.*

Tabella 13: Risposte raccolte durante la discussione finale.

1. Cosa ti ha colpito di più di questo argomento?
Divertente, facile, bello
Collegato alla vita di tutti i giorni
Modo di trattarlo, presenza di attività interattive
Spiegazione delle vincite alla lotteria
Pericolo del gioco d'azzardo
2. Qual è stata l'attività più divertente o interessante per te? Perché?
Probabilità in giallo (13 risposte) perché è stato messo in pratica ciò che si è imparato
Maps (4 risposte) perché è stato divertente calcolare la distanza
Lancio due dadi (2 risposte)
Formula della probabilità (1 risposta)
3. Hai scoperto qualcosa che non ti aspettavi sulla probabilità?
Ad ogni lancio la probabilità si azzerava
Nel dado truccato il numero "prescelto" non esce sempre al 100%
La probabilità si applica alla vita di tutti i giorni
La distanza ottenuta mettendo in fila i gratta e vinci
4. Cosa ti è sembrato difficile all'inizio ma poi sei riuscito a capire?
Le formule
5. Hai cambiato il modo in cui pensi al caso o alla fortuna grazie a questo percorso?
Sì ho cambiato idea
Sapevo già che la fortuna non esiste, ma che è tutto casuale
Credo ancora che la fortuna esista
6. In quali altri ambiti scolastici o della vita pensi che potrai usare ciò che hai imparato sulla probabilità?
Giochi da tavolo
Verifiche
Sport
7. Cosa ti piacerebbe approfondire se continuassimo a parlare di probabilità?
Applicazioni della probabilità alla vita reale

Dalle risposte fornite dagli studenti emergono diversi spunti di riflessione. In primo luogo, si osserva un forte gradimento per la metodologia laboratoriale arricchita dal gioco, infatti la maggioranza degli alunni indica l'attività della probabilità in giallo come la più interessante, sottolineando l'importanza di mettere in pratica i concetti teorici per favorirne la comprensione.

Un secondo aspetto riguarda il cambiamento della percezione del caso, le risposte, infatti, evidenziano come molti studenti abbiano compreso concetti che inizialmente potevano sembrare contro intuitivi. *Questo indica che il percorso è riuscito a scalfire alcuni dei bias citati in precedenza [24], portando gli studenti a riflettere in modo più razionale sull'argomento. Nonostante ciò, si nota che permangono alunni con la convinzione che la fortuna esista, a dimostrazione che determinate credenze siano difficili da superare in tempi brevi.*

Infine, *si nota una consapevolezza sul legame della probabilità con la vita quotidiana indice del fatto che gli alunni siano riusciti ad uscire da una concezione astratta e teorica della matematica con applicazioni pratiche di quanto appreso.* Visto che parte delle risposte raccolte in questa fase coincidono con quelle fornite durante l'attività di autovalutazione, maggiori dettagli saranno forniti nelle sezioni successive.

4.2.8 Verifica in classe

Gli esiti della verifica in classe sono riportati nella tabella 14 e nel grafico mostrato nella figura 68: in verticale è riportato il numero degli alunni (non è identificativo del numero del registro degli studenti, le prove sono state inserite in ordine casuale) mentre in orizzontale il numero dei quiz con il corrispondente risultato. A fianco al numero del quesito è indicata la risposta corretta, mentre per ogni alunno è stata inserita la risposta data alle varie domande. Le tre domande finali sono state eliminate dalla prova dato l'inserimento di quesiti simili nella successiva autovalutazione.

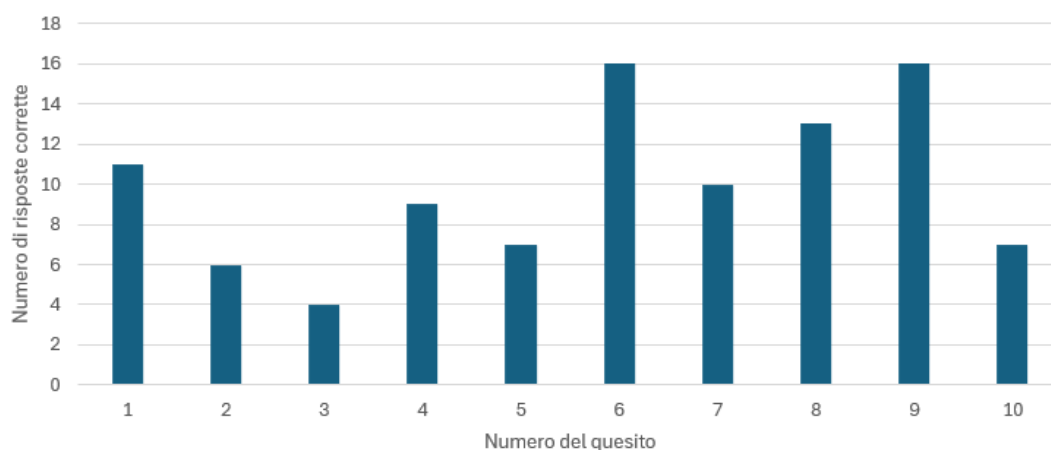


Figura 68: Grafico: risultati della prova finale.

Tabella 14: Risultati della verifica finale.

Alunni	1 A	2 C	3 B	4 A	5 A	6 B	7 B	8 A	9 B	10 D	Tot
1	0 B	1 C	0 A	1 A	0 B	1 B	1 B	1 A	1 B	0 C	6
2	1 A	0 B	1 B	0 D	1 A	1 B	1 B	0 C	1 C	1 D	7
3	0 B	0 B	0 A	1 A	0 B	1 B	1 B	1 A	1 B	0 B	7
4	1 A	0 B	0 A	1 A	0 C	1 B	0 A	0 D	0 D	0 B	3
5	0 C	1 C	1 B	0 B	1 A	1 B	0 C	1 A	1 B	0 B	6
6	1 A	0 B	0 A	1 A	0 B	1 B	0 A	1 A	1 B	1 D	6
7	0 C	0 B	0 A	0 B	1 A	1 B	0 A	1 A	1 B	1 D	5
8	1 B	1 C	1 B	1 A	1 A	1 B	1 B	1 A	1 B	0 B	9
9	1 A	1 C	0 A	0 B	0 B	1 B	1 B	1 A	1 B	1 D	7
10	0 C	0 B	0 D	0 B	0 B	1 B	1 B	0 D	1 B	0 C	3
11	1 A	0 B	0 C	0 D	1 A	1 B	0 C	1 A	1 B	0 B	5
12	0 B	0 B	1 B	1 A	1 A	1 B	1 B	1 A	1 B	1 D	8
13	1 A	1 C	0 A	1 A	0 B	1 B	0 A	1 A	1 B	0 C	6
14	0 B	0 B	0 C	0 B	0 D	1 B	0 C	0 C	0 C	0 B	1
15	0 B	0 B	0 C	0 B	0 D	0 A	0 D	1 A	0 D	1 D	2
16	1 A	1 C	0 D	0 B	0 C	0 D	0 C	0 B	1 B	0 B	3
17	1 A	0 B	0 A	1 A	1 A	1 B	1 B	1 A	1 B	0 B	7
18	1 A	0 B	0 C	0 D	0 B	0 C	1 B	0 B	1 B	0 B	3
19	1 A	0 A	0 C	1 A	0 B	1 B	1 B	1 A	1 B	1 D	7
Tot	11	6	4	9	7	16	10	13	16	7	/

I dati vengono analizzati seguendo quattro parametri:

1. **Alfa di Cronbach** [42]: è un coefficiente che misura la coerenza interna di un test e dimostra se tutti i quesiti di una prova sono correlati tra di loro; il suo valore è compreso tra 0 e 1. I test che misurano un solo fattore tendono a raggiungere risultati di alfa alti, mentre i test che misurano vari fattori abbassano naturalmente questo coefficiente [41]. Questo si spiega perché, dato che l'Alfa misura la coerenza di un test, se la prova è monofattoriale (ovvero misura una sola conoscenza, competenza o abilità degli studenti) le risposte saranno fortemente correlate tra di loro e il coefficiente si alzerà, mentre se il test misura più aspetti indipendenti tra di loro, le risposte saranno meno correlate provocando un naturale abbassamento dell'Alfa. Infatti, è intuitivo comprendere che, se la prova analizza un solo fattore, chi è preparato risponderà tendenzialmente bene a quasi tutte le domande, mentre chi non lo è andrà male sull'intero test generando la forte coerenza che fa alzare l'Alfa di Cronbach.

La formula per calcolare il coefficiente è la seguente [41]:

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum_i \sigma_i^2}{\sigma_{tot}^2} \right) \quad (12)$$

dove:

- α : coefficiente Alfa di Cronbach;
- n : numero totale di risposte nel test;
- σ_i^2 : varianza della singola domanda;
- σ_{tot}^2 : varianza dei punteggi totali.

In base al valore dell'Alfa di Cronbach che si ottiene possiamo ottenere quattro differenti casi:

- $\alpha \leq 0,59$: coerenza interna inadeguata;
- $0,60 < \alpha < 0,69$: coerenza interna sufficiente;
- $0,70 < \alpha < 0,89$: coerenza interna buona;
- $\alpha \geq 0,90$: coerenza interna ottima.

2. **Indice di difficoltà (P)** [40]: si calcola come il rapporto tra le risposte corrette (R) e il totale delle risposte (T), indica quanto una domanda è risultata difficile per gli studenti.

$$P = \frac{R}{T} \quad (13)$$

In base al risultato di P che si ottiene è possibile ottenere tre differenti casi:

- $20\% < P < 90\%$: la domanda è accettabile, il livello è considerato adeguato (tra 40% e 60% è un valore ottimale);
- $P < 20\%$: la domanda è troppo difficile;
- $P > 90\%$: la domanda è troppo semplice.

3. **Indice di discriminatività (DI)**[40]: indica la capacità di una domanda di distinguere gli studenti più competenti da quelli meno competenti. Si calcola come:

$$DI = \frac{UG - LG}{n} \quad (14)$$

dove:

- **UG**: numero di risposte corrette date dal gruppo di studenti più competenti (27% delle valutazioni più alte considerate sull'intera prova);

- **LG**: numero di risposte corrette date dal gruppo di studenti meno competenti (27% delle valutazioni più basse considerate sull'intera prova);
- **n**: numero di studenti che costituiscono ciascuno dei due gruppi di studenti.

In base al risultato di DI che si ottiene possiamo ottenere quattro differenti casi [44]:

- $DI \geq 0,40$: la domanda è discriminante;
- $0,30 \leq DI \leq 0,39$: la domanda è discriminante, ma eventualmente necessità di una piccola revisione;
- $0,20 \leq DI \leq 0,29$: la domanda è scarsamente discriminante, necessità di essere revisionata;
- $DI \leq 0,19$: la domanda non è discriminante.

In aggiunta alla formula appena mostrata, è possibile utilizzare anche la *correlazione punto-biserial* che si ottiene mettendo a confronto i risultati ottenuti da tutti gli studenti [41]. A differenza della formula 14, questa seconda formulazione è più accurata e considera anche la parte intermedia degli studenti che vengono necessariamente eliminati dall'espressione più semplice. Risulta importante comunque specificare che la formula 14 risulta maggiormente utilizzata in ambito scolastico data la sua semplicità di calcolo. La formulazione della correlazione punto-biserial è la seguente [41]:

$$r_{p-bis} = \frac{\bar{x}_e - \bar{x}_t}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{1-p}} \quad (15)$$

dove:

- **r_{p-bis}**: coefficiente di correlazione punto-biserial;
- **$\bar{x}_e$** : media dei punteggi totali ottenuti dai soggetti che hanno risposto correttamente alla domanda;
- **$\bar{x}_t$** : media dei punteggi totali ottenuti dall'intero campione di soggetti;
- **σ** : deviazione standard dei punteggi totali di tutto il campione;
- **p**: proporzione di risposte corrette (indice di difficoltà P);
- **1 - p**: proporzione di risposte errate.

In base al risultato di r_{p-bis} che si ottiene possiamo ottenere tre differenti casi:

- $r_{p-bis} \geq 0,20$: buona discriminatività;
- $0,15 < r_{p-bis} < 0,20$: discriminatività debole;
- $r_{p-bis} \leq 0,15$: discriminatività scarsa.

4. **Indice di attrattività del distrattore** [41]: l'analisi dei distrattori permette di verificare la plausibilità delle alternative errate. Una risposta è considerata un distrattore efficace quando presenta una distribuzione omogenea delle risposte non corrette, evitando distrattori nulli perché troppo poco plausibili o anomali perché eccessivamente attraenti per gli studenti. Con il termine omogenea si intende che gli errori commessi devono essere equamente distribuiti tra tutte le opzioni possibile, come indice dell'oggettiva plausibilità delle alternative proposte. Permette di dettagliare maggiormente quanto dedotto a livello generale dall'alfa di Cronbach. Per verificare l'efficacia dei distrattori si calcola la loro frequenza relativa rispetto il totale delle risposte:

$$f_d = \frac{n_d}{N} \quad (16)$$

dove:

- f_d : indice di attrattività del distrattore;
- n_d : numero di studenti che hanno scelto quel distrattore;
- N : numero totale di studenti che hanno risposto alla domanda.

Calcolo dell'Alfa di Cronbach

Il calcolo dell'Alfa di Cronbach è stato eseguito tramite un foglio Excel ed ha riportato un valore di 0,60, il numero considerato si trova esattamente al limite tra una coerenza inadeguata e sufficiente. Questo dato mostra, quindi, una coerenza interna non ottimale indicando la possibile necessità di dover rivedere la prova, ma risulta importante, in ogni caso, anche analizzare il motivo di questo valore che può essere stato abbassato da vari fattori.

La prova di verifica considerata nella presente tesi, pur riguardando un argomento specifico, contiene al suo interno una lieve eterogeneità data dalle diverse categorie a cui appartengono le domande, questo comporta un abbassamento fisiologico del valore di Alfa [41].

Successivamente è possibile notare che il numero di quesiti della prova non è elevato, questo imprime un'ulteriore riduzione al valore di Alfa [42].

Questi aspetti verranno discussi successivamente nella sintesi del presente capitolo.

Calcolo dell'indice di difficoltà, dell'indice di discriminatività e della correlazione punto-biserial.

Nella tabella 15 sono riportati i risultati calcolati dell'indice di difficoltà, della discriminatività e della correlazione punto-biserial. I calcoli sono stati eseguiti su Excel.

Tabella 15: Sintesi dei parametri di analisi delle domande: difficoltà, discriminatività, correlazione punto-biserial.

Domanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,58	0,32	0,21	0,47	0,37	0,84	0,53	0,68	0,84	0,37
DI *	0,20	0,00	0,60	0,60	0,80	0,60	0,80	0,60	0,60	0,40
r_{p-bis}	0,29	0,31	0,56	0,50	0,54	0,52	0,49	0,60	0,66	0,28

**In presenza di punteggi uguali sulla soglia di separazione dei gruppi estremi, si è proceduto a selezionare solo il primo valore, dato l'inserimento casuale degli studenti nell'elenco, al fine di mantenere bilanciata la numerosità dei gruppi superiore e inferiore.*

Sulla base dei dati riportati nella tabella 15, è possibile procedere a un'analisi delle caratteristiche delle singole domande che compongono la prova:

- **domanda 1:** difficoltà equilibrata ($p = 0,58$) e discriminazione discreta ($DI = 0,20$; $r_{p-bis} = 0,29$), la domanda distingue con sufficiente accuratezza gli studenti in base al loro livello;
- **domanda 2:** quesito con difficoltà medio-alta ($0,53$), ma discriminatività nulla ($DI = 0,00$). Anche il valore di $r_{p-bis} = 0,31$ indica una discriminatività molto bassa, indicando che la domanda non separa correttamente i livelli estremali degli alunni;
- **domanda 3:** è il quesito più difficile ($p = 0,21$) e la r_{p-bis} alta ($0,56$) dimostra che distingue bene tra i rispondenti. La domanda non presenta particolari difficoltà, ma probabilmente la formulazione del quesito (“Qual è la probabilità di NON ottenere...”) può aver tratto in inganno gli alunni;

- **domanda 4:** è un quesito di difficoltà equilibrata ($p = 0,47$), ma mantiene una capacità discriminativa alta ($DI = 0,60$; $r_{p-bis} = 0,50$);
- **domanda 5:** è un quesito di difficoltà media ($p = 0,37$) e discriminazione solida ($DI = 0,80$; $r_{p-bis} = 0,54$), la domanda distingue con accuratezza gli studenti in base al loro livello;
- **domanda 6:** quesito con facilità alta ($p = 0,84$), ma ottima discriminatività ($DI = 0,60$; $r_{p-bis} = 0,52$), indicando che gli errori sono concentrati nel gruppo di alunni che ha ottenuto un risultato basso;
- **domanda 7:** difficoltà equilibrata ($p = 0,53$) e discriminazione solida ($DI = 0,80$; $r_{p-bis} = 0,49$), la domanda distingue con accuratezza gli studenti in base al loro livello;
- **domanda 8:** la facilità è alta ($p = 0,68$), ma mantiene una discriminatività molto alta ($0,60$) dimostrando che l'errore è legato a risultati in generale non ottimali;
- **domanda 9:** è il quesito più semplice della prova ($p = 0,84$), ma anche in questo caso è possibile legare l'errore a risultati complessivi bassi ($r_{p-bis} = 0,66$). La facilità di questa domanda deriva dalla sua forte relazione alla realtà quotidiana e al fatto che possa essere considerata una domanda non strettamente legata alla matematica;
- **domanda 10:** quesito di difficoltà media ($p = 0,37$) e discriminazione discreta ($DI = 0,40$; $r_{p-bis} = 0,28$), la domanda distingue con sufficiente accuratezza gli studenti in base al loro livello.

In conclusione, la prova evidenzia una buona formulazione e la media degli indici di difficoltà ($0,53$) indica che la verifica ha una complessità adeguata al gruppo classe e i buoni valori di discriminatività nella quasi totalità dei quesiti rendono il test uno strumento affidabile per la misurazione delle competenze oggetto di studio della presente tesi. Nello specifico, la metà dei quesiti mostra indici di discriminazione ottimi con particolare riferimento ai numeri 5 e 7, le domande 6 e 9 sono molto semplici e permettono a tutti gli studenti di dare qualche risposta corretta ed infine il quiz 2 mostra parametri problematici dando indicazione di dover revisionare il quesito per una futura applicazione.

Calcolo degli indici di attrattività dei distrattori

Nella tabella 16 sono riportati i risultati del calcolo dell'indice di attrattività dei distrattori. I calcoli sono stati eseguiti su Excel.

Tabella 16: Distribuzione delle risposte per domanda.

Domanda	1 A	2 C	3 B	4 A	5 A	6 B	7 B	8 A	9 B	10 D
A	0,53	0,05	0,42	0,47	0,37	0,05	0,21	0,68	0,00	0,00
B	0,32	0,63	0,21	0,37	0,42	0,84	0,53	0,11	0,79	0,47
C	0,16	0,32	0,26	0,00	0,11	0,05	0,21	0,11	0,11	0,16
D	0,00	0,00	0,11	0,16	0,11	0,05	0,05	0,11	0,11	0,37

Di seguito viene presentata l'analisi dettagliata per ogni domanda, incrociando i dati con gli indici calcolati nel paragrafo precedente:

- **domanda 1:** la frequenza della risposta corretta A (0,53) è in linea con una difficoltà equilibrata ($p = 0,58$). Il distrattore B risulta adeguato (0,32), indicando che ha attratto una parte significativa degli alunni ed è stato scelto per un errore di calcolo: gli alunni hanno calcolato la probabilità sottraendo dal totale le quattro palline blu. Le risposte C e D non sono risultate particolarmente attrattive;
- **domanda 2:** qui si osserva un'anomalia perché la risposta B (0,63) ha attirato la maggioranza degli studenti. Questo spiega $DI = 0,00$ perché, quando un distrattore è scelto con maggiore frequenza rispetto alla risposta corretta la domanda perde la sua capacità discriminativa. Questa problematica può essere dovuta alla difficoltà di comprendere la differenza tra certo e possibile a livello matematico;
- **domanda 3:** la risposta A (0,42) ha attirato gli studenti più della risposta corretta. Come ipotizzato in precedenza, la formulazione negativa della domanda ha probabilmente indotto in errore gli alunni più disattenti;
- **domanda 4:** il quesito presenta una maggioranza di risposte corrette (0,47), ma il distrattore B ha comunque raggiunto valori elevati (0,37). Nonostante questo, la discriminatività è alta ($DI = 0,60$) indice della capacità di selezionare il livello degli studenti. In questo caso, l'errore è immediato da comprendere: nella risposta B si chiedeva il calcolo della probabilità di pescare a caso un numero primo da 1 a 10, se tra questi si considera anche l'1 (errore comune nella scuola secondaria di primo grado), è facile cadere in errore e selezionare questa alternativa come la più valida;

- **domanda 5:** nonostante la risposta B (0,42) sia stata scelta più della risposta corretta A (0,37), la domanda mantiene un alto indice di discriminatività ($DI = 0,80$) indicando che la scelta corretta è stata selezionata solo dagli studenti migliori. In questo quesito si può ipotizzare che gli studenti abbiano selezionato la B perché al denominatore è presente il numero 10, valore corrispondente alle carte di bastoni nel mazzo;
- **domanda 6 :** è una domanda molto semplice quindi la maggior parte degli studenti ha dato la risposta corretta (0,84). Le altre risposte risultano deboli e considerando anche l'alta discriminatività, viene confermato che le risposte errate si concentrano nella fascia di studenti più deboli;
- **domanda 7:** la distribuzione delle risposte è equilibrata. Questo indica che i distrattori sono stati in grado di attirare in modo omogeneo gli studenti;
- **domanda 8:** è una domanda semplice (0,68) e i distrattori sono equamente distribuiti. È possibile fare le stesse considerazioni descritte nella domanda 7;
- **domanda 9:** è un quesito semplice, la risposta corretta è stata selezionata dalla maggior parte degli studenti (0,79). La risposta A (0,00) non è stata scelta da nessun alunno, probabilmente a causa dell'ovvietà della formulazione;
- **domanda 10:** il distrattore B ha ottenuto la frequenza più alta (0,47), ma la discriminatività buona indica che il quesito è riuscito comunque a selezionare le fasce di livello. Per questa domanda era ipotizzabile un'alta percentuale di errori a causa delle difficoltà degli studenti di comprendere la legge dei grandi numeri.

Per concludere e sintetizzare tutti i risultati trovati nelle precedenti sezioni è necessario analizzare punti di forza e punti critici del test in oggetto. *Il dato negativo più rilevante è rappresentato dalla media delle valutazioni complessive che si attesta a 5,21* e come già anticipato in precedenza, tale risultato può essere giustificato da alcune osservazioni già fatte in precedenza. Inoltre, nonostante il progetto sia stato molto apprezzato dagli alunni, la natura completamente laboratoriale unita al tempo ridotto di svolgimento, ha portato all'acquisizione di competenze più generali, ma probabilmente non adeguate al superamento di un test. Citando l'articolo di Black e Wiliam [43], gli autori dimostrano che la valutazione è uno dei motori principale per l'innalzamento degli standard didattici,

la percezione del test come attività finale priva di voto ha probabilmente innescato un lieve disimpegno generale.

La coerenza interna misurata tramite l'Alfa di Cronbach risente di una lieve eterogeneità della prova e del numero basso di quesiti. In ogni caso, la prova finale ha avuto una buona capacità discriminatoria come indicato dagli indici di discriminatività e ha reso possibile l'osservazione di strategie spontanee degli studenti in assenza della pressione del voto.

In conclusione, l'analisi suggerisce che l'apprendimento della probabilità richieda una simbiosi maggiore tra la fase didattica di apprendimento e quella di valutazione finale, oltre ad una moderata revisione di alcuni quesiti.

4.2.9 Compito per casa

Gli studenti, sotto la guida della Prof.ssa Luciana Di Giuseppe, hanno prodotto un testo lavorando in gruppo e seguendo la traccia proposta in classe all'interno del presente progetto. Di seguito si riporta integralmente il testo formulato dagli studenti:

VINCITA O ILLUSIONE?

Molti nostri coetanei, e non solo, pensano che il gioco d'azzardo possa essere un modo facile per guadagnare soldi velocemente. In Tv o sui social sembra che basti un colpo di fortuna per svoltare e diventare ricchi senza fatica. In effetti, è facile cadere nell'illusione di poter diventare ricchi in poco tempo e, all'inizio, ci credevamo anche noi. Grazie alle attività svolte in classe con Letizia, una tirocinante dell'Università di Modena e Reggio Emilia, e alle successive riflessioni abbiamo cambiato idea: ci siamo resi conto che affidarsi al gioco d'azzardo non è affatto una buona strategia e vorremmo spiegare il perché. Il gioco d'azzardo non è un modo sicuro né intelligente per guadagnare denaro. Le vincite, infatti, dipendono solo dalla fortuna e non dall'abilità del giocatore: questo significa che nessuno può controllare davvero il risultato. Inoltre, le probabilità di perdere sono molto più alte di quelle di vincere, perché i giochi sono pensati apposta per far guadagnare chi li organizza. Durante i laboratori abbiamo analizzato la matematica del gioco e i dati sono impressionanti. Molti studi dimostrano che la probabilità di essere colpiti da un meteorite (circa 1 su 140 mila) è molto più alta di quella di vincere, per esempio, al Superenalotto, che è appena 1 su 622 milioni. Nel lungo periodo, chi gioca finisce quasi sempre per spendere più soldi di quanti ne ottenga. Il giocatore medio, infatti, perde circa 366 euro all'anno. Il denaro perso non può essere recuperato facilmente, perché ogni giocata è indipendente da quella precedente e non esiste la certezza di vincere "prima o poi". Il desiderio di vincere

può spingere a giocare sempre di più, anche dopo molte perdite. In questo modo il gioco può trasformarsi in una vera e propria dipendenza, che porta problemi economici e personali molto difficili da gestire. Qualcuno potrebbe dire che ogni tanto si può vincere e quindi guadagnare qualcosa. Questo è vero, ma si tratta di casi rari e imprevedibili. Non ha senso basare il proprio guadagno su qualcosa di incerto come la fortuna. Per tutte queste ragioni, il gioco d'azzardo non è una buona strategia per guadagnare. Le probabilità sono contro il giocatore e i rischi sono troppo alti. É meglio puntare su attività più sicure e utili per il nostro benessere, come studiare, impegnarsi nel lavoro e imparare a risparmiare, perché queste sono azioni che portano benefici reali nel tempo. Ci auguriamo che queste nostre parole facciano riflettere anche i nostri coetanei e li aiutino a fare scelte migliori.

Gli studenti, partendo dalla traccia fornita, hanno elaborato un testo originale prendendo come base gli argomenti discussi in classe ed integrando con riflessioni personali. Questo brano dimostra che il percorso ha permesso agli alunni di passare dall'idea ingenua del guadagno facile alla consapevolezza che i giochi d'azzardo sono progettati matematicamente per far vincere chi li organizza, aspetto non semplice da dimostrare date le forte influenze sociali implicate. Un altro passaggio fondamentale da segnalare è stato l'acquisizione del concetto che la probabilità non ha memoria, scrivendo che ogni giocata è indipendente da quella precedente e che non esiste la certezza di vincere prima o poi. Hanno, inoltre, riportato adeguatamente i dati forniti durante le lezioni in classe aggiungendo anche informazioni raccolte in autonomia. Infine, l'elaborato ha messo in evidenza l'aspetto civico legato all'argomento della probabilità che ha fatto riflettere gli alunni sui pericoli reali della dipendenza dal gioco e sulle possibili perdite economiche.

4.2.10 Autovalutazione

L'autovalutazione è stata svolta tramite la piattaforma Google Moduli, le risposte e i dati sono quindi stati acquisiti in automatico dal software che ha prodotto i grafici mostrati nella seguente sezione. Le risposte alle domande libere, invece, sono state raggruppate e rielaborate per migliorarne l'interpretazione. Sono, inoltre, stati aggiunti dei grafici a torta elaborati successivamente durante la fase di redazione della presente tesi con l'obiettivo di mostrare in modo più chiaro le percentuali delle varie risposte.

Gli alunni che hanno svolto l'autovalutazione sono stati in numero pari a 19 e in merito all'analisi dei risultati presentati, è importante precisare che la rilevazione condotta non pretende di avere un rigore sperimentale assoluto perché

risente del punto di vista degli studenti che può essere alterato da vari fattori. Infatti, come riportato negli articoli di Kruger e Dunning [46] e Topping [47], vengono descritti alcuni limiti dell'autovalutazione dipendenti da bias che sono automatici negli studenti, tra questi viene messo in evidenza quello relativo ad un errato riconoscimento delle proprie capacità (chi performa meglio tende a sottovalutarsi, chi performa peggio si comporta in modo opposto). La presente attività ha quindi solo un carattere descrittivo e generale ed è utile per riflettere sull'efficacia dell'intervento didattico nel gruppo classe.

1. Competenze personali, imparare ad imparare, competenze organizzative

Competenze personali/Imparare ad imparare/organizzative

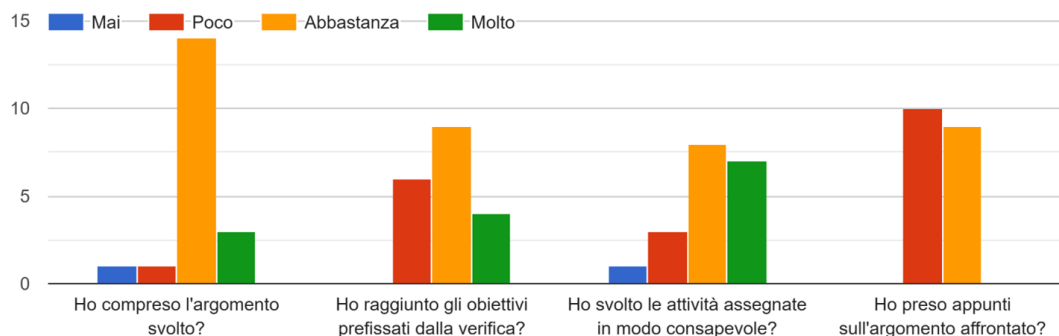


Figura 69: Grafico: competenze personali, imparare ad imparare, competenze organizzative.

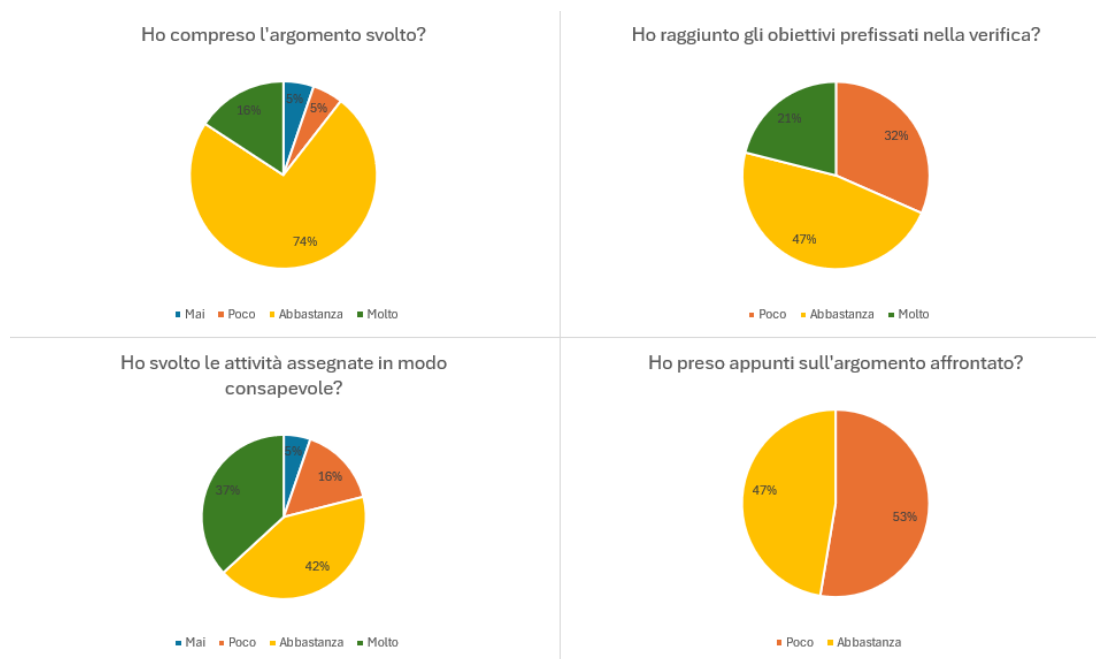


Figura 70: Grafico a torta: competenze personali, imparare ad imparare, competenze organizzative.

Dall'analisi dei grafici 69 e 70 si evidenzia un quadro positivo relativamente alla valutazione del presente progetto. Più del 70% degli alunni ha compreso l'argomento in modo pienamente sufficiente e circa il 15% ha raggiunto una comprensione eccellente, ma queste percentuali si abbassano osservando il raggiungimento degli obiettivi prefissati dalla verifica, infatti un po' meno del 70% ritiene di aver ottenuto risultati soddisfacenti. *La discrepanza tra la comprensione dell'argomento e i risultati percepiti della verifica, sono da imputare probabilmente alla durata limitata di questo progetto e ad una mancanza di preparazione per la verifica (suggerita da docenti con l'obiettivo di testare la reale comprensione dell'argomento), che avrebbe consentito agli studenti di fissare e interiorizzare maggiormente i concetti.*

Gli studenti ritengono in larga maggioranza di aver partecipato alle attività svolte in modo consapevole e questo rispecchia l'interesse e l'impegno che è stato riscontrato in classe durante lo svolgimento delle lezioni.

Va segnalato, infine, che il dato relativo alla redazione di appunti indica che la fruizione delle lezioni sia avvenuta prevalentemente per via induttiva durante lo svolgimento delle attività, infatti, più del 50% degli studenti dichiara di aver trascritto appunti in modo molto limitato.

2. Competenze sociali

Sociali

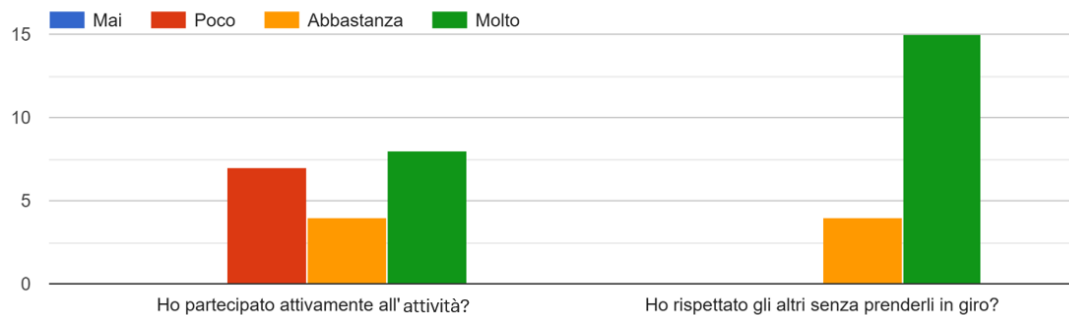


Figura 71: Grafico: competenze sociali.



Figura 72: Grafico a torta: competenze sociali.

Dall'analisi de grafici 71 e 72 è possibile estrapolare un atteggiamento positivo e partecipativo nei confronti del progetto, come già riferito nelle sezioni precedenti. Nonostante ciò, circa il 40% degli studenti riferisce di non aver partecipato in modo attivo alle lezioni: il dato coincide con quanto notato dalle insegnanti. Va segnalato, però, che questa percentuale di alunni non ha mostrato disinteresse verso la materia, ma solo un atteggiamento più riservato e meno attivo rispetto ad altri compagni di classe.

3. Gli argomenti ti sono sembrati facili o difficili?

Ti sono sembrati facili o difficili

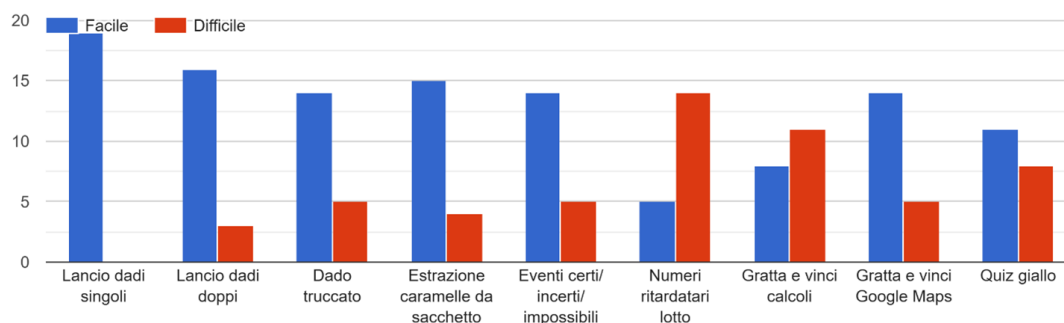


Figura 73: Grafico: gli argomenti ti sono sembrati facili o difficili?

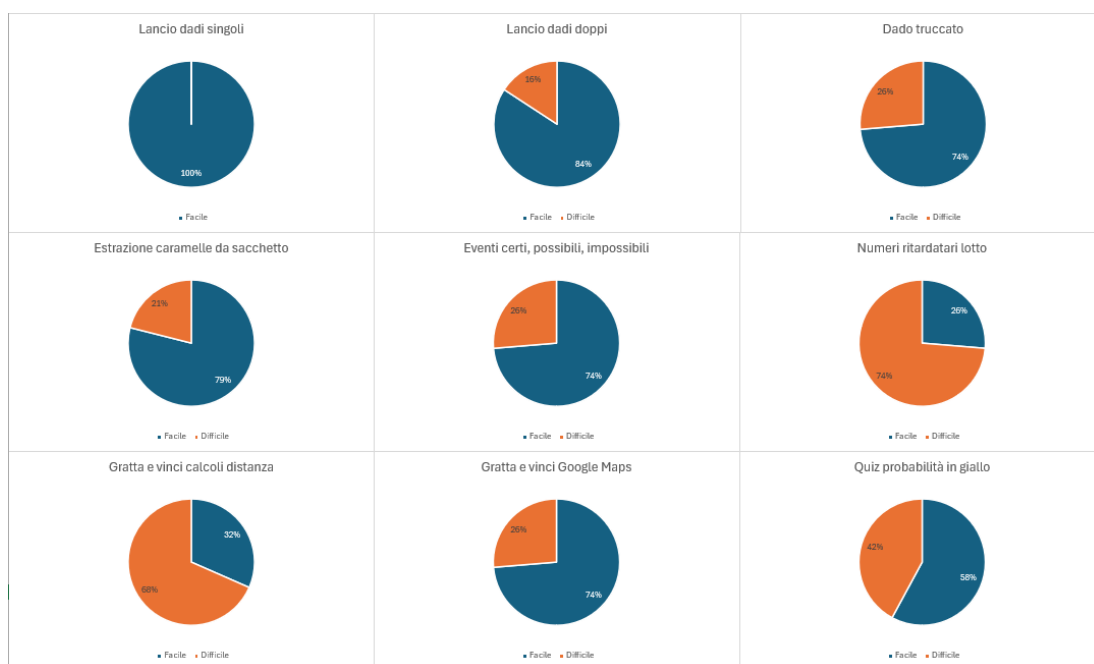


Figura 74: Grafico a torta: gli argomenti ti sono sembrati facili o difficili?

Questa domanda ha lo scopo di identificare quali attività hanno destato maggiori problematiche negli studenti.

Le attività analizzate sono state le seguenti:

1. lancio di un dado;
2. lancio di due dadi;

3. lancio del dado truccato;
4. estrazione caramelle da un sacchetto;
5. eventi certi, possibili, impossibili;
6. numeri ritardatari del lotto;
7. calcolo della distanza ottenuta mettendo in fila un certo numero di gratta e vinci;
8. trovare la distanza ottenuta mettendo in fila un certo numero di gratta e vinci su Google Maps;
9. probabilità in giallo.

Dai grafici 73 e 74 si possono trarre alcune interessanti considerazioni.

La totalità del campione ha valutato di estrema facilità l'esercizio sul lancio del dado singolo e tale riscontro è coerente con il concetto di intuizioni primarie teorizzato da Fischbein [23]. Più sorprendente appare invece il dato relativo al lancio di due dadi, percepito come semplice da oltre il 70% degli studenti che si pone in contrasto rispetto alla letteratura sul bias di equiprobabilità [18] e su quanto riscontrato in classe infatti, inaspettatamente, gli alunni hanno giudicato più complesso l'esercizio sul dado truccato rispetto a quello sulla somma di due dadi. *Tale discrepanza suggerisce la necessità di una considerazione: è probabile che il giudizio degli studenti si sia focalizzato sulla semplicità dello svolgimento degli esercizi piuttosto che sull'effettiva complessità teorica degli stessi.*

4. Sapevi già qualcosa su questi argomenti? Ti è servito per realizzare meglio il tuo lavoro?

Sapevi già qualcosa su questi argomenti

19 risposte

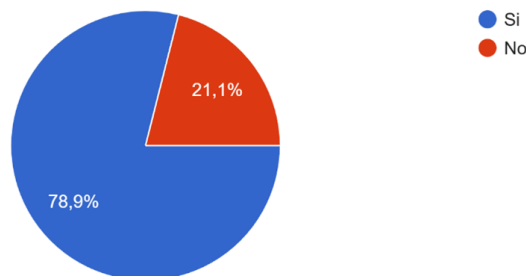


Figura 75: Grafico: sapevi già qualcosa su questi argomenti?

Ti è servito per realizzare meglio il tuo lavoro?

19 risposte

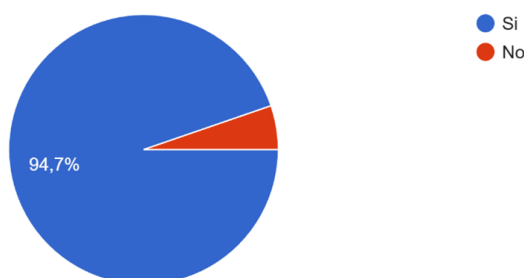


Figura 76: Grafico: ti è servito per realizzare meglio il tuo lavoro?

L'obiettivo dei grafici 75 e 76 è di mostrare la consapevolezza degli studenti sulle conoscenze e competenze possedute prima dell'inizio del presente progetto e se quest'ultime sono servite per comprendere meglio gli argomenti trattati. Nel primo grafico quasi l'80% degli studenti ha riferito di avere già conoscenze pregresse di probabilità e questo dato può essere veritiero considerando le risposte fornite nell'attività iniziale del progetto e le intuizioni primarie già presenti negli alunni [23].

Nel secondo grafico il 95% degli studenti afferma che le conoscenze pregresse fornite sono state utili per svolgere con più facilità il lavoro in classe. Questo dato è interessante perché mostra una discrepanza con quello precedente: probabilmente la seconda domanda non è stata ben compresa oppure *l'attività pratica ha favorito un processo di recupero di conoscenze latenti ovvero nozioni acquisite che però non sono direttamente accessibili o utilizzabili* [48].

5. Considera il tuo impegno e la serietà con cui hai lavorato in questi incontri. In una scala da 4 a 10 che voto ti daresti?

Considera il tuo impegno e la serietà con cui hai lavorato in questi incontri. In una scala da 4 a 10 che voto ti daresti?

19 risposte

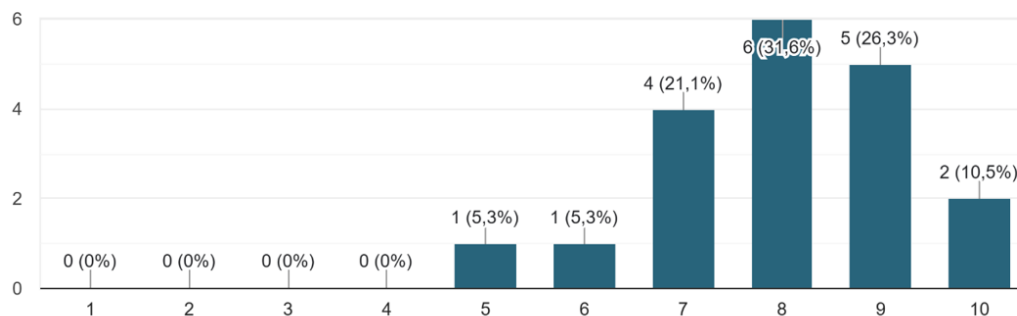


Figura 77: Grafico: in una scala da 4 a 10 che voto ti daresti?

Questo grafico rappresenta la percezione degli studenti sull'impegno mostrato durante lo svolgimento dell'attività, la domanda è in parte sovrapponibile con quella mostrata nel punto 2 relativamente alla competenze sociali. Dall'analisi dell'immagine 77 possiamo osservare che la quasi totalità degli studenti ha ritenuto di aver raggiunto una valutazione sufficiente, maggiore o uguale alla votazione di 7. Questo dato è in linea con quanto osservato dai docenti in classe e mostra un discreto interesse per la materia e l'attività proposta. *Come nei casi precedenti è necessario, comunque, prendere in considerazione la non piena oggettività dei giudizi che possono risentire del bias di errata valutazione delle proprie capacità e competenze [46] [47].*

6. Cosa ti è piaciuto? Perché?

Tabella 17: Risposte alla domanda: cosa ti è piaciuto? Perché?.

Cosa ti è piaciuto? Perché?	
Probabilità in giallo	Coinvolgente, attività di gruppo
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Sorpresa nel vedere la distanza totale
Attività ludiche (pratiche)	Maggiore comprensione della teoria
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci e attività con i dadi	/
Attività con i dadi	/
Probabilità in giallo e gratta e vinci	Maggiore comprensione della teoria
Attività con i dadi	Attività divertente
Probabilità in giallo	Coinvolgente, attività di gruppo
Attività con i dadi	Attività di gruppo
Attività con i dadi	Conoscenza pregressa dei dadi, applicazione in matematica
Attività con i dadi	Attività semplice
Probabilità in giallo	Divertimento a risolvere gli enigmi
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività originale
Probabilità in giallo	Attività di gruppo, divertimento nel trovare il colpevole
Attività ludiche (pratiche)	Attività semplici, divertenti, ideali per imparare la probabilità
Eventi certi, possibili e impossibili	Argomento semplice da capire
Probabilità in giallo	Attività in gruppo, divertimento a risolvere gli enigmi
RISPOSTA NON PERTINENTE	/

L'analisi delle risposte riportata nella tabella 17, permette di ricavare un valutazione positiva degli studenti sull'approccio laboratoriale adottato. Dalle risposte emerge una netta preferenza per le attività che hanno saputo unire la matematica ad attività più ludiche [39], in particolare, l'attività "Probabilità in giallo", è stata citata da 6 studenti. Il suo grande successo è, probabilmente, da ricercare nel coinvolgimento emotivo ottenuto mediante l'espedito del giallo da risolvere. Anche l'utilizzo dei dadi è risultata una scelta ricorrente e gli studenti ne hanno apprezzato la semplicità e la possibilità di applicare conoscenze note alla matematica. Le risposte rimanenti fanno riferimento alle attività pratiche, sottolineando il gradimento dell'approccio di tipo laboratoriale e la sorpresa nel trovare risultati inaspettati.

Risulta interessante fare un'osservazione relativa al gradimento della parte laboratoriale del progetto: *oltre il 30% degli studenti ha dichiarato che le attività pratiche hanno permesso una maggiore comprensione della teoria sottolineando anche il gradimento nella partecipazione in gruppo, questo trova riscontro nelle teorie di Bolondi [15] e dei fratelli Johnson [28] già citate nei capitoli precedenti della tesi.*

Va segnalato che una risposta è stata classificata come non pertinente, data la sua incoerenza con la domanda proposta da imputare, verosimilmente, a difficoltà linguistiche.

7. Cosa non ti è piaciuto e perché?

Tabella 18: Risposte alla domanda: cosa non ti è piaciuto? Perché?.

Cosa non ti è piaciuto? Perché?	
Nulla	Tutte le attività sono state interessanti
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività non utile per capire l'argomento
Attività con i dadi	Attività meno interessante rispetto alle altre
Parte teorica	Parte più noiosa
Probabilità in giallo	Attività difficile da capire
Eventi certi, possibili e impossibili	/
Parte teorica	Parte più noiosa
Parte teorica	Calcoli complicati
Numeri ritardatari	/
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività difficile da capire
Probabilità in giallo	Attività difficile da capire
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività difficile da capire
Parte teorica	/
Esempio del sacchetto con caramelle e cioccolatini	Attività difficile da capire
Lancio di un dado	/
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Difficoltà di calcolo
Parte teorica	Formule non completamente chiare
RISPOSTA NON PERTINENTE	/
RISPOSTA NON PERTINENTE	/

L'analisi della tabella 18 permette di individuare le principali criticità riscontrate dagli studenti. *Alcuni alunni hanno segnalato difficoltà con la parte teorica, definita spesso come noiosa e a volte poco chiara a conferma che la lezione frontale, se non supportata da una forte componente pratica,*

viene vissuta come un momento asettico e distaccato dalla realtà. Anche tra le attività laboratoriali sono emerse alcune difficoltà, in particolare riguardo all'attività di calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci, percepita come complessa o non utile alla comprensione dell'argomento della probabilità. Va segnalato che questa attività sembra essere stata ben compresa dagli studenti quando mostrata dall'insegnante, mentre le difficoltà maggiori sono emerse nel momento di lavoro autonomo; si ipotizza che questo vada impuntato al carico cognitivo di trovare la distanza su Google Maps che ha fatto allontanare gli studenti dal vero significato dell'attività proposta.

Va segnalato che, anche in questa domanda, alcune risposte sono state classificate come non pertinenti per le stesse motivazioni indicate nel paragrafo precedente.

8. Cosa sapevi?

Tabella 19: Risposte alla domanda: cosa sapevi?

Cosa sapevi?
Calcolo della probabilità
Calcolo probabilità del lancio di un dado non truccato
La fortuna è alla base della probabilità
Il gioco d'azzardo crea dipendenza
Calcolo della probabilità
Definizione di evento certo, possibile, impossibile
Calcolo della probabilità del lancio di un dado non truccato
Nulla
Aver già sentito parlare di probabilità
Calcolo della probabilità del lancio di un dado non truccato
Calcolo della probabilità del lancio di un dado non truccato
Nulla
Definizione di evento certo, possibile, impossibile
Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto
Calcolo della probabilità del lancio di un dado non truccato e dell'estrazione di una carta da poker
Calcolo della probabilità
Definizione di evento certo, possibile, impossibile
Basse probabilità di vincita nel gioco d'azzardo
RISPOSTA NON PERTINENTE

Dall'analisi delle risposte fornite dagli studenti in merito alle conoscenze pregresse sull'argomento riportate nella tabella 19 emerge un quadro molto variegato. Una parte significativa di studenti dimostra di avere conoscenze di base della matematica della probabilità soprattutto per quanto riguarda

il calcolo applicato ai dadi. Si osserva anche una consapevolezza riguardo alle implicazioni sociali della probabilità, con riferimenti al gioco d'azzardo e alle basse probabilità di vincita; infine, non è trascurabile il numero di studenti che ha dichiarato di non possedere alcuna conoscenza pregressa. *Queste considerazioni implicano la necessità di progettare un percorso che sia in grado di livellare le competenze e permettere a tutti gli studenti di acquisire almeno le basi di questa branca della matematica.*

9. Scrivi tre cose che hai imparato o che ti sono rimaste impresse.

Tabella 20: Risposte alla domanda: scrivi tre cose che hai imparato o che ti sono rimaste impresse.

Scrivi tre cose che hai imparato o che ti sono rimaste impresse		
Calcolare la probabilità	RISPOSTA NON PERTINENTE	RISPOSTA NON PERTINENTE
Probabilità in giallo	Eventi certi, possibili e impossibili	Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto
Basse probabilità di vincita nel gioco d'azzardo	Diverse formulazioni di un rapporto	Eventi certi, possibili e impossibili
Il gioco d'azzardo crea dipendenza	Probabilità in giallo	Eventi certi, possibili e impossibili
Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto	Eventi certi, possibili e impossibili	Attività con i dadi
Calcolo della probabilità	Eventi certi, possibili e impossibili	La fortuna non esiste, è tutta una questione di probabilità
Dopo ogni tiro di un dado, la probabilità che esca un determinato numero si azzerà	RISPOSTA NON PERTINENTE	Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto
Calcolo della probabilità	RISPOSTA NON PERTINENTE	RISPOSTA NON PERTINENTE
Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto	L'esistenza dei dadi truccati	Eventi certi, possibili e impossibili
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività con i dadi	RISPOSTA NON PERTINENTE

Scrivi tre cose che hai imparato o che ti sono rimaste impresse		
Collegamento della probabilità con i giochi d'azzardo	Gli eventi molto improbabili	Probabilità maggiore di essere colpiti da un asteroide rispetto a vincere al superenalotto
Calcolo della probabilità	RISPOSTA NON PERTINENTE	L'esistenza dei dadi truccati (la probabilità di uscita di un determinato numero non è 1)
Eventi certi, possibili e impossibili	Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Attività con i dadi
L'esistenza dei dadi truccati (la probabilità di uscita di un determinato numero non è 1)	Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Calcolo della probabilità
La probabilità teorica si raggiunge con molto lanci	Calcolo della probabilità di estrazione delle carte	Calcolo della probabilità
La fortuna non è casuale, ma dipende dalle decisioni di ognuno	Possibilità di applicare le conoscenze del corso alla vita reale e alle proprie passioni	La probabilità nella vita reale non è sempre affidabile
L'esistenza dei dadi truccati	Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	Probabilità in giallo
Calcolo della distanza raggiunta dai gratta e vinci	L'esistenza dei dadi truccati e formula della probabilità	Attività con i dadi
RISPOSTA NON PERTINENTE	RISPOSTA NON PERTINENTE	RISPOSTA NON PERTINENTE

Facendo riferimento alla tabella 20, si fa un'analisi di cosa è rimasto di più nella memoria degli studenti, da questi dati emerge un quadro positivo, con una netta preferenza di alcune attività rispetto ad altre. Tra gli elementi più citati dagli studenti ricorre la formulazione di eventi certi, possibili e impossibili dimostrando che i concetti sono stati ben interiorizzati dagli alunni,

Si nota, anche, una forte ricorrenza del confronto tra la probabilità di essere colpiti da un asteroide e quella di vincere al Superenalotto, *confermando che l'uso immagini sorprendenti riesce ad attivare la memoria degli studenti, come teorizzato da Khaneman [46]*. Infine, è importante sottolineare le riflessioni sul concetto di fortuna che per diversi studenti è passata da essere un'entità astratta con una componente quasi magica, ad un fenomeno con solide basi scientifiche.

Anche in questo caso, alcune risposte sono state scartate perché non pertinenti.

5 Conclusioni

La presente tesi si è configurata come un progetto preliminare per l'insegnamento della probabilità tramite un approccio principalmente laboratoriale. Questa metodologia si è rivelata essere particolarmente indicata per l'argomento che si presta ad essere applicato in tantissimi contesti reali e che, al livello di scolastico considerato, non giunge mai ad un vero e proprio approfondimento teorico.

L'atteggiamento degli alunni in classe è stato molto positivo, quasi tutti hanno mostrato interesse e curiosità verso l'argomento, impegnandosi in modo costante. Ancora una volta possiamo concludere che la scelta di introdurre il laboratorio di matematica è stata vincente per favorire l'inclusione e il coinvolgimento dei ragazzi. Le osservazioni fatte in classe dai docenti sono state corredate dai risultati dell'autovalutazione compilata dagli alunni al termine del percorso.

All'inizio del progetto, gli studenti hanno mostrato un'elevata presenza di bias di misconcezioni, rilevate durante l'attività iniziale di brainstorming, in accordo con quanto teorizzato da Ang e Shahril [24] ed, inoltre, si è evidenziata una già presente basilare conoscenza della probabilità e del concetto di "puntare su qualcosa".

Le successive attività con i dadi si sono rivelate molto divertenti e interessanti per gli studenti, che le hanno svolte con interesse e partecipazione. Si è, però, notato che non sempre gli alunni hanno compreso il significato delle consegne a loro proposte soprattutto per quanto riguarda il lancio di due dadi evidenziando una difficoltà di decodifica degli eventi composti [18]. Inoltre, si segnala una discreta difficoltà nel passare tra una rappresentazione matematica e l'altra quando si parla di probabilità.

La seppur limitata parte teorica è risultata difficile e noiosa per una piccola parte dei ragazzi, che comunque hanno mostrato di aver compreso adeguatamente il calcolo della probabilità.

Il lancio del dado truccato è stata un'attività che ha coinvolto molto la classe ed è risultata semplice per la quasi totalità degli studenti; la stessa considerazione può essere fatta anche per la sezione dedicata agli eventi certi, possibili ed impossibili. In questo caso, però è necessario fare un'importante precisazione: si è evidenziata una difficoltà nel comprendere la differenza tra un evento impossibile ed uno altamente improbabile, segnalando la tendenza degli alunni ad interpretare i concetti matematici con la propria conoscenza personale pregressa [24]. Questo aspetto è stato evidenziato anche successivamente quando gli alunni hanno dovuto giustificare la scelta della tipologia di evento o inventare un esempio a loro scelta.

Altra difficoltà riscontrata in classe riguarda la comprensione della legge dei grandi numeri che, come ipotizzato, è risultata particolarmente ostica per un grande numero di alunni che ha faticato a distinguere l'evento singolo dalla frequenza relativa sul lungo periodo. Sorprendentemente, invece, il fenomeno dei numeri ritardatari è stato agevolmente compreso.

L'attività di simulazione su Google Maps, tratta dal progetto Bet on Math [1], non si è rivelata particolarmente efficace per la costruzione del pensiero probabilistico. Gli studenti, infatti, hanno riscontrato difficoltà nel cogliere il legame concettuale tra la distanza lineare coperta dai Gratta e Vinci e l'obiettivo della simulazione; inoltre, la ricerca del punto esatto sulla mappa ha rappresentato un elemento di distrazione rispetto al focus didattico dell'esercitazione. Per queste ragioni, si suggerisce l'esclusione di tale attività dalla progettazione futura.

Infine, l'argomento degli eventi molto improbabili, ideato per scardinare l'effetto possibilità descritto da Kanheman [46] non è risultato efficace per una discreta parte di studenti che continuano a credere che la possibilità di vincita nei giochi a premi non sia così infinitesimale.

Una delle attività che ha riscontrato il maggior successo, è quella della "Probabilità in giallo" che è stata gradita dalla quasi totalità degli studenti. L'approccio giocoso e lo svolgimento a coppie ha permesso il raggiungimento di questo ottimo esito e gli alunni hanno mostrato una buona conoscenza degli argomenti trattati, necessitando di un numero esiguo di tentativi per rispondere alle domande.

La discussione finale, infine, ha permesso ai docenti di comprendere che gli alunni, seppur solo in parte, hanno cambiato la loro percezione sul caso e che alcuni bias sono stati scalfiti dal percorso proposto.

La parte più critica dell'intero progetto è rappresentata dalla verifica finale, che non ha dato i risultati sperati anche in relazione a quanto verificato con la precedente attività della "Probabilità in giallo". La media della classe è risultata insufficiente, segnale importante che gli studenti non hanno compreso e interiorizzato adeguatamente l'argomento. Questo probabilmente può essere imputato a vari fattori: il breve tempo didattico dedicato al percorso, l'approccio completamente laboratoriale senza una fase di redazione degli appunti, lo studio assente a casa e, probabilmente, anche un formulazione della prova da rivedere e migliorare. Nonostante ciò, la discriminatività dei singoli esercizi è stata buona ed ha permesso di distinguere gli alunni più competenti da quelli meno competenti. L'assenza di studio preliminare e di pressione del voto ha permesso di osservare i risultati delle strategie spontanee messe in atto dagli studenti.

Questo progetto, seppur abbia rappresentato un'ottima base di partenza per

un'applicazione futura necessiterà di alcuni miglioramenti per essere proposto al pieno delle sue potenzialità. La prima modifica sostanziale è il tempo dedicato all'attività che deve essere aumentato compatibilmente con gli altri impegni didattici; infatti, sei ore di didattica a cui si aggiungono due ore di test finale e autovalutazione, sono risultate non sufficienti ad approfondire correttamente la materia. Gli alunni perciò non hanno avuto il tempo di interiorizzare correttamente gli argomenti. Aumentando le ore a disposizione sarà quindi possibile dedicare più tempo allo svolgimento delle singole attività ed anche, eventualmente, ampliare l'offerta formativa.

Un'altra modifica importante è relativa alla attività proposte, che non sono risultate completamente efficaci per scardinare i bias e le misconcezioni presenti negli studenti. Questo implica che andranno pensate e ideate esercitazioni che mirano a far comprendere quanto la probabilità di discosta dalle nostre credenze personali.

Sarà necessario, inoltre, implementare una maggiore integrazione tra le attività di laboratorio e la successiva formalizzazione teorica, che per l'impostazione data al percorso è risultata carente. Partendo dalle attività pratiche che rappresentano una modalità eccellente per introdurre un argomento, si deve giungere alla formalizzazione più classica che, seppur ridotta al minimo, deve essere presente come già previsto dall'approccio laboratoriale. Risulta inoltre fondamentale fornire esercizi ed attività da svolgere a casa per consolidare quanto appreso in classe.

Il test finale è fondamentale sia per un'adeguata verifica della comprensione degli argomenti da parte degli studenti che per fornire un motore all'innalzamento degli standard didattici come teorizzato da Black e Wiliam [43]. Il test va rivisto in alcune sue parti data la criticità di alcune domande, è inoltre importante introdurre esercizi differenti dalla semplice risposta multipla che, seppur molto utili per effettuare valutazioni nel corso della presente tesi, non risulta un metodo completo per la corretta valutazione degli studenti.

In conclusione, questo percorso non si configura come un'esperienza isolata, ma è il punto di partenza per applicazioni future. Le criticità emerse, infatti, non mettono in discussione il valore dell'approccio proposto, ma indicano una necessità di revisione della progettazione per coniugare il coinvolgimento pratico del laboratorio matematico con i tempi necessari all'interiorizzazione della materia da parte di ciascun alunno.

A Allegati

Attività: lancio di un dado.

[illegible]

NUMERO USCITO	QUANTE VOLTE È USCITO?	QUANTE VOLTE È USCITO + 30
1		
2		
3		
4		
5		
6		
TOTALE	= 30	= 1

SPAZIO PER CALCOLI:

Figura 78: Attività: lancio di un dado.

Attività: lancio di due dadi.

SCHEDA RACCOLTA DATI – LANCIO DI 2 DADI (30 LANCI)

ISTRUZIONI:

LANCIATE 2 DADI A 6 FACCE PER UN TOTALE DI 30 VOLTE RIPORTANDO I RISULTATI NELLA PRIMA TABELLA.

AL TERMINE, COMPLETATE LA SECONDA TABELLA E GLI ISTOGRAMMI RELATIVI.

NUMERO LANCIO	NUMERI USCITI		SOMMA DEI DUE NUMERI
	COLORE DADO 1:	COLORE DADO 2:	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

NUMERO USCITO	QUANTE VOLTE È USCITO?
1	
2	
3	
4	
5	
6	
TOTALE	= 60
SOMMA USCITA	QUANTE VOLTE È USCITA?
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
TOTALE	= 30

Figura 79: Attività: lancio di due dadi

Attività: eventi certi, possibili e impossibili.

Osserva le situazioni e scrivi se l'evento è:

Possibile – Impossibile – Certo

Evento	Tipo di evento	Perché? (Scrivi una spiegazione breve)
Lanciare un dado e ottenere il numero 6		
Estrarre un re da un mazzo di carte da briscola		
Estrarre una pallina blu da un sacchetto che ha solo palline rosse		
Ottenere un numero da 1 a 6 lanciando un dado a 6 facce		
Prendere un voto da 0 a 10 nella verifica di matematica		
Trovare un unicorno nel corridoio		

Ora inventa tu un esempio possibile, uno impossibile e uno certo.

Evento	Tipo di evento	Perché? (Scrivi una spiegazione breve)
	POSSIBILE	
	IMPOSSIBILE	
	CERTO	

Figura 80: Attività: eventi certi, possibili ed impossibili.

Attività: probabilità in giallo.

CHI HA RUBATO IL TEOREMA SEGRETO?

Il Professor Gaussino, genio della matematica, ha annunciato di aver fatto una scoperta rivoluzionaria. La mattina dopo, il suo laboratorio è stato trovato sottosopra e i documenti contenenti la scoperta sono spariti!

Cinque persone erano presenti nella scuola il giorno prima. Ognuna ha un movente, ma solo uno è il colpevole. Per aiutare la polizia dovrete risolvere 15 quiz di probabilità: ogni risposta corretta vi farà ottenere un indizio. Alla fine, metterete insieme i fatti per indentificare il ladro.

SOSPETTATI

Marco: giocatore d'azzardo, amico del prof

Maria: assistente del prof, bravissima con i numeri

Mario: studente cacciato dalla scuola per truffa

Matteo: segretario ordinato e puntuale

Mara: professoressa rivale, sempre invidiosa

Quiz 1

Domanda: Qual è la probabilità di ottenere un numero pari lanciando un dado non truccato a 6 facce?

Quiz 2

Domanda: Lanci una moneta non truccata. Qual è la probabilità che esca testa?

Quiz 3

Domanda: Un sacchetto ha 3 palline rosse, 2 blu. Qual è la probabilità di estrarre a caso una pallina blu?

Quiz 4

Domanda: Prendere 11 in una verifica è un evento certo, possibile o impossibile?

Quiz 5

Domanda: In un'urna ci sono 5 palline: 2 rosse, 3 nere. Senza rimettere la prima, qual è la probabilità di estrarre a caso una pallina nera e successivamente estrarne un'altra?

Quiz 6

Domanda: Estrai a caso una carta da un mazzo da briscola. Qual è la probabilità di ottenere un asso?

Quiz 7

Domanda: Domani ci sarà il sole. Questa affermazione rappresenta un evento certo, possibile o impossibile?

Quiz 8

Domanda: Un sacchetto contiene 5 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5. Qual è la probabilità di pescare a caso un numero dispari?

Quiz 9

Domanda: Un dado non truccato ha le facce: 1, 2, 2, 3, 3, 3. Qual è la probabilità di ottenere un 3?

Quiz 10

Domanda: Lanci due dadi non truccati. Qual è la probabilità che la somma sia 7?

Quiz 11

Domanda: Ad una gara partecipano 11 persone. Qual è la probabilità che Andrea vinca se tutti i partecipanti hanno la stessa possibilità di successo?

Quiz 12

Domanda: Una ruota della fortuna ha 5 spicchi: 3 rossi, 2 gialli. Qual è la probabilità che esca giallo?

Quiz 13

Domanda: Calcola la probabilità di estrarre a caso una regina da un mazzo di carte da briscola.

Quiz 14

Domanda: Se scegli a caso un giorno della settimana, qual è la probabilità che sia un giorno feriale?

Quiz 15

Domanda: In una scatola ci sono 10 biglie: 4 rosse, 3 verdi, 3 blu. Qual è la probabilità di pescare a caso una biglia blu?

CHI È STATO?

Figura 81: Attività: probabilità in giallo.

Verifica finale.

TEST FINALE

1. Se pesco a caso una pallina da un sacchetto contenente 4 palline blu, 3 rosse e 5 verdi, qual è la probabilità di estrarre una pallina blu?
 - ☐ 1/3
 - ☐ 1/2
 - ☐ 2/3
 - ☐ 5/6

2. Un evento con probabilità 1 è:
 - ☐ Impossibile
 - ☐ Possibile
 - ☐ Certo
 - ☐ Nessuna delle precedenti

3. Qual è la probabilità di non ottenere un multiplo di 3 lanciando un dado non truccato?
 - ☐ 1/3
 - ☐ 2/3
 - ☐ 50%
 - ☐ 1/2

4. Quale di questi eventi ha una probabilità maggiore?
 - ☐ Pescare a caso un numero pari da 1 a 10
 - ☐ Pescare a caso un numero primo da 1 a 10
 - ☐ Pescare a caso il numero 7 da 1 a 10
 - ☐ Pescare a caso un numero maggiore di 8 da 1 a 10

5. Qual è la probabilità di estrarre a caso una carta di bastoni da un mazzo di carte da briscola?
 - ☐ 1/4
 - ☐ 1/10
 - ☐ 1/5
 - ☐ $\frac{1}{2}$

6. La probabilità di un evento impossibile è:

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ 0,5
- ☐ 100%

7. Lanciando un dado non truccato a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere un numero pari?

- ☐ $1/3$
- ☐ $1/2$
- ☐ $2/3$
- ☐ $5/6$

8. In una classe ci sono 12 maschi e 18 femmine. Qual è la probabilità di estrarre a caso una femmina?

- ☐ $3/5$
- ☐ $2/3$
- ☐ 18%
- ☐ $12/30$

9. Quale di questi è un evento impossibile?

- ☐ Uscire di casa e vedere una macchina
- ☐ Lanciare un dado non truccato e ottenere 10
- ☐ Pescare a caso una carta di denari da un mazzo di carte
- ☐ Vincere alla lotteria

10. Quanti lanci di un dado non truccato a 6 facce devo fare per ottenere teoricamente un 3 sapendo che la probabilità di uscita è $1/6$?

- ☐ 1
- ☐ 6
- ☐ 60
- ☐ Un numero molto grande

11. Ti è piaciuto questo corso?

12. Conoscevi già l'argomento della probabilità?

13. Cosa hai imparato?

Figura 82: Verifica finale.

Riferimenti bibliografici

- [1] *Progetto Bet On Math.*
Disponibile all'indirizzo: <https://bethonmath.polimi.it>
- [2] Comune di Modena, *“Probabilmente” insegna i rischi del gioco d'azzardo.*, 1
Giugno 2020
Disponibile all'indirizzo:
[https://archiviostampa.comune.modena.it/
archivio-comunicati-stampa/2020/6/201cprobabilmente201d-insegna-i-rischi-del](https://archiviostampa.comune.modena.it/archivio-comunicati-stampa/2020/6/201cprobabilmente201d-insegna-i-rischi-del)
- [3] Università di Trento, *Mettiamo in gioco la probabilità.*
Disponibile all'indirizzo:
[https://edulab.unitn.it/dicomat/probabilita/
mettiamo-in-gioco-la-probabilita/](https://edulab.unitn.it/dicomat/probabilita/mettiamo-in-gioco-la-probabilita/)
- [4] Università di Pavia, *Probabilità e gioco d'azzardo: conoscere per non “farsi giocare”.*
Disponibile all'indirizzo:
<https://matematica.unipv.it/pls/probabilita-e-azzardo/>
- [5] *Fate il Nostro gioco.*
Disponibile all'indirizzo: <https://fateilnostrogioco.it/>
- [6] Castelnuevo E., *La Matematica. Numeri B.*, La Nuova Italia, Gennaio 2005
- [7] Vacca R., Artuso B., Bezzi C., *Archimede. Algebra.*, Atlas, 2023
- [8] Ferri L., Matteo A., Pellegrini E., *Assi in matematica. Aritmetica 2.*, Fabbri Editore in collaborazione con Erickson, 2024
- [9] Paola D., Sibilla A., Zamboni N., *Conosco risolvo argomento. Algebra.*, Zanichelli, 2024
- [10] Bertinetto C., Metiäinen, A., Paasonen J., Voutilainen E., *Contaci!. Volume 3.*, Zanichelli, 2026
- [11] MIUR, *Nuove Indicazioni 2025. Scuola dell'infanzia e Primo ciclo di istruzione. Materiali per il dibattito pubblico.*, 2025
- [12] MIUR, *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.*, 2012

- [13] UMI, *Matematica 2001. Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica*(scuola elementare e scuola media., Ischia 15-17 novembre 2001, XXII Convegno UMI-CIIM
- [14] UMI *Riflessioni sul laboratorio di matematica.*
Disponibile all'indirizzo:
<https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>
Consultato in data: 24/04/2026
- [15] Giorgio Bolondi, *Metodologia e didattica: il laboratorio.*, 2006
- [16] D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, *Matematica per le scienze della vita. Terza edizione.*, 2015
- [17] P.Negrini, M. Ragnani, *La probabilità.*, Carocci Faber, 2005
- [18] E. Fischbein, A. Gazit, *Does the teaching of probability improve statistic intuitions?*, Educational Studies in Mathematics, Feb.1984, Vol.15, No.1, pp. 1-24, Springer
- [19] Fandiño Pinilla M. I., *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica.*, D'Amore B., La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire. Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce). Bologna: Pitagora. Pagg. 104. ISBN: 88-371-1892-9. 71-80
- [20] Dawkins R., *Il gene egoista. La parte immortale di ogni essere vivente.*, 1992, Mondadori
- [21] Bartolini Bussi M. G., Boni M., Ferri F., *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.*, 1995, Rapporto tecnico N° 21, Nucleo di ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Modena
- [22] Forehand M., *Bloom's Taxonomy.*, 2005, M. Orey (Ed.), Emerging perspectives on learning, teaching, and technology.
Disponibile all'indirizzo:
<https://cdn.vanderbilt.edu/vu-wp0/wp-content/uploads/sites/59/2010/06/12092513/BloomsTaxonomy-mary-forehand.pdf>
Consultato in data: 12/04/2026
- [23] Fischbein E., *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.*, Novembre 1977, Springer Netherlands

- [24] Ang. L.H., Shahrill M., *Identifying Students' Specific Misconceptions in Learning Probability.*, 2014, International Journal of Probability and Statistics, 3(2): 23-29
- [25] Kahneman P., Tversky A., *On the psychology of prediction.*, 1973, Psychology Review, 80, 237-251
- [26] Gillies R.M., *Cooperative Learning: Developments in Research.*, 2014, International Journal of Educational Psychology, 3(2), 125-140
- [27] Johnson D.W., Johnson R.T., Holubec E.J., *Promoting Early Adolescents' Achievement and Peer Relationships: The Effects of Cooperative, Competitive, and Individualistic Goal Structures.*, 2008, Psychological Bulletin 134(2):223-246
- [28] Roseth C.J., Johnson D.W., Johnson R.T., Holubec E.J., *Apprendimento cooperativo in classe. Migliorare il clima emotivo e il rendimento.*, 2015, Erickson
- [29] Nicolson, C. P., *Is chance fair? One student's thoughts on probability*, 2005, Teaching Children Mathematics, 12(2), 83-89
- [30] Zhu X., Simon H.A., *Learning Mathematics From Examples and by Doing.*, 1987, COGNITION AND INSTRUCTION, 4(3), 137-166
- [31] Dewey J., *Democracy and Education.*, 1916, Capitolo XI
- [32] D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica.*, 1999, Pitagora Editrice Bologna, Capito II
- [33] M.M. Bovetti, *Il calcolo delle probabilità e la teoria dei giochi. Università Bocconi - MATEPRISTEM.*
Disponibile all'indirizzo:
<https://matematica.unibocconi.eu/articoli/il-calcolo-delle-probabilit%C3%A0-e-la-teoria-dei-giochi>.
- [34] Lotterie Nazionali S.r.l. *Il miliardario maxi. Probabilità di vincita.*
Disponibile all'indirizzo:
<https://www.grattaevinci.com/classico/il-miliardario-maxi>
Consultato in data: 27/07/2025
- [35] Google Maps, *Raccolta di mappe utilizzate nel capitolo 4.2.7.*, 2025
Disponibile all'indirizzo:

<https://www.google.com/maps>

Consultato in data: Gennaio 2026

- [36] StarChild, *StarChild Question of the Month for July 1999.*, Luglio 1999, Disponibile all'indirizzo:
<https://starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/questions/question11.html>
- [37] Lottomatica-Censis, *Secondo rapporto Lottomatica-Censis. Il gioco legale in Italia. Il valore sociale ed economico del gioco.*, 21 Giugno 2023
- [38] Daniel Kanhehman, *Pensieri lenti e veloci.*, 2012, Mondadori
- [39] Dorit A., *Assessing the benefits of gamification in mathematics for student gameful experience and gaming motivation.*, July 2023, Computers and Education, Volume 200
- [40] Quaigrain K., Arhin A.K., *Using reliability and item analysis to evaluate a teacher-developed test in educational measurement and evaluation.*, 2017, Cogent Education, 4: 1301013
- [41] *La validazione delle prove dei gruppi disciplinari (TECO-D).*, ANVUR
- [42] Tavakol M., Dennick R., *Making sense of Cronbach's alpha.*, Settembre 2010, Kappan Classic, 81-90
- [43] Black P., Wiliam D., *Inside the Black Box: Raising Standards Through Classroom Assessment*, 2011, International Journal of Medical Education, 2:53-55
- [44] Ebel R. L., *Essentials of educational measurement.*, 1979, terza edizione, Englewood Cliff
- [45] Papert S., *Constructionism: A New Opportunity for Elementary Science Education.*, 1989, MIT
- [46] Kruger J., Dunning D., *Unskilled and Unaware of It: How Difficulties in Recognizing One's Own Incompetence Lead to Inflated Self-Assessments .*, 2009, Psychology, 1, 30-46
- [47] Topping, K. *Self and Peer Assessment in School and University: Reliability, Validity and Utility.*, 2003, Optimising New Modes of Assessment: In Search of Qualities and Standards. Innovation and Change in Professional Education, vol 1. Springer, Dordrecht.

- [48] Renkl A., Mandl H., Gruber H., *Inert knowledge: Analyses and Remedies.*, 1996, Educational Psychologist, 31(2), 115-121

Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia più profonda gratitudine ai miei relatori, il Prof. Andrea Sacchetti e la Dott.ssa Chiara Giberti, per avermi guidata in questo percorso, per la fiducia dimostrata e per avermi concesso l'opportunità di lavorare a questo progetto di tesi con totale disponibilità verso le mie esigenze.

Un ringraziamento sentito va alla Prof.ssa Chiara Ferrari per l'ospitalità all'interno della sua classe e per aver reso possibile lo svolgimento pratico del mio progetto donandomi parte delle sue ore di lezione.

Porgo un ringraziamento alla Prof.ssa Annalisa Ferretti e a tutti i docenti del corso di Laurea in Didattica e Comunicazione delle Scienze che si sono sempre mostrati disponibili ad ascoltare le mie necessità e guidarmi durante il percorso. Grazie ai miei genitori per avermi dato i mezzi e l'opportunità di investire sul mio futuro, per il costante sostegno pratico e per essere stati un punto di riferimento rendendo possibile questo intero percorso.

Grazie a mio marito Stefano, per essere stato la mia stabilità e il mio porto sicuro, condividendo al mio fianco ogni ansia e difficoltà.

Un ringraziamento speciale va ai miei compagni di corso e agli amici, grazie per i momenti condivisi e per i consigli che non mi sono mai mancati in questi anni di studio.

Infine, il ringraziamento più grande e profondo va al mio piccolo Tommaso. Grazie per aver avuto così tanta pazienza con la tua mamma in questo periodo così intenso e per essere stato la mia forza più grande, il motore che mi ha spinto ad andare avanti e a non mollare mai, questo successo è soprattutto per te.

Nella vita non bisogna mai rassegnarsi, arrendersi alla mediocrità, bensì uscire da quella zona grigia in cui tutto è abitudine e rassegnazione passiva, bisogna coltivare il coraggio di ribellarsi.

-Rita Levi Montalcini-