



UNIMORE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

Corso di laurea Magistrale in Matematica

Costruire i prodotti notevoli:
un confronto tra metodologie laboratoriali e tecnologie
digitali nella scuola secondaria di secondo grado

Relatrice:
Prof.ssa Chiara Giberti

Tesi di Laurea di:
Carlo Martinelli

Anno Accademico 2024 - 2025

A Leonardo,
che avrebbe tanto voluto vedere questo mio percorso, finalmente, concludersi.

Il lavoro che ha oggi un insegnante di
matematica è ricco di prospettive
originali se prende ispirazioni da
... un mondo in movimento.

Emma Castelnuovo

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1 – Evoluzione da una didattica della matematica tradizionale a una didattica laboratoriale	3
1.1 - Didattica della matematica: approccio storico in Italia	3
1.1.1 - L'insegnamento tradizionale della matematica	4
1.1.2 - Prime innovazioni nella didattica della matematica	5
1.1.3 - Dagli anni Cinquanta ad oggi	7
1.2. Emma Castelnuovo: una vita dedicata alla ricerca	8
1.2.1 - Un nuovo modo di insegnare la matematica	10
1.2.2 - La matematica come esperienza concreta	11
1.2.3 - Strumenti e ambienti di apprendimento	14
1.3 - Integrazione con le tecnologie digitali	17
1.3.1 - Didattica digitale: software didattici	18
1.3.2 - GeoGebra	19
1.3.3 - Potenzialità e problematiche dell'integrazione tecnologica	22
Capitolo 2 - Metodologia della sperimentazione	25
2.1 - Descrizione del contesto classe	26
2.2 - Strutturazione dell'esperimento didattico	29
2.3 - Descrizione delle attività didattiche	30
2.4 - Strumenti per la raccolta delle informazioni	32
2.4.1 - Il test di verifica	36
Capitolo 3 - Svolgimento della sperimentazione	43
3.1 - Fase introduttiva comune ad entrambe le classi	44
3.2 - Differenze nella mediazione didattica	46
3.3 - Lezioni nella classe 1I con approccio ispirato a Emma Castelnuovo	46
3.4 - Lezioni nella classe 1L con approccio digitale mediato da Geogebra	55
3.5 - Attività di esercitazione e consolidamento	62

Capitolo 4 - Analisi comparativa degli esiti	67
4.1 - Consegna dei test e momento di autovalutazione	67
4.1.1 - I risultati dei test	69
4.2 - Analisi dell'esecuzione degli esercizi: punti di forza e criticità	70
4.3 - Riflessione sul percorso: tra coinvolgimento e difficoltà	73
4.3.1 - Descrizione dell'atmosfera in classe	74
4.3.2 - Le criticità emerse durante il laboratorio	80
4.3.3 - Analisi delle difficoltà incontrate	83
Capitolo 5 - Discussione e conclusioni	87
5.1 - Considerazioni didattiche: vantaggi e limiti di ciascun approccio	87
5.2 - Interpretazione rispetto alle ipotesi iniziali	89
5.3 - Limiti della sperimentazione	89
5.4 - Suggerimenti per sviluppi futuri	91
Bibliografia	93

Introduzione

Da decenni ci si interroga sulle metodologie migliori e più efficaci affinché i giovani apprendano la matematica. Questo studio non pretende di dare una risposta a questa domanda, ma solamente di presentare la mia esperienza, di sperimentazione sulla didattica della matematica, all'interno di due classi prime della scuola secondaria di secondo grado.

L'argomento spinoso di questo studio riguarda il metodo più efficace di insegnare un particolare argomento matematico, paragonando i metodi più attivi e basati sull'utilizzo di materiale manipolabile, della professoressa Emma Castelnuovo, a metodologie che utilizzano software didattici moderni come GeoGebra.

Da questo studio mi aspetto che, a quest'età, circa 13-14 anni, gli studenti possano apprezzare di più il metodo più pratico della professoressa Castelnuovo, piuttosto che metodi e spiegazioni che utilizzano il computer e le moderne tecnologie, come invece potrebbero fare studenti anche di poco più grandi, nelle classi più avanzate della scuola secondaria di secondo grado.

La matematica all'interno della scuola secondaria di secondo grado non è rilevante solamente quando gli studenti apprendono le conoscenze e le abilità collegate strettamente alla disciplina, ma serve soprattutto per preparare gli studenti e le loro menti al domani. Attraverso la matematica abbiamo lo sviluppo di capacità logiche, di problem solving e di ragionamento astratto da parte degli studenti. Per questa ragione, scegliere il giusto approccio per presentare, insegnare e trasmettere i concetti collegati alla matematica è molto rilevante, poiché determina la motivazione degli studenti, il loro coinvolgimento ed impegno; di conseguenza determinando la loro capacità di capire e interiorizzare i concetti.

In questo scenario si colloca il presente lavoro, che intende indagare in maniera sperimentale l'efficacia di due approcci differenti all'insegnamento.

Da un altro lato, si prenderanno in considerazione come fulcro alcuni spunti didattici di Emma Castelnuovo, figura di rilievo nella ricerca della didattica della matematica del Novecento, che ha proposto un insegnamento fondato sull'uso di materiali concreti, sull'osservazione diretta della realtà e su attività manuali e sperimentali. Il suo

approccio, pur appartenendo a un contesto storico diverso, è ancora molto attuale per la sua attenzione alla concretezza e alla formazione intuitiva degli studenti, promuovendo in loro una partecipazione attiva, direttamente collegata all'idea del laboratorio di matematica che verrà proposto in classe.

Dall'altro lato, invece di proporre la manipolazione di materiale fisico, si proporrà agli studenti la manipolazione di figure geometriche in modalità digitale, utilizzando come strumenti didattici le nuove tecnologie digitali che l'insegnante ha a sua disposizione oggi. Mi riferisco, in particolare, ai software di geometria dinamica ed in particolar modo a GeoGebra, che verrà utilizzato per questa sperimentazione, considerato strumento importante che favorisce e potenzia le attività di esplorazione e osservazione. Questo software consente di visualizzare in modo dinamico figure geometriche e concetti, esplorare trasformazioni e relazioni in modo immediato e completamente interattivo, stimolando l'attenzione e l'interesse degli studenti ed una loro partecipazione attiva alle attività da svolgere.

Il lavoro che andrò a svolgere prevede la sperimentazione in due classi prime di scuola secondaria di secondo grado sulla didattica dei prodotti notevoli. Nella Classe A l'argomento verrà presentato utilizzando i metodi attivi ispirati dal lavoro di Emma Castelnuovo, mentre nella Classe B lo stesso argomento verrà introdotto utilizzando strumenti digitali. Una volta introdotto l'argomento, con i relativi metodi nelle due classi, agli studenti verrà somministrato un test finale per analizzare i risultati ottenuti con i due differenti approcci. I dati raccolti, sia quantitativi (il risultato del test) che qualitativi (osservazione in classe, partecipazione degli studenti ecc.), saranno poi analizzati e confrontati per rilevare eventuali differenze, punti di forza, difficoltà e potenzialità. Idealmente, si desidera riflettere su entrambi i metodi, su come si possano utilizzare al meglio per rendere l'insegnamento della matematica più motivante, interessante ed efficace.

Per svolgere queste attività, ho avuto la fortuna di avere il supporto della scuola secondaria nella quale quest'anno scolastico ho insegnato matematica e fisica: il Liceo "Enrico Medi" di Villafranca di Verona, dove la dirigenza ed i colleghi, in un clima di apprezzamento per la ricerca e la sperimentazione, hanno caldamente incoraggiato e supportato questo mio progetto.

Capitolo 1

Evoluzione da una didattica della matematica tradizionale a una didattica laboratoriale

1.1 - Didattica della matematica: approccio storico in Italia

Come nel resto d'Europa, anche in Italia, la didattica della matematica nel Settecento e nell'Ottocento era tradizionalmente teorica e prevalentemente basata sulla memorizzazione di formule, regole e teoremi. Nelle riflessioni sull'insegnamento della matematica, erano principalmente implicati i matematici delle università, i quali "miravano a progettare l'insegnamento della matematica in situazioni *generiche*, puntando l'attenzione sull'organizzazione logica dei concetti all'interno della matematica" (Arzarello et al., 2013, p.1). Nel 1867 grandi matematici come Cremona, Betti e Brioschi hanno redatto i primi programmi di matematica per tutte le scuole d'Italia. Uno dei grossi problemi, di questi primi programmi, era il fatto che, nei primi anni dall'introduzione dei programmi c'era un vuoto enorme, di 4 anni, nell'insegnamento della matematica: dopo il ciclo di scuola elementare, non veniva insegnata la matematica fino ai 15 anni quando gli studenti venivano tuffati in un corso di aritmetica razionale e geometria deduttiva. Castelnuovo (1976) critica duramente questa scelta:

Piuttosto che piegarsi ad una matematica pratica, ad una matematica in cui si vedessero le origini concrete, avevano preferito che non fosse insegnata affatto. I bambini che lasciavano gli studi dopo le elementari si sarebbero contentati del "far di conto", e gli altri, l'élite della società, si sarebbero formati dai 15 anni in un clima di purezza e rigore. (p.26)

Quello che risultava rilevante, non era quindi offrire un percorso utile, intuitivo e pratico ai ragazzi, ma, almeno fino agli inizi del secolo scorso, quello che era considerato importante per quanto riguarda la didattica della matematica nel nostro paese erano i programmi, che avevano un doppio dovere, cioè, “informare” sulla scienza matematica e anche, allo stesso tempo, “formare” le giovani menti. Le metodologie non erano particolarmente importanti, come non lo erano le questioni pedagogiche e psicologiche (Castelnuovo, 1976). Infatti, l’attenzione selettiva nei soli confronti del contenuto disciplinare non permetteva nemmeno di soffermarsi sui problemi effettivi della didattica della matematica presenti all’ordine del giorno nelle classi. Arzarello et al. (2013) scrivono al riguardo:

Le azioni della classe erano immaginate o pianificate sulla base delle difficoltà e complessità concettuali; le difficoltà cognitive, le convinzioni e gli atteggiamenti non erano ignorati ma piuttosto ridotti ai loro aspetti matematici. L’attenzione era generalmente posta sui prodotti (le prestazioni degli studenti) piuttosto che sul processo di insegnamento-apprendimento.(p.2).

1.1.1 - L’insegnamento tradizionale della matematica

Storicamente, quindi, l’insegnamento della matematica era orientato verso la lezione frontale, con una forte enfasi sulla correttezza formale, sul rigore e sulla ripetizione meccanica degli esercizi. Come indicato precedentemente, il rispetto del programma era estremamente importante. “La matematica doveva dunque avere un intento formativo, educativo, ma la formazione della mente era considerata come fine del programma e non, anche, funzione moderatrice e ispiratrice del programma stesso” (Castelnuovo, 1976, p.3).

L’impostazione era di tipo prettamente trasmissivo dove gli studenti ascoltavano e riproducevano quello che diceva il docente. Lo studente aveva un ruolo prevalentemente passivo, limitato all’apprendimento e alla memorizzazione delle regole e delle tecniche fornite dall’insegnante. Un vantaggio di questo approccio, lo si deve ammettere, era la chiarezza con cui gli studenti si avvicinavano alla matematica e la sua linearità. Con il passare del tempo, tuttavia, ne sono emersi anche i limiti: la scarsa attenzione al concetto stesso studiato, la disconnessione con le applicazioni al quotidiano e il rischio,

tutt'altro che astratto, di rendere la matematica una disciplina percepita come immaginaria e distante, non contemplata nella vita quotidiana e nella realtà. Negli ultimi decenni, invece, l'evoluzione della pedagogia ha messo in evidenza la necessità di un apprendimento attivo, in cui lo studente diventa protagonista della costruzione del sapere matematico (D'Amore & Sbaragli, 2008).

1.1.2 - Prime innovazioni nella didattica della matematica

Queste idee puriste e rigide riguardanti la didattica della matematica hanno prevalso su tutto l'insegnamento della matematica fino al 1950 circa, complici anche le due guerre mondiali. Nonostante ciò, alcuni matematici come Volterra, Enriques e Castelnuovo, all'inizio del Novecento cominciarono a capire che l'insegnamento della matematica doveva evolversi, nonostante loro non avessero alcuna esperienza di insegnamento diretta ai giovani.

Già nel 1908 a Roma, durante un Congresso della Commissione Internazionale per la Matematica, fu creata una sezione per lo studio dell'insegnamento della matematica, che successivamente prese il nome di CIEM, Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica. I programmi delle scuole secondarie superiori stabiliti dalla CIEM non furono cambiati per decenni, mantenendo l'assiomatica euclidea alla loro base. Nonostante le richieste di adeguamento dei programmi alle nuove realtà che gli allievi vivevano, come quella della sostituzione dell'attività agricola con quella industriale, oppure semplicemente riconoscendo che le difficoltà che oggettivamente gli allievi dovevano affrontare. Non fu però sufficiente e la scuola italiana, come i suoi programmi, sono rimasti bloccati durante la prima metà del Novecento, in un susseguirsi di guerre e dittature (Castelnuovo, 2008).

I programmi di Cremona andavano adattati alla società moderna e ai bisogni reali degli studenti. Non solo serviva meno rigidità, sia da parte degli insegnanti, considerati troppo formali e rigorosi, ma anche l'approccio che era da loro considerato troppo astratto mentre tralasciava i problemi concreti alla base delle teorie, che i ragazzi avrebbero compreso con più facilità e, probabilmente, con molto più interesse. Inoltre, con la nascita della psicologia, una scienza allora ancora agli albori, si auspicava che essa potesse fornire un contributo significativo alla formazione delle nuove generazioni

di insegnanti (Castelnuovo, 1976).

Questo purtroppo non è successo durante il periodo fascista poiché le attività scolastiche avevano come compito principale quello di formare cittadini patriottici e ubbidienti. L'apprendimento attivo, le ricerche pratiche e lo sviluppo della deduzione logica non erano considerate. La didattica della matematica restò quindi ferma, rigida e nozionistica, più che mai.

Dopo la fine della seconda guerra mondiale, però, il ruolo della scuola riguardante i metodi di insegnamento della matematica viene sempre più spesso messo in discussione. Il metodo esclusivamente trasmissivo andava sostituito, con un metodo più incentrato sulla partecipazione attiva degli studenti. È proprio in questi anni che per la prima volta si parla dell'unione dell'esperienza alla teoria e dello sviluppo del senso pratico degli alunni come anche della possibilità di sfruttare e sviluppare lo spirito d'iniziativa dei giovani.

In questo clima di rinnovamento e speranza, ci sono alcune timide attività di ricerca sulla didattica della matematica anche a Roma. Tra gruppi di professori che si trovavano regolarmente a casa di Federico Enriques per studiare testi del Settecento e dell'Ottocento e una assidua partecipazione di molti insegnanti alle riunioni dell'Istituto Romano di Cultura Matematica, gli insegnanti e gli studiosi trovano una nuova consapevolezza della situazione scolastica nei riguardi dell'insegnamento della matematica (Castelnuovo, 2008). Lo scopo principale di questi gruppi era “produrre esempi pragmatici di miglioramento nell'insegnamento della matematica in situazioni specifiche e focalizzava problemi concreti della didattica della matematica” (Arzarello et al., 2013, p.2).

Qui si collocano le opere di Emma Castelnuovo, tra le prime a proporre una didattica di nuova concezione in Italia, basata sull'esperienza diretta degli studenti e sull'uso di materiali tangibili. La Castelnuovo già dal 1945 comincia a cambiare modo di fare matematica nelle sue classi di scuola secondaria di primo grado.

1.1.3 - Dagli anni Cinquanta ad oggi

Alla fine degli anni Cinquanta il problema della didattica sembra venire messo da parte poiché ne sorge uno nuovo e possibilmente ancora più rilevante, riguardante quale matematica si debba insegnare. Un gruppo di matematici francesi, i Bourbakisti, affermavano che l'insegnamento della matematica doveva spostarsi dallo studio dei singoli enti, quali numero, punto, retta... a quello delle proprietà comuni a questi enti, cioè alla proprietà caratteristiche degli enti. Dopo anni e convegni, che hanno sempre visto Emma Castelnuovo partecipare, furono redatti delle avvertenze generali di larga portata, portando poi alla scrittura di nuovi programmi più dettagliati in tutto il mondo. In Italia negli anni Sessanta, il cambiamento maggiore riguarda l'introduzione delle trasformazioni nel corso di geometria. Alla fine degli anni Settanta vennero invece stabiliti dei nuovi programmi, di ampie vedute e aperture, apprezzati e ripresi da vari paesi del mondo (Castelnuovo, 2008).

Si passa, lentamente, dall'enfasi su procedimenti euristici e rigore deduttivo ad una sempre maggiore attenzione alle competenze, ai modelli applicativi e alla matematica come strumento per interpretare dati reali. Negli anni Novanta ci fu una certa proliferazione di programmi sperimentali e di dibattiti su come aggiornare i curricula di matematica. Dal 2000 nasce il piano M@t.abel, ideato e realizzato da INDIRE con il supporto del MIUR e dell'UMI. Il M@t.abel rappresenta un importante progetto italiano di formazione continua per docenti di matematica, con lo scopo di rinnovare la didattica della matematica. Infatti, insieme ai programmi, anche l'insegnamento della matematica ha attraversato una profonda trasformazione culturale e didattica. Finalmente si pongono al centro l'acquisizione di competenze intese non solo alla padronanza di procedure, ma anche come capacità di ragionamento critico e problem solving legato alla vita quotidiana.

Attualmente le Indicazioni nazionali per i licei, del DM 211/2010, rimangono il riferimento normativo principale per i piani di studio, gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per le competenze degli studenti nei licei in Italia. Una cosa che si nota subito, che rappresenta decisamente uno stacco col passato, è come queste indicazioni mettano in risalto l'importanza delle metodologie laboratoriali, quelle che rendono lo studente protagonista attivo nel suo apprendimento, insieme ai compagni di classe con i quali

può confrontarsi in modo dinamico e condividere il sapere. Per Bolondi (2016) questo è strettamente collegato al lavoro e al lascito di Emma Castelnuovo:

Non c'è dubbio che il significato di riferimento, nella scuola italiana di oggi, è stato influenzato dal pensiero e dall'azione di Emma Castelnuovo. C'era chi parlava di laboratorio di matematica in Italia cinquant'anni fa e lo faceva creando un modello che serve ancora oggi come esemplificazione del significato dell'espressione [...]. L'esperienza didattica di Emma Castelnuovo si è sviluppata per oltre cinquant'anni, attraverso discussioni, ostacoli e confronti anche accesi; ha finito per diffondersi nella pratica scolastica italiana attraverso libri, materiali, corsi. È sostanzialmente quello che emerge dall'insieme dell'attività e del pensiero di Emma Castelnuovo che viene recepito e esplicitato nei curricula italiani come significato di riferimento dell'espressione laboratorio di matematica. (p.554)

L'aula che diventa laboratorio, dove l'alunno è attivo, avanza ipotesi, ne discute con i compagni e le sviluppa insieme a loro, questo è esattamente ciò che Emma Castelnuovo ha sperimentato nelle sue classi. Sono dei momenti preziosi in cui si pratica l'argomentazione e il confronto, sia con i pari che con il docente e in cui impara anche a utilizzare le procedure d'indagine tipiche della matematica. L'attività laboratoriale offre quindi un approccio realistico alla matematica, ai problemi che necessitano di una soluzione, agli sforzi collegati, alla formulazione di ipotesi, alle verifiche, offrendo agli studenti un vero e proprio percorso di scoperta della matematica mentre ci si confronta criticamente e costruttivamente con la realtà (Bolondi, 2016).

1.2 - Emma Castelnuovo: una vita dedicata alla ricerca

Nonostante il suo lavoro non sia dei più recenti, la figura di Emma Castelnuovo è ancora oggi di particolare rilievo per chi si occupa di didattica della matematica. Lei è stata tra le prime a frequentare gli ambienti internazionali di didattica della matematica e rappresenta, per il nostro paese, la più grande ricercatrice di didattica della matematica.

Emma Castelnuovo nasce a Roma nel 1913, figlia del matematico Guido Castelnuovo. Nel 1936 si laurea in matematica e dopo la liberazione di Roma le viene assegnato un

posto nella scuola pubblica. Insegnò nella scuola media *Torquato Tasso* fino al 1979.

Dopo aver notato le difficoltà dell'insegnamento della geometria euclidea, prende ispirazione da un libro di Alexis Claude Clairaut, matematica e astronomo francese, che propone di partire dalla realtà nello studio della geometria. Dal 1945 prova a svolgere i suoi corsi con questa metodologia basata sulla realtà. Questo metodo che Emma stava introducendo a scuola ha trovato consensi ma anche dissensi, addirittura trovandosi costretta ad abbandonare una sala congressi in Francia nel 1948 dopo un suo intervento in merito poiché accusata da un matematico francese di mettere in pratica "il metodo delle mani sporche". Castelnuovo però non ha mai rinunciato poiché gli ottimi risultati che otteneva in classe le fecero capire che era la strada giusta da seguire.

Su queste prime sperimentazioni, di questo nuovo metodo, si basa la stesura di un testo di Emma per la scuola media piuttosto lontano dai programmi vigenti all'epoca: *Geometria intuitiva* pubblicato nel 1948. Questo libro rappresenterà per lei un trampolino di lancio che la porterà ai massimi livelli nell'ambito della didattica della matematica a livello internazionale. Nel 1951 viaggia a Ginevra per incontrare Jean Piaget, mentre qualche anno dopo divenne membro della CIEAEM (Commissione Internazionale per lo Studio e il Miglioramento dell'Educazione Matematica). Nel 1978 e 1989 Emma è inviata dall'UNESCO in Niger, per insegnare in una classe corrispondente alla terza media. La sua fama si consolidò in particolar modo in paesi di lingua spagnola, dove creò numerose collaborazioni e organizzò molteplici corsi di formazione per insegnanti, grazie alla sua conoscenza della lingua spagnola (Meneghini, 2013).

Da quella scelta del 1945, di tentare un nuovo metodo di insegnare geometria, Emma Castelnuovo pubblicherà libri, articoli, studierà e viaggerà, testando sempre sul campo le attività che proponeva. Importantissimo ricorda che durante una carriera così prolifica, non ha mai lasciato il ruolo di insegnante di matematica nella scuola pubblica, certa che quel luogo fosse perfetto per una sperimentazione didattica autentica ed efficace, fondata sull'ascolto degli allievi, sulla valorizzazione dei loro percorsi di pensiero e su un'attenzione costante agli errori e, soprattutto, alle loro intuizioni più di rilievo.

Nicoletta Lanciano, docente di matematica e astronomia presso l'Università "La sapienza" di Roma, sua tirocinante in classe per ben tre anni consecutivi e referente

della biblioteca di Emma Castelnuovo a Roma, la ricorda così (Castelnuovo, 2017):

Con le sue lezioni agli allievi adolescenti, e con i suoi scritti, ci ha educato ad essere ricercatori ed educatori nello stesso momento: il suo modo di guardare agli allievi uno per uno, di ascoltarli nel loro ragionare e anche nel loro sbagliare e il suo modo di valorizzarli era per noi un esempio potente che passava attraverso la concretezza prima ancora che attraverso raccomandazioni astratte. (p.10)

Durante la sua vita le vengono assegnati anche numerosi riconoscimenti: non solo riceve l'onorificenza di ufficiale della Repubblica nel 1968 ma diventa anche membro della commissione per i programmi della scuola media sia nel 1979 che nel 2000. E ancora, il 10 marzo 2009 viene insignita dell'onorificenza di Grand'Ufficiale dell'Ordine al merito della Repubblica italiana dal presidente della Repubblica Giorgio Napolitano «per la passione e l'impegno profusi nel suo lavoro, che le hanno permesso di elaborare proposte didattiche profondamente innovative. Per avere contribuito alla comprensione e all'apprendimento della matematica, stimolando l'interesse e la creatività degli alunni».

1.2.1 - Un nuovo modo di insegnare la matematica

Emma Castelnuovo aveva notato che nelle sue classi gli allievi avessero difficoltà, soprattutto con la geometria, in un momento storico dove il docente aveva un ruolo molto tradizionale e utilizzava solamente la lezione frontale. Come abbiamo visto precedentemente, una lettura di Clairnaut, *Les Eléments de Géométrie*, le offre degli spunti per cercare di proporre le stesse nozioni agli studenti in modo diverso, partendo dal concreto, dalla realtà. In questo modo Emma notò che “la realtà che ci circonda diventava più ricca; era la matematica che stimolava l'osservazione” (Castelnuovo, 2008, p.37). Ovviamente quello che ne susseguì sono risultati ottimi, alunni coinvolti, attivi e desiderosi di conoscere.

Castelnuovo (2017) capisce una cosa importantissima per la didattica della matematica:

Se si vuol suscitare interesse per la ricerca matematica, anche nei ragazzi, non si deve enunciare la proprietà e poi passare alla dimostrazione o alla verifica, perché si viene a togliere, in tal modo, la parte più suggestiva, più significativa della proprietà. Occorre invece mettere gli allievi in tale atteggiamento intellettuale da far nascere l'idea di quella proprietà. (p.110)

Come mai prima, la Castelnuovo si rivolge allo studente direttamente, chiedendogli di porsi quesiti, fare una verifica, costruire e misurare. Come afferma Nicoletta Lanciano, la Castelnuovo ci ha sempre tenuto a promuovere, per tutti, una matematica in cui non bisogna “credere” ma piuttosto osservare e sperimentare, con lo scopo di formare persone libere nel pensare (Castelnuovo, 2017).

In sostanza, Emma Castelnuovo, attraverso queste sue attività nelle classi, stava introducendo l'idea di laboratorio di matematica. Si trattava infatti di attività che mirate anche a migliorare il rapporto degli allievi con la matematica, presentando situazioni problematiche interessanti che fossero anche possibili nella realtà, problematiche che creino motivazione e che riescano a stimolare negli allievi curiosità, interesse e voglia di scoprire (Castelnuovo, 2008).

1.2.2 - La matematica come esperienza concreta

Questo approccio, basato sul “fare per capire”, tanto inedito all'epoca risulta estremamente attuale oggi. Infatti, va a rispondere ad un'esigenza tuttora fondamentale: quella di far percepire agli studenti la matematica come disciplina viva, legata alla realtà e non confinata in un insieme di formule da memorizzare. Quello che la Castelnuovo proponeva erano situazioni con collegamenti diretti alla vita reale e al concreto, per portare l'attenzione dei ragazzi su problemi reali. Per questo, Meneghini (2013) afferma che Emma è “seguace della scuola attiva di Maria Montessori e Decroly, ma ancora di più apprezza la concezione che del materiale, o meglio del ricorso all'oggetto e all'azione, ha Piaget” (p.70). Questo perché, come abbiamo visto nel secondo dopoguerra, i docenti cominciano a capire che il cambiamento nella didattica della matematica era necessario. Castelnuovo (2008) dice che:

Le considerazioni di didattica di Piaget cominciavano a “scuotere” la classe dei docenti; ci si rese conto che le difficoltà incontrate da tutti gli allievi del mondo erano dovute ad una presentazione troppo astratta e non motivata [...].ci si rese conto che [...] un insegnamento troppo ripetitivo e senza stimoli non poteva risvegliare l’interesse degli allievi [...] l’insegnamento [...] doveva partire dall’attività sul concreto, dalla realtà che ci circonda, e non limitarsi ad una descrizione verbale. (p.86)

Infatti, i cambiamenti che la Castelnuovo introduce, ci dicono che per riuscire ad attirare l’attenzione e l’interesse dei ragazzi, bisogna puntare sul concreto ed in particolar modo Castelnuovo (1976) si sofferma sul fatto che:

Il concreto dovrà avere il duplice scopo di esercitare le facoltà sintetiche e quelle analitiche...le facoltà cioè che permettono di arrivare al complesso attraverso “l’elemento”, ossia di costruire, e le facoltà che portano a discernere in un oggetto, in un “globale”, gli elementi che lo formano, che portano dunque ad analizzare l’oggetto. (p.87)

Un altro elemento di particolare rilievo del pensiero di Emma Castelnuovo, che si trova nuovamente molto vicino alle esigenze didattiche attuali è l’attenzione alla partecipazione attiva degli alunni. Nei suoi scritti emerge l’idea che lo studente debba “fare matematica” più che riceverla in modo passivo, costruendo da sé, con le proprie mani e la propria intuizione, le relazioni e le regolarità che caratterizzano i concetti matematici. I suoi metodi si sono rivelati molto efficaci per seguire un ragionamento, scoprire una proprietà, vedere e toccare aspetti della matematica presenti intorno a noi (Castelnuovo, 2017).

Emma Castelnuovo ha introdotto quindi l’aspetto più rilevante per un approccio intuitivo: il ruolo attivo dello studente, cercando di valorizzarlo al massimo. Questo approccio, oggi, viene ripreso e valorizzato anche nelle linee guida ministeriali e nei progetti di innovazione didattica, che insistono sulla centralità dell’alunno e sull’importanza di attività laboratoriali, come espresso nelle Linee Guida per l’Istruzione Tecnica e Professionale (MIUR, 2010):

Il lavoro in laboratorio e le attività ad esso connesse sono particolarmente importanti perché consentono di attivare processi didattici in cui gli allievi diventano protagonisti e superano l'atteggiamento di passività e di estraneità che caratterizza spesso il loro atteggiamento di fronte alle lezioni frontali. (p.25)

Le attività di laboratorio quindi diventano un approccio supportato e consigliato per un processo di scoperta dinamico che valorizza gli alunni e le loro idee e che trasforma l'ambiente della classe in un luogo dove lo studente può finalmente trovarsi al centro del processo di costruzione della sua conoscenza. Per Bolondi (2016) il laboratorio di matematica

non è solo un espediente didattico, un trucco di ingegneria didattica per facilitare l'insegnamento o l'apprendimento. È qualcosa che sta nel core, nel nucleo profondo del curricolo di matematica. Ha a che fare con gli obiettivi formativi che la scuola nel suo insieme (come espressione della società) si pone per gli allievi, e al tempo stesso è coerente con la visione che abbiamo della matematica come scienza. (p.556)

Proprio sulla base di queste premesse che il laboratorio di matematica è stato oggetto di una approfondita analisi e valutazione da parte della Commissione dell'Unione Matematica Italiana che ha lavorato alla stesura delle indicazioni curriculari dei nuovi programmi di matematica per la scuola secondaria, noti come Matematica per il cittadino, suddivisi nei volumi Matematica2001, Matematica2003 e Matematica2004 (Bartolini Bussi, 2007). In questi volumi, il laboratorio di matematica viene ampiamente valorizzato e descritto come segue (UMI, 2003):

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici[...]. L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante

l'esercizio di tali attività. (p.26)

Infine, l'attualità di Castelnuovo si coglie anche nella sua capacità di unire rigore e creatività. Il suo metodo non rinunciava alla precisione matematica, ma anzi mostrava come questi due opposti possano convivere, rafforzandosi a vicenda. Non disdegnava nemmeno le lezioni frontali, ma preferiva “un'oralità diretta ed efficace, senza troppe parole, senza definizioni che anticipano le scoperte e bloccherebbero il pensare in modo autonomo” (Castelnuovo, 2017, p.12).

1.2.3 - Strumenti e ambienti di apprendimento

Emma Castelnuovo era solita utilizzare materiali poveri, spesso di uso quotidiano come fili, cartoncini, specchi, metri o altri oggetti comuni. Era estremamente importante che questo materiale fosse manipolabile dai ragazzi, in modo che potessero toccare, provare, sbagliare ed sperimentare con questi oggetti. Castelnuovo (1976) indica che il materiale, dal carattere operativo “avrà lo scopo di far manipolare e costruire... perché il ragazzo verrà a scoprire, attraverso una serie continua di tentativi, quali sono le condizioni indipendenti che legano gli elementi” (p.87). Questi oggetti, che lei stessa ha potuto vedere quando siano stati efficaci nelle sue lezioni, servono per seguire un ragionamento, scoprire una proprietà, vedere e toccare aspetti della matematica presenti intorno a noi, per renderla quindi la matematica più viva e non per illustrare una teoria già data (Castelnuovo, 2017).

La Castelnuovo utilizza spesso spaghi e fili per rappresentare rette o curve, oppure per introdurre le lunghezze ed i perimetri. Gli elastici vengono utilizzati per costruire figure geometriche variabili ma anche per introdurre il concetto di invarianza. Della semplice carta, o del cartoncino, erano sufficienti per studiare aree o volumi oppure per costruire poligoni e solidi. Utilizzando una tavoletta di legno e dei chiodi, si potevano realizzare inoltre geopiani per confrontare aree e perimetri.

Castelnuovo (1976) spiega l'utilizzo di semplici stecchini, tutti uguali, per la risoluzione di un problema che richiede di disegnare un rettangolo avente la base tripla dell'altezza. Molti ragazzi utilizzano due stecchini per l'altezza e sei stecchini per la base, oppure uno per l'altezza e tre per la base. Dopo la costruzione manuale da parte dei ragazzi, si

chiede loro se riuscissero a determinare la lunghezza della base dell'altezza conoscendo il perimetro del rettangolo. Secondo Emma, dopo aver assegnato un valore al perimetro, ogni ragazzi riuscirà a dire immediatamente quale sia il procedimento da seguire per trovare le lunghezze delle due dimensioni. Questo perché, realizzando la costruzione così, in modo manuale, e non, per esempio, attraverso un semplice disegno sul quaderno, il ragazzo si rende conto della relazione della parte al tutto, si capisce che la misura dello stecchino è la chiave per risolvere il problema (Castelnuovo, 1976). Questo passare dall'elemento alla tutto, come accade con il materiale di tipo operativo "rispecchia anche la struttura della matematica, e in particolare, della matematica moderna, dove non vengono studiati gli enti in sé quanto piuttosto le operazioni che legano quegli enti" (Castelnuovo, 1976, p.87).

Proponendo tutte queste attività, la Castelnuovo aveva intuito una certa difficoltà dei ragazzi anche con la manualità, cosa che bisogna ammettere, nel mondo digitale odierno, non è mai stata così vera. Castelnuovo (2008) scrive al riguardo: "È un lavoro in cui viene evidenziata l'enorme difficoltà che incontra oggi la maggior parte degli allievi nell'uso delle mani perché ormai anche piegare un foglio di carta è un problema" (p.39). Questa osservazione, fatta negli anni Settanta, era molto forte e secondo lei questo per i ragazzi significava "perdere la possibilità` di immaginare solo il materiale, di estrarre concetti e idee nuove dal materiale, di vedere 'oltre il materiale'"(Cannizzaro & Lanciano, 2024, p.238).

Nuovamente, le attività che la Castelnuovo proponeva, aiutata dai suoi materiali poveri in questo caso, rappresentano alcuni tipici strumenti propri del laboratorio di matematica, descritti come tali anche dall'Unione Matematica Italiana (2003):

Il lavoro con fogli trasparenti, la piegatura della carta, l'uso di spilli, fogli quadrettati non dovrebbe essere considerata un'attività esclusivamente riservata ad allievi del ciclo primario; potrebbe invece costituire, per allievi del primo biennio, un significativo avvio allo studio delle isometrie, esplorate attraverso i movimenti che le determinano. Inoltre, l'uso di strumenti poveri, magari fatti costruire da gruppi di studenti, è un'attività particolarmente significativa e consona a rinforzare quell'atmosfera da bottega rinascimentale, nel senso prima detto. (p.26)

Altra forma particolare di didattica di Emma Castelnuovo, sono le Esposizioni di matematica in cui i suoi allievi diventavano “professori”. Queste Esposizioni, che potevano essere indirizzate sia ad altri allievi sia ad un pubblico più vasto, erano eventi organizzati all’interno delle scuole, infatti la prima Esposizione fu allestita proprio presso la scuola media Tasso di Roma, dove Emma insegnava, nel 1971. Solitamente questi eventi prevedevano dei tavoli con materiali concreti realizzati dai ragazzi, insieme a tabelloni con testi e immagini alle pareti. A questa prima Esposizione parteciparono ben 170 alunni e le aule occupate dai materiali e dai tabelloni furono in totale 14 (Meneghini, 2013).

Il tutto era parte della sua metodologia didattica attiva e prevedeva la creazione di ambienti di apprendimento dinamico, dove la matematica si scopriva, si discuteva e si toccava con le mani. Meneghini (2013) afferma che “l’importanza di un’esposizione è anche psicologica e sociale, ed Emma, riconosce a Piaget un contributo indiretto al suo lavoro” (p.60).

Questi tabelloni che gli alunni preparavano venivano strategicamente posizionati in modo da guidare l’esplorazione dell’Esposizione, in modo da suggerire percorsi di pensiero e domande, in modo da supportare e promuovere il discorso ed il dialogo. Leggendo alcune testimonianze di alunni che hanno partecipato alle Esposizioni di Emma da protagonisti oppure di docenti che le hanno messe in pratica, si capisce che rappresentarono un’esperienza di enorme crescita per i ragazzi. Anche i più timidi riuscivano a rispondere alle domande degli adulti, aumentando la propria autostima. Alcuni semplicemente si rendevano conto di essere fortunati a vivere la matematica in questo modo, soprattutto pensando ad amici chini sul banco a studiare regole che non capivano. Tutti però ne conservano un ricordo indelebile di soddisfazione in cui apprendimento e insegnamento si intrecciano (Cannizzaro & Lanciano, 2024).

Ovviamente questa tipologia di attività è anche un modo di responsabilizzare gli studenti, di far capire loro quanta fatica ci sia dietro un lavoro, nonostante possa essere piacevole e interessante farlo. Questo vale sia per gli studenti che per i professori, come ci ricordano Cannizzaro e Lanciano (2024), “è bene sottolineare che questa attività, come tutto l’insegnamento attivo “alla Castelnuovo”, richiede energia, determinazione e coraggio ad abbandonare “il già usato” per osare sul piano disciplinare e didattico” (p.241). Il coraggio del docente diventa quello dello studente, perché attraverso

quest'esperienza che sicuramente può intimidire, ma alla fine gli allievi sentiranno non solo di essere i protagonisti del loro apprendimento ma avranno la possibilità di condividere la soddisfazione del loro lavoro e delle loro scoperte con adulti e coetanei. Succederà, inoltre, di “scoprire la frustrazione di esporre e vedere visitatori distratti o che giudicano prima di aver ascoltato” (Cannizzaro & Lanciano, 2024, p. 242).

Come affermato precedentemente, le attività, i materiali che usava e le sperimentazioni didattiche di Emma Castelnuovo hanno contribuito non poco ad introdurre un approccio laboratoriale allo studio della matematica, in cui essa non viene più vista come un elenco di regole da memorizzare, ma come uno strumento per interpretare la realtà e risolvere problemi autentici (Castelnuovo, 1976).

1.3 - Integrazione con le tecnologie digitali

L'introduzione delle tecnologie nell'insegnamento della matematica in Italia comincia negli anni Settanta, con le calcolatrici tascabili, che cominciarono ad essere disponibili e accessibili a tutti. Inizialmente c'era chi si opponeva, affermando che i ragazzi avrebbero perso la capacità di fare di conto, ma ben presto capirono che era uno strumento che poteva facilitare la didattica della matematica, sempre se utilizzato in modo corretto ed evitandone l'uso acritico. Seguirono poi le calcolatrici programmabili ed in men che non si dica si arrivò ai personal computer (Zuccheri, 2014).

A metà degli anni Ottanta, la rivoluzione informatica era già arrivata negli uffici della pubblica amministrazione e delle aziende private; ora toccava al mondo della scuola. In quegli anni viene promosso il Piano Nazionale Informatica (PNI), il primo programma che introduceva le tecnologie del tempo in tutte le scuole del nostro paese. L'obiettivo principale era quello di formare gli insegnanti ed il primo target furono proprio i docenti di matematica e fisica delle scuole secondarie di secondo grado.

Nel 1991 viene introdotto il PNI 2 che aggiorna il precedente piano estendendolo anche alle aree umanistiche della scuola secondaria di secondo grado, mentre dal 1997 al 2000 con il Programma di Sviluppo delle Tecnologie Didattiche (PSTD) si assiste all'introduzione delle tecnologie digitali e multimediali anche alla scuola secondaria di primo grado e alla scuola primaria. Dal nuovo millennio invece si assiste ad un continuo aumento dell'utilizzo delle TIC (Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione)

in tutti ordini scolastici, ovviamente andando a pari passo con la formazione indispensabile per tutti i docenti. Tutto ciò viene incoraggiato dalla Circolare Ministeriale 152 del 2001, nella quale vengono previsti finanziamenti per la formazione del personale scolastico, la creazione di ambienti multimediali e la messa in rete degli istituti. Questo segna l'avvio della digitalizzazione di base delle scuole italiane.

Nel 2006, il Ministro della pubblica istruzione Giuseppe Fioroni introduce, in via sperimentale, l'introduzione della LIM (Lavagna Interattiva Multimediale) in circa 550 scuole del Sud Italia e delle Isole, attraverso un programma denominato "DiGi Scuola". Dal 2007, in varie fasi di ammodernamento e potenziamento, si procede ad una regolamentazione più organica con il PNSD (Piano Nazionale Scuola Digitale) entrato poi in vigore nel 2015.

L'uso delle nuove tecnologie non risulta essere una rottura con il passato, anzi, rappresenta la naturale evoluzione dell'approccio di Castelnuovo, che faceva la stessa cosa, ma con i mezzi dell'epoca. In un modo sempre più digitale, dove gli studenti sono abituati a fruire delle potenzialità del web e dove le immagini hanno un peso maggiore delle parole, l'utilizzo delle tecnologie appare strettamente collegato alla didattica della matematica.

1.3.1 - Didattica digitale: software didattici

Oltre alle calcolatrici tascabili, alle LIM e ai PC, sicuramente funzionali alla didattica della matematica, si sono aggiunti, dagli anni Ottanta in poi, vari software espressamente dedicati alla didattica della matematica, che sia algebra o geometria. Grazie anche a traduzioni e adattamenti per computer disponibili all'epoca, come l'IBM PC e il M24, alla fine degli anni Ottanta, inizia a diffondersi Logo. "Questo linguaggio è generalmente associato al concetto di "geometria della tartaruga", una prima base d'esperienza di matematica formale, pratica, accessibile e significativa"(Lanzarini, 2019, p.60). Sullo schermo, attraverso i comandi si faceva muovere una tartaruga che inizialmente era anche un robottino, il quale, posizionato sul pavimento, seguiva le indicazioni impartite dal computer. In questo modo è stato introdotto un modo del tutto nuovo di affrontare i problemi: gli studenti sono guidati a elaborare un pensiero logico e formale, talvolta lontano dall'esperienza immediata, che permette loro di arrivare in

qualche modo a un prodotto reale, anche se nelle prime fasi semplice e ancora non completo del tutto.

Un ulteriore strumento molto diffuso nel contesto educativo è stato BASIC, un linguaggio di programmazione, che si è affermato per la sua struttura estremamente intuitiva e per la facilità con cui permetteva di tradurre un algoritmo in istruzioni operative. Anche Derive, un programma di matematica, è stato molto apprezzato per la sua semplicità e facilità d'uso. Con questo software si poteva non solo per eseguire calcoli, ma anche per la rappresentazione grafica in 2D e in 3D.

Altri software degni di nota, molto utilizzati nell'ambito della didattica della matematica sono MathLab, un programma per il calcolo numerico e simbolico che permette di svolgere calcoli complessi, rappresentare dati e funzioni tramite grafici e simulare modelli matematici, incoraggiando un apprendimento più operativo e visuale dei concetti teorici. Tra i software più recenti invece abbiamo Scratch, ideato da un gruppo di programmatori del famoso MIT (Massachusetts Institute of Technology), sicuramente più adatto per la scuola primaria o la scuola secondaria di primo grado. Con Scratch, gli studenti, hanno la possibilità di potenziare le loro capacità logiche e creative, come anche il pensiero computazionale. Inoltre, si diventa creatori di storie interattive, giochi e animazioni utilizzando blocchi grafici, tutto questo senza dover conoscere alcun linguaggio di programmazione.

Non si può quindi negare che sviluppo della tecnologia ha avuto un impatto significativo anche sulla didattica della matematica. In particolare, l'introduzione di software di geometria come Cabri Geometre prima e GeoGebra poi ha reso possibile un modo di esplorare concetti matematici tutto nuovo che permette la manipolazione diretta digitale di figure e oggetti. Questi strumenti offrono agli studenti la possibilità di visualizzare trasformazioni, relazioni e proprietà in tempo reale, favorendo un apprendimento interattivo.

1.3.2 - GeoGebra

GeoGebra nasce agli inizi degli anni 2000, quando Markus Hohenwarter, scrivendo la tesi di laurea in Austria, non è soddisfatto del software in uso in quel periodo e decide di crearne uno lui stesso. Il suo obiettivo era quello di unire gli ambienti di geometria e

algebra in un unico software dinamico. Questo software è sempre stato un open-source gratuito e multi-piattaforma, cosa che sicuramente ha contribuito alla sua popolarità e al suo utilizzo su larga scala. Secondo Montone (2012) “GeoGebra nasce [...] in un clima favorevole e positivo verso i software didattici. Una tradizione pluriennale di sviluppo e di utilizzo di alcuni software di geometria dinamica, come Cabri Geometre e Geometer’s Sketchpad, ha permesso di farlo nascere e diffonderlo nel tempo storico maturo” (p.125). Senza contare che il suo utilizzo in classe viene anche supportato dalle Indicazioni Nazionali per i Licei (MIUR,2010) :

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L’insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivela opportuno, favorirà l’uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. (p.23)

GeoGebra consente sia di creare che di manipolare figure geometriche nel piano euclideo e in quello cartesiano, il tutto integrato anche con l’ambiente numerico. Inoltre, tutti i file costruiti in GeoGebra possono essere poi caricati online come applet dinamici interattivi in modo da essere visualizzati, utilizzati o manipolati dalla comunità. Infatti il software permette anche l’interazione tra studenti e insegnanti, che diventa, “una realtà concreta nel momento in cui entrambi possano interagire sul software attraverso file predisposti dall’insegnante o file prodotti dagli studenti stessi”(Montone, 2012, p. 127). Montone (2012) trova nelle connessioni, quindi non solo tra docenti e studenti o tra diversi utilizzatori a livello mondiale, una risorsa importantissima:

Punto di forza del software inoltre è la rete, in continua crescita a livello mondiale, dei GeoGebra Institute, organizzazioni a carattere non profit che riuniscono e mettono in collegamento tra loro insegnanti, studenti, sviluppatori di software e ricercatori con i seguenti obiettivi: creazione di materiale libero per l’insegnamento e la formazione degli insegnanti; seminari frontali e on-line per insegnanti; organizzazioni di competizioni per gli studenti; supporto on-line agli utenti; sviluppo di software; elaborazione di progetti di ricerca. (p.125)

La dinamicità del programma ed il fatto che renda tangibile la matematica è sicuramente il motivo per cui viene utilizzato così ampiamente. Come afferma Zuccheri (2014) “nel caso del software di geometria dinamica, molti allievi, anche i più scettici, alla fine dei corsi sembravano soddisfatti e desiderosi di saperne di più e di mettere in pratica quanto avevano appreso” (p.34).

Faggiano (2012), sostiene, che se inserite in un ambiente di apprendimento appropriato e in attività didattiche progettate in modo attento e corretto, le moderne tecnologie digitali, quindi anche programmi come Geogebra, “possono favorire il miglioramento dell’apprendimento e contribuire a costruire conoscenze, possono guidare e controllare le interazioni tra chi apprende” (p.98).

Questa tipologia di software di didattica della matematica rientra anche tra gli strumenti del laboratorio didattico proposti dall’Unione Matematica Italiana (2003):

Nell'insegnamento della geometria vengono ormai sempre più utilizzati i software di geometria (detti comunemente software di geometria dinamica), veri e propri micromondi, nei quali gli studenti possono fare esperienze, compiere esplorazioni, osservare, produrre e formulare congetture e validarle con le funzioni messe a disposizione dallo stesso software. In questo modo lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere “fatti geometrici” e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all’interno di una teoria più o meno ben precisata, perché una certa proprietà osservata vale. (p.27)

Entrare in contatto diretto con il sapere matematico si ricollega fortemente alle varie attività che Emma Castelnuovo proponeva ad alunni e docenti, come abbiamo visto precedentemente. Lei utilizzava oggetti semplici per offrire agli studenti stimoli a partire da “una manipolazione ragionata e da un’osservazione sul concreto” per attivare “quello spirito critico, tipico dell’adolescenza”(Castelnuovo,2008, p.84). Con Geogebra, tutte queste cose sono presenti, l’unica differenza è che la manipolazione è virtuale. Questo non avrebbe creato alcun problema ad Emma Castelnuovo, visto che era fermamente convinta che il risultato ottenuto da queste esperienze fosse ugualmente significativo per gli studenti, poiché “i mezzi pratici per la realizzazione delle

esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale o solamente immaginata, delle variazioni di una luce o del mutarsi di un'ombra” (Castelnuovo, 1965, p. 65).

1.3.3 - Potenzialità e problematiche dell'integrazione tecnologica

Ciò che risulta estremamente rilevante è il fatto che l'introduzione di questi software per la didattica della matematica, sia riuscita in qualche modo ad attivare nuovamente l'interesse dei ragazzi, soprattutto per questa materia che da sempre risulta poco attrattiva. Questo però ha portato con sé anche delle sfide; innanzitutto imparare ad utilizzare bene il programma, sia da parte dei docenti che da parte dei ragazzi. Inoltre, non è sempre detto che l'utilizzo di un software tecnologico garantisca l'interesse e l'attenzione degli studenti. Infatti, è importante ricordare che sebbene le tecnologie possono supportare, migliorare e sviluppare la costruzione delle conoscenze matematiche da parte degli allievi, aggiunge altre complessità che derivano dall'utilizzo di questi software. Questo sicuramente sarà una delle variabili che verrà valutata e considerata durante lo svolgimento della sperimentazione proposta in questa tesi.

Un'altra sfida per il docente è, ed è stata, sicuramente incorporare queste tecnologie nella progettazione delle lezioni. Come strumento didattico “pone sempre delle opportunità ma anche delle problematiche, in quanto si inserisce nel processo di insegnamento/apprendimento. Può essere di aiuto, ma può rappresentare anche un elemento di disturbo” (Zuccheri, 2014, p.33).

Questo sicuramente è una questione da considerare nella preparazione delle proprie lezioni da docente, decidere quindi quanto farsi “assistere” da queste tecnologie, ma, come afferma Faggiano (2012):

La costruzione di significati matematici a partire dall'uso di strumenti (siano essi classici strumenti come il compasso – usati sul quaderno o alla lavagna – o nuovi ambienti tecnologici come i software di Geometria Dinamica – usati sui PC del laboratorio informatico o in classe con la LIM), infatti, è il risultato di un processo sociale basato non solo sull'interazione della classe ma anche, e soprattutto, sulla fondamentale guida dell'insegnante. Le nuove tecnologie, infatti, forniscono delle opportunità di

cambiamento per le pratiche didattiche ma, è bene ribadirlo, non possono di per sé cambiare aspetti essenziali della didattica.
(p.100)

Capitolo 2

Metodologie della sperimentazione

L'idea di mettere a confronto due tipologie diverse di insegnamento dei prodotti notevoli in classi diverse, ma comparabili, è nata dal confronto diretto con i colleghi durante le riunioni di dipartimento, mentre si cercavano delle idee che potessero migliorare l'apprendimento, in generale, degli studenti. La matematica non è mai la materia preferita dagli studenti, anzi, ma il l'auspicio coincide con quello di Emma Castelnuovo, che ha dedicato il lavoro di una vita per rendere la matematica una disciplina più comprensibile e amata, contrastando le difficoltà, i blocchi, le bocciature e l'abbandono scolastico che spesso causa (Castelnuovo, 2017).

Visto che durante questo anno scolastico ho avuto la possibilità di insegnare in due classi prime mi è sembrata l'occasione perfetta per testare, anche se in modo limitato, quale metodologia possa essere più efficiente, tra quella che possiamo definire più "attivo", visto che comporta l'utilizzo di materiale semplice e manipolabile direttamente da parte dei ragazzi, chiedendo loro di agire in maniera concreta con questo materiale, e quella "digitale", che utilizza uno degli strumenti digitali più conosciuti ed utilizzati dai docenti di matematica: GeoGebra. L'argomento più adatto per questa prova sono i prodotti notevoli. L'obiettivo principale è, come detto, quello di riflettere sui limiti e sulle potenzialità dei due approcci, almeno in questo caso particolare, quale metodologia sia più efficace, ma anche, ed è molto importante, cercare di far capire agli studenti che esiste un modo per apprendere la matematica che va al di là del suo mero apprendimento mnemonico.

2.1 - Descrizione del contesto classe

La sperimentazione è stata effettuata in due classi prime di un liceo delle scienze umane, il “Liceo Statale Enrico Medi” situato a Villafranca di Verona (VR), una scuola nota in tutto il territorio provinciale, con un’ottima reputazione dovuta alla vasta offerta formativa, al fatto che si colloca nelle prime posizioni delle classifiche di settore e alla vasta offerta di attività e progetti sia curricolari che extracurricolari.

Le due classi impegnate nella sperimentazione sono, come detto, due classi prime dell’indirizzo scienze umane:

- **la classe 1I**, composta da 29 studentesse, è una classe del liceo delle scienze umane classico e ha un livello di partenza in matematica discreto, ma con una marcata eterogeneità interna, nella classe sono presenti due studentesse con certificazione DSA, entrambe sono alunne con discalculia (F81.2), di grado lieve e moderata, una studentessa della classe presenta inoltre una certificazione 104 di grado lieve;
- **la classe 1L**, composta da 30 studenti, 11 maschi e 19 femmine, è una classe del liceo delle scienze umane con opzione economico sociale, con un livello di partenza in matematica abbastanza buono, ma anche qui con una marcata eterogeneità interna, nella classe non sono presenti studenti con certificazioni DSA o 104, ma due studenti sono in possesso della certificazione per studenti atleti.

In entrambe le classi l’atteggiamento verso la matematica è caratterizzato prevalentemente da disinteresse, in alcuni casi, purtroppo, anche da una certa ostilità. Fortunatamente in entrambe le classi gli studenti hanno dimostrato, durante le lezioni e le attività proposte nel primo trimestre, una buona disponibilità al lavoro laboratoriale e alla cooperazione, come anche all’utilizzo di strumenti digitali, cosa che mi porta a pensare che le classi siano perlopiù adeguate alla sperimentazione sul confronto tra approcci didattici differenti. I contesti delle due classi si prestano abbastanza bene a questo tipo di sperimentazione, poiché essendo il docente curricolare le classi verranno coinvolte maggiormente. Il programma curricolare di matematica per le due classi,

sebbene siano di indirizzi leggermente diversi, coincide perfettamente e questo permette un confronto tra i due gruppi. Come si può vedere dal programma e dagli obiettivi specifici di apprendimento dell'istituto (Figura 1), il programma di matematica per le due classi è lo stesso.

13. CONTENUTI DISCIPLINARI CLASSE PRIMA liceo classico, linguistico, scienze umane, socio economico. MATERIA: MATEMATICA		
MODULO	ARGOMENTI/TEMI	TEMPI
Titolo: Insiemi numerici	I numeri naturali, interi, razionali, introduzione ai numeri reali.	Settembre/Ottobre
Titolo: Gli insiemi	Gli insiemi e le loro rappresentazioni, sottoinsiemi, intersezione, unione, e differenza tra insiemi	Ottobre
Titolo: Il calcolo letterale	Monomi e loro caratteristiche. Le operazioni con i monomi: l'addizione e la sottrazione, la moltiplicazione, l'elevamento potenza, la divisione. M.C.D. e m.c.m. tra monomi	Novembre
Titolo: Polinomi e loro caratteristiche	Operazioni tra polinomi: addizione, sottrazione, moltiplicazione	Novembre/Dicembre
Titolo: Prodotto notevole	Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza, quadrato di binomio, quadrato di un polinomio, cubo di un binomio.	Dicembre/Gennaio
Attività di recupero e approfondimento	Recupero in itinere su tutti gli argomenti del primo periodo	Inizio gennaio
Titolo: Scomposizione in fattori dei polinomi	Raccoglimento totale e parziale, riconoscimento di prodotti notevoli, scomposizione di un particolare trinomio di secondo grado. M.C.D. e m.c.m. tra polinomi.	Febbraio
Titolo: Equazioni	Equazioni e loro principi di equivalenza. Equazioni intere di primo grado. Risoluzione di problemi con equazioni.	Marzo
Titolo: Disequazioni	Disequazioni e loro principi di equivalenza. Disequazioni di primo grado intere. Sistemi di disequazioni lineari a una sola incognita. Risoluzione di problemi con disequazioni.	Aprile/Maggio
Titolo: Statistica	Indici di variabilità, moda, media, mediana	Maggio/giugno
Titolo: Geometria	Il sistema ipotetico deduttivo. Le parti della retta e le poligonali. Assiomi di appartenenza, assiomi di ordinamento sulla retta. Semipiani e angoli. I triangoli e i criteri di congruenza. Proprietà del triangolo isoscele. Le disuguaglianze nei triangoli. I quadrilateri.	Aprile (o distribuita durante l'anno)

Figura 1 - Programma disciplinare classi prime

12. OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO CLASSE PRIMA liceo classico, linguistico, scienze umane, socio economico MATERIA: MATEMATICA			
Il Dipartimento stabilisce i seguenti obiettivi obbligatori in termini di conoscenze, abilità e competenze per le singole classi PRIME .			
	Competenze	Abilità/Capacità	Conoscenze
TEMA 1- ARITMETICA E ALGEBRA			
C L A S S E P R I M A	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica ✓ Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni ✓ Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. ✓ Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi insiemi numerici ✓ Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze ed applicarne le proprietà. ✓ Calcolare il valore di espressioni nei diversi insiemi numerici. ✓ Utilizzare il calcolo letterale per la semplificazione di espressioni e la fattorizzazione di polinomi. 	<p>Gli insiemi numerici N, Z, Q, R e rappresentazioni; confronto tra numeri; operazioni - potenze e loro proprietà.</p> <p>Rapporti, proporzioni e percentuali.</p> <p>Espressioni algebriche; problemi in N, Z, Q.</p> <p>Monomi, polinomi e relative operazioni, prodotti notevoli, scomposizione in fattori.</p> <p>Monomi e polinomi per risolvere problemi.</p>
TEMA 2 - GEOMETRIA			
C L A S S E P R I M A	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni ✓ Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. ✓ Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale ✓ Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete ✓ Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione. Progettare un percorso risolutivo strutturato in passi ✓ Risolvere problemi di tipo geometrico con le procedure algebriche 	<p>Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini: assioma, definizione, teorema, dimostrazione</p> <p>Il piano euclideo: relazioni tra rette, triangoli, e criteri di congruenza. Rette parallele e perpendicolari quadrilateri e loro proprietà</p>

Figura 2a - Obiettivi specifici di apprendimento classi prime

TEMA 3 - RELAZIONI E FUNZIONI		
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica ✓ Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. ✓ Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Acquisire il concetto di insieme, saperlo rappresentare, operazioni tra insieme, partizione di un insieme. ✓ Rappresentare una funzione. Disegnare il grafico di una funzione lineare, di proporzionalità diretta e inversa. ✓ Risolvere equazioni-disequazioni intere. ✓ Utilizzare le equazioni e le disequazioni per risolvere i problemi. 	<p>Gli insiemi, le loro rappresentazioni, operazioni con gli insiemi. Gli insiemi come modello per risolvere problemi.</p> <p>Le funzioni reali di variabile reale le funzioni numeriche (lineari, di proporzionalità diretta e inversa). Piano cartesiano e grafico di una funzione.</p> <p>Equazioni e disequazioni di primo grado intere e loro principi di equivalenza. Sistemi di disequazioni.</p> <p>Problemi che hanno come modello equazioni e disequazioni.</p>
TEMA 4 - DATI E PREVISIONI		
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. ✓ Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Raccogliere, organizzare e rappresentare dati ✓ Rappresentare graficamente una tabella di frequenza. 	<p>Dati statistici, la loro organizzazione e rappresentazione.</p> <p>Gli indici di posizione centrale: media aritmetica, ponderata, mediana e moda.</p>

Figura 2b - Obiettivi specifici di apprendimento classi prime

2.2 - Strutturazione dell'esperienza didattica

La sperimentazione vera e propria è avvenuta all'inizio del secondo periodo dell'anno scolastico 2025-2026, come primo argomento del pentamestre. La sperimentazione è partita dopo lo svolgimento, e della relativa correzione, delle prove di recupero dei debiti formativi scolastici del primo periodo, quindi successivamente alla settimana di sospensione didattica, nella quale gli insegnanti ripassano o approfondiscono gli argomenti del primo trimestre, soprattutto a beneficio di quegli studenti che di lì a poco avranno gli esami di riparazione dei debiti formativi.

Al fine di rendere la sperimentazione più attendibile possibile, ci sarà:

- lo stesso docente per entrambe le classi;
- il tempo dedicato a ciascuna attività nelle due classi;
- gli stessi metodi di valutazione, rilevazione dati ecc.

L'unica variabile riguarda l'approccio didattico adottato con ciascuna classe. Mentre nella classe 1I verrà usato un approccio ispirato a Emma Castelnuovo, nella classe 1L l'approccio prevederà l'utilizzo del software Geogebra.

Sono state previste 12 ore totali di sperimentazione, di cui 8 di laboratorio, spalmate su 4 settimane di scuola, non contando le uscite didattiche e le vacanze di carnevale, che si sono presentate nel pieno dell'attività di sperimentazione, in quanto le ore settimanali di matematica in programma nelle classi prime di un liceo delle scienze umane sono 3. La totalità delle ore comprende le premesse sui polinomi, le spiegazioni dei singoli prodotti notevoli "somma per differenza", "quadrato di un binomio", "quadrato di un trinomio" e "cubo di binomio".

2.3 - Descrizione delle attività didattiche

Le attività didattiche progettate sono state prevalentemente di tipo laboratoriale, nelle quali, come afferma Bolondi (2016) "si matematizza la realtà attraverso esplorazioni e congetture, in cui si manipolano modelli di oggetti matematici, in cui la discussione tra pari e con l'insegnante sono elementi di un processo dinamico di scoperta" (p.554).

Inizialmente è stata prevista la stessa introduzione, della durata di 3 ore, in entrambe le classi ai polinomi, alle loro proprietà e alle loro operazioni per introdurre il concetto di aree equiestese, nozione che gli studenti sperimenteranno poi con le attività che verranno loro proposte in seguito. Le attività si svolgeranno in gruppo, per due motivi principali, il primo è per far sì che componenti di gruppi eterogenei, per quanto riguarda il rendimento scolastico, si aiutino a vicenda e che quindi possa portare ad una maggiore collaborazione;; il secondo è dare allo studente il ruolo di insegnante di sé stesso, mettendolo al centro del suo stesso percorso di apprendimento.

La distinzione delle due differenti attività, quella manuale e quella digitale, è fondamentale per capire quale dei due approcci possa essere il più efficiente. In entrambe le classi l'approccio è stato di tipo laboratoriale:

- in una classe, la prima I, l'approccio si è basato sulla manipolazione e l'esplorazione più attiva legata ai materiali concreti;
- nell'altra classe, la prima L, l'approccio è avvenuto tramite la mediazione del software GeoGebra, che ha permesso un'esplorazione dinamica delle figure geometriche.

Entrambi gli approcci sono ispirati alle didattiche di Emma Castelnuovo, le attività sono caratterizzate ed effettuate pensando, l'una ai materiali concreti, l'altra alla visualizzazione dinamica, entrambe con l'intento di costruire il significato delle espressioni algebriche e delle uguaglianze, creando le rappresentazioni geometriche dei prodotti notevoli.

Le attività didattiche sono state pensate per favorire la comprensione, in tutte le loro sfaccettature, dei principali prodotti notevoli agli studenti. Cercando di oltrepassare la mera memorizzazione delle formule. Nello specifico, si vuole incoraggiare lo studente a cercare di riconoscere le espressioni algebriche legate ai prodotti notevoli e di saperli interpretare.

In primo luogo, un obiettivo è volto alla comprensione del concetto "prodotto notevole" inteso come risultato di relazioni e non solamente come una serie di regole da applicare. Indirizzati dalla relazione tra algebra e geometria, gli studenti vengono quindi guidati a scoprire il senso più profondo delle formule, cioè come esse possano essere interpretate attraverso la composizione di figure geometriche, anche variabili nel piano 2D o nello spazio 3D.

In un secondo momento, l'obiettivo è stato quello di sviluppare le competenze necessarie a completare esercizi generici di calcolo algebrico, avendo bene a mente i parallelismi con la geometria appresi precedentemente nel corso della sperimentazione. Quindi, si proseguirà, con l'applicazione di queste capacità ad espressioni a problemi sempre più complessi, sapendo, a questo punto, riconoscere prodotti notevoli all'interno

di un'espressione complicata.

In parallelo agli obiettivi descritti ci si è anche concentrati sull'aspetto del problem solving. Agli studenti è stato richiesto di riflettere attentamente oppure di provare varie strategie da sfruttare per risolvere un problema o un'espressione. Di seguito, hanno dovuto esprimere a voce il proprio ragionamento ai compagni, provando a utilizzare un linguaggio matematico corretto. Questo risulta di particolare rilievo per lo sviluppo della capacità di espressione in generale. Ancora di più, considerando che molti studi hanno dimostrato uno stretto collegamento tra una buona padronanza linguistica, sia a livello di lessico in generale, che di lessico matematico specifico, e un buon rendimento in matematica (Ferretti et al., 2023).

Ultimo, ma non meno importante, le attività hanno avuto anche l'obiettivo, metacognitivo, di migliorare l'atteggiamento degli studenti nei confronti della matematica, di solito una tra le materie meno apprezzate e meno capite. Attraverso un coinvolgimento attivo, sia grazie al lavoro di gruppo, ma soprattutto grazie alle attività che hanno dovuto svolgere, dove ai ragazzi è stato richiesto di utilizzare il loro spirito di osservazione, la loro capacità deduttiva e la creazione di qualcosa di concreto che rappresenti quei determinati elementi algebrici che hanno compreso. Tutto ciò, nella speranza che “nel fare ciascuno può trovare qualcosa, e provare la gioia di aver fatto la sua piccola scoperta” (Castelnuovo, 2017, p. 13).

Per la progettazione della sperimentazione sono stati fondamentali gli strumenti di valutazione, nonché al compito in classe, che, visto il mio ruolo di docente curricolare delle classi, dovrò valutare con una valutazione classica da 0 a 10. Non sarà valutata, però, solo la correttezza delle risposte, bensì anche la comprensione concettuale dei prodotti notevoli trattati e l'atteggiamento, l'impegno e la partecipazione tenuta dallo studente durante tutto il tempo delle attività.

2.4 - Strumenti per la raccolta delle informazioni

Per quanto riguarda la rilevazione dei dati, l'obiettivo è la raccolta di informazioni qualitative e quantitative, quindi applicando l'uso di diversi strumenti. Il motivo deriva dal fatto che non si desidera esclusivamente basarsi sui risultati della prova scritta, bensì

si necessita, in questo tipo di sperimentazione, anche di osservare le dinamiche degli studenti in classe, cosa ben più difficile che “dare un voto” alla prova scritta. In particolare, si è preferito adottare un test di verifica degli apprendimenti, la classica verifica con esercizi, unita a, come detto, osservazioni durante il lavoro degli studenti in classe, in più, durante la riconsegna delle prove, valutate con voto, si è chiesto agli studenti una rapida autovalutazione sul proprio compito.

Lo strumento principale per la raccolta delle informazioni di tipo quantitativo è stato, senza dubbio, il test di verifica fatto al termine del periodo dell’esperienza didattica. Il test è stato lo stesso per entrambe le classi, per minimizzare il rischio di non conformità dei risultati e ridurre l’impatto del contesto che per ovvie ragioni è diverso in classi diverse. La prova progettata è coerente con gli obiettivi delineati e mira a valutare non solo le capacità operative degli studenti, ma, e soprattutto, anche la loro comprensione intrinseca dell’argomento.

Il test è strutturato con esercizi di espansioni di espressioni contenenti prodotti notevoli a difficoltà crescente, esercizi di riconoscimento delle strutture algebriche e quesiti di connessione tra rappresentazione algebrica e geometrica. In questo modo si cerca di comprendere se lo studente ha interiorizzato la metodologia di applicazione delle formule e contemporaneamente si evita che approcci gli esercizi in modo troppo meccanico.

Altri fattori importanti in attività come queste sono l’atteggiamento generale degli studenti, il loro interesse e la loro partecipazione alle attività. L’insegnante tramite un apposito diario di bordo ha tenuto traccia di questi parametri nel corso delle 12 ore di partecipazione alle attività di laboratorio. Il diario di bordo è stato redatto assegnando ad ogni studente, per ogni attività legata ad ogni prodotto notevole analizzato, una votazione da 1 a 5, dove 1 corrisponde a nessuna partecipazione/interesse e 5 partecipazione attiva alle attività. Questo tipo di indicazioni permettono di integrare gli esiti dei test scritti con informazioni che solitamente sono di difficile rilevazione, come le strategie che lo studente adotta per risolvere un problema.

II		Quadrato di binomio			Somma per differenza			Quadrato di binomio			cubo di binomio		
Cognome	Nome	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione
***	***	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
***	***	5	4	5	5	5	4	5	5	4	5	5	5
***	***	4	4	4	3	4	3	4	4	3	4	5	4
***	***	4	3	4	4	3	4	4	3	4	4	3	3
***	***	3	3	3	4	4	3	4	4	4	3	3	4
***	***	5	4	4	5	3	4	5	3	3	4	3	3
***	***	4	4	3	4	5	4	4	4	5	3	3	3
***	***	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
***	***	2	2	2	2	3	2	3	4	2	2	2	3
***	***	5	5	5	5	4	5	5	5	4	4	5	4
***	***	4	3	4	5	4	4	3	4	3	4	5	4
***	***	2	2	2	3	2	2	3	2	2	4	2	3
***	***	4	4	3	4	3	3	3	4	4	4	3	3
***	***	3	3	2	3	3	4	3	3	3	2	2	3
***	***	3	4	4	3	4	3	3	3	4	4	3	4
***	***	4	3	3	4	3	3	3	2	3	3	4	3
***	***	3	3	5	3	4	3	4	3	4	4	3	5
***	***	3	2	2	2	3	2	3	2	3	2	2	2
***	***	3	4	4	3	3	3	2	2	3	4	3	3
***	***	2	2	3	2	2	3	2	3	2	3	2	3
***	***	2	2	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3
***	***	4	4	5	4	4	3	3	3	3	2	3	3
***	***	5	5	5	5	4	4	5	5	5	4	4	5
***	***	2	2	2	3	2	2	2	3	2	3	2	2
***	***	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3	4	3
***	***	4	4	4	4	5	4	4	5	5	5	4	4
***	***	2	2	2	3	3	2	2	2	2	3	2	3
***	***	4	4	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4

Figura 3 - Diario di bordo della classe 1I

II		Quadrato di binomio			Somma per differenza			Quadrato di binomio			cubo di binomio		
Cognome	Nome	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione	Alteggimento Generale	Interesse	Partecipazione
***	***	4	4	4	5	5	4	4	3	4	4	4	5
***	***	4	4	5	5	5	4	5	4	5	5	5	5
***	***	3	5	4	4	3	3	4	4	5	5	4	4
***	***	4	3	3	2	3	3	4	3	3	2	3	4
***	***	3	2	2	3	4	5	3	4	3	4	3	5
***	***	4	4	5	5	4	4	4	3	3	4	4	5
***	***	3	3	2	2	3	4	3	3	4	4	3	3
***	***	3	3	2	3	3	4	3	3	2	3	4	3
***	***	4	4	4	3	4	5	4	4	3	3	4	4
***	***	4	4	3	4	5	5	3	4	4	4	3	4
***	***	4	4	5	4	5	4	4	3	4	4	5	4
***	***	4	5	4	3	4	4	5	4	4	4	5	3
***	***	5	5	4	5	4	5	4	5	5	4	5	4
***	***	3	3	3	4	3	3	4	3	4	4	3	4
***	***	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	4	4
***	***	4	4	5	4	4	5	5	5	5	5	4	4
***	***	4	3	4	5	4	3	4	3	4	5	4	5
***	***	3	3	3	4	3	4	3	3	4	3	4	4
***	***	4	4	4	5	4	5	4	4	5	5	5	4
***	***	4	4	5	4	4	4	3	4	3	4	4	3
***	***	4	4	4	5	4	5	4	4	3	4	3	4
***	***	3	3	3	4	3	4	5	3	4	3	4	5
***	***	3	3	4	3	3	4	3	3	3	3	4	3
***	***	4	3	4	3	4	4	4	3	4	3	4	3
***	***	4	4	5	4	4	5	4	5	4	5	5	4
***	***	4	3	4	3	4	3	4	4	3	4	3	4
***	***	3	3	4	3	3	4	3	3	3	3	3	2
***	***	3	4	3	4	3	4	3	3	4	4	3	4
***	***	4	3	4	4	3	3	4	3	3	3	3	3

Figura 4 - Diario di bordo della classe 1L

Integra gli strumenti di valutazione un questionario che lo studente compila al termine del percorso. Il questionario ha l'obiettivo di raccogliere informazioni sulla percezione dello studente riguardo la metodologia didattica specifica per la sua classe. Le domande sono prevalentemente a risposta chiusa e sono formulate in modo semplice per una chiara comprensione da parte di tutti gli studenti.

Tutti i dati raccolti sono stati analizzati nel capitolo 4, confrontando l'efficacia dei due approcci didattici utilizzati. Nello specifico, i risultati della verifica-test sono stati analizzati seguendo la griglia di valutazione, costruita appositamente, che ha permesso di assegnare punteggi agli studenti in maniera coerente agli aspetti didattici e di apprendimento considerati. Essa è strutturata in quattro criteri di valutazione, con un punteggio in centesimi che successivamente è stato ricalcolato in base decimale, coerentemente alle votazioni di una scuola secondaria. Mentre il test di verifica ha prodotto dati quantitativi, le osservazioni e i questionari danno un quadro di analisi più approfondita dei risultati

CRITERI	LIVELLI	PUNTEGGIO
Riconoscimento delle strutture algebriche	Insufficiente	0 - 9
	Base	10 - 14
	Adeguito	15 - 20
Applicazione delle regole di calcolo	Insufficiente	0 - 19
	Base	20 - 27
	Adeguito	28 - 34
	Avanzato	35 - 40
Correttezza e chiarezza dei passaggi	Insufficiente	0 - 9
	Base	10 - 14
	Adeguito	15 - 20
Interpretazione del significato	Insufficiente	0 - 9
	Base	10 - 14
	Adeguito	15 - 20

Tabella 1 - Griglia di valutazione

2.4.1 - Il test di verifica

Il test di verifica è lo strumento cardine per la rilevazione dei dati quantitativi relativi alla comprensione degli studenti sull'argomento in questione, i prodotti notevoli. Il test di verifica è stato progettato riducendo gli esercizi puramente esecutivi, favorendo quelli che spingono lo studente ad esplicitare il procedimento che l'ha condotto a quella soluzione e ad argomentare i risultati che ha ottenuto. Il test ha quindi potuto rilevare la chiarezza dei risultati, ma anche elementi legati alla metodologia di lavoro, della correttezza dei passaggi e della comprensione dello studente.

La prova è stata somministrata ad entrambe le classi impegnate nella sperimentazione, con una durata tra i 60 e i 90 minuti, cosicché gli studenti potessero sostenere la prova in tempi ragionevoli e senza che la prova stessa fosse troppo stressante. Il tempo variabile è dovuto anche al fatto che nelle classi, come già accennato, sono presenti studenti con certificazioni DSA e certificazioni 104. Il test si articola in sei esercizi, a difficoltà crescente, con lo scopo di coprire diversi livelli di competenza accompagnando lo studente a richieste da operative a richieste più riflessive e di rielaborazione. Per una maggiore trasparenza, nel test, ad ogni punto di ogni esercizio viene assegnato chiaramente un punteggio preciso.

Gli esercizi sono stati creati nel rispetto degli obiettivi di apprendimento sui prodotti notevoli e la griglia di valutazione.

- L'esercizio 1 permette di verificare il riconoscimento di un semplice prodotto notevole e ne richiama il parallelismo geometrico;
- L'esercizio 2 riguarda la risoluzione di espressioni più elaborate, con più termini, con l'obiettivo di verificare che lo studente sia in grado di applicare le regole del calcolo in maniera continuativa;
- Gli esercizi 3 e 4 sono invece rivolti alla verifica concettuale, il collegamento tra la rappresentazione algebrica del prodotto notevole e il suo significato geometrico, il confronto tra due forme algebriche equivalenti, giustificando il procedimento.

Ciascun esercizio è articolato in tre punti specifici, che vanno ad analizzare la differente

preparazione e comprensione dello studente, il punto a, livello base, per verificare le competenze essenziali, il punto b, livello intermedio, per discriminare una comprensione più sicura e strutturate degli argomenti, il punto c, avanzato, ha lo scopo di valutare la padronanza più profonda dei contenuti. I punteggi sono stati distribuiti con un peso maggiore in quegli esercizi che richiedevano un ragionamento attivo o un confronto tra le rappresentazioni.

Per quanto riguarda gli studenti con certificazioni BES, si è seguita la linea tracciata dai loro PDP. A loro è stato permesso di approcciarsi al test di verifica con l'ausilio della calcolatrice scientifica e gli schemi precedentemente fatti da loro stessi e mostrati al docente almeno il giorno prima del test, come da indicazioni scolastiche e del patto educativo firmato dal consiglio di classe e dai rappresentanti di classe e dei genitori. In aggiunta a loro si è permesso di usufruire di tempo addizionale per lo svolgimento del test, sempre in ottemperanza alle indicazioni scolastiche.

Di seguito è riportato il test di verifica.

Test di verifica di matematica

Es1

a) Sviluppa l'espressione $(2a + 3)^2$

b) Disegna una possibile rappresentazione geometrica dell'espressione del punto a) e indica cosa rappresentano le varie parti di cui è composta.

c) Quale è un tipico errore che uno studente commette sviluppando l'espressione al punto a)?

Es2

a) Semplifica le seguenti espressioni.

$$(x - 1)^3 - (3x - 1) + 3x^2$$

$$(x + y - 1)^2 - (2xy + 1) + 2(x + y)$$

b) Sviluppa la seguente espressione:

"Al doppio del prodotto della somma e della differenza di x e 1 aggiungi il triplo del quadrato di binomio $x - 1$ "

c) Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false, con una breve motivazione in ciascun caso.

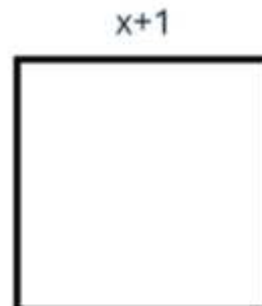
L'espressione $(x - 4)^2$ ha grado 3	V	F	
Se aggiungo il termine $6x^2$ al trinomio $-x^3 + 8 - 12x$, si ottiene lo sviluppo di $(2 - x)^3$	V	F	

Es3

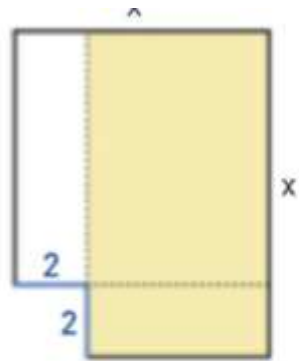
a) Considera un quadrato di lato $x + 1$ e ripartisci idealmente la sua area in modo da ottenere un quadrato di lato x due rettangoli e un quadrato di lato 1.

b) Uno studente afferma che per calcolare l'area del quadrato al punto a) è meglio usare la formula $(x + 1)^2$, un altro, invece, che è più utile ragionare tramite una scomposizione geometrica. Entrambi hanno ragione, quali sono i punti di forza dei due approcci?

c) Crea una possibile ripartizione geometrica del prodotto notevole $(A + B + C)^2$ indicando le aree delle singole parti.



- a) Considera la figura geometrica e la parte evidenziata, scrivi l'espressione che rappresenti l'area evidenziata prima in forma di prodotto notevole e poi svilupcala.
- b) Indica, per ogni sezione di area della figura, l'espressione algebrica per calcolare quella singola area.
- c) Verifica che il valore ottenuto sostituendo $x = 5$ sia lo stesso sia nell'espressione in forma di prodotto notevole sia nel suo sviluppo.



Es1			Es2			Es3			Es4		
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
8	8	4	12	13	10	8	9	8	8	6	6

Figure 5 e 6 - Prima e seconda pagina del test di verifica uguale per entrambe le classi

Successivamente al test, è stato assegnato agli studenti un questionario, compilato dagli studenti in forma anonima, che ha l'obiettivo di raccogliere informazioni qualitative sulla percezione degli studenti rispetto a tutte le attività relative all'esperimento didattico. Il questionario non è stato valutato ed è stato utilizzato solamente come strumento ausiliario all'analisi dei risultati. Infatti è stato utilizzato per analizzare come gli alunni hanno percepito gli argomenti, il loro grado di coinvolgimento, quali difficoltà abbiano incontrato e quanto interessante hanno trovato l'argomento presentato in quello specifico modo.

Il questionario è principalmente formato da domande a risposta chiusa o a scelta multipla per avere una lettura qualitativa sulle impressioni e le sensazioni degli studenti. Una sola domanda è a risposta aperta, forse la più importante, poiché ci permette di avere informazioni utili per interpretare quello che è emerso dal test.

Somministrato alla fine delle attività di sperimentazione, ma prima della riconsegna dei test di verifica corretti, in modo da evitare eventuali influenze positive o negative degli studenti in merito al voto vero e proprio assegnato. Le risposte al questionario sono state analizzate nel Capitolo 4, mettendo in relazione i dati con i risultati del test.

Di seguito si riporta il questionario.

Questionario

Comprensione percepita

1. Durante le lezioni ho capito come funzionano i prodotti notevoli.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto
 - Moltissimo
2. Mi è stato chiaro perché le formule dei prodotti notevoli funzionano.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto
 - Moltissimo
3. Riesco a riconoscere un prodotto notevole anche quando non è scritto come un polinomio in forma normale.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto

Difficoltà e strategie

7. Durante le attività ho incontrato difficoltà soprattutto:
 - nel riconoscere il tipo di prodotto notevole
 - nello svolgere i calcoli
 - nel capire il significato delle formule
 - nel collegare algebra e geometria
 - non ho avuto particolari difficoltà
8. Quando sbaglio un esercizio, di solito:
 - rifaccio i calcoli
 - cerco di capire dove ho sbagliato
 - chiedo aiuto
 - passo all'esercizio successivo

Moltissimo

Metodo di lavoro in classe

4. Le attività svolte in classe mi hanno aiutato a seguire la lezione.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto
 - Moltissimo
5. Ho trovato utile lavorare con esempi, figure o rappresentazioni.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto
 - Moltissimo
6. Mi sono sentito/a coinvolto/a durante le lezioni.
 - Per nulla
 - Poco
 - Abbastanza
 - Molto
 - Moltissimo

Confronto tra approcci didattici

9. Rispetto ad altri argomenti di matematica, questo modo di lavorare mi è sembrato:

- più chiaro
- simile
- più difficile

10. Tra spiegazione "tradizionale" e attività più operative/digitali, ho trovato più utile

- spiegazione tradizionale
- attività operative/digitali
- entrambe allo stesso modo

Domanda aperta

11. Scrivi una cosa che ti ha aiutato a capire meglio l'argomento e una che ti ha messo in difficoltà.

Figure 7 e 8 - Prima e seconda pagina del questionario compilato dagli studenti alla fine delle attività

Capitolo 3

Svolgimento della sperimentazione

La didattica vera e propria dell'esperimento si è svolta nell'arco di 15 ore di lezione, 3 di lezione preparatoria e 12 di attività laboratoriale, organizzate in modo tale che le due classi andassero di pari passo, argomento per argomento.

Precedentemente all'inizio della sperimentazione ci si è sincerati di dividere le classi in gruppi di lavoro, sei gruppi da quattro e un gruppo da cinque studenti in prima I e sei gruppi da cinque studenti in prima L, coerenti con il totale degli alunni in ogni classe. Il docente ha lasciato che gli alunni scegliessero i loro compagni di gruppo in modo autonomo, ma aggiustando i componenti dei gruppi in qualche occasione dove il livello, sia di interazione sociale che di preparazione, fosse troppo omogeneo. In questo frangente gli studenti con certificazioni BES, essendo tutti ben inseriti nel tessuto classe non hanno necessitato di interventi particolari.

La ripartizione delle ore in entrambe le classi è stata così suddivisa:

2 ore	Lezione introduttiva ed esercizi sui polinomi: <ul style="list-style-type: none"> ● forma normale, ● grado di un polinomio, ● ordinamento crescente e decrescente dei termini, ● somma e sottrazione tra polinomi, ● moltiplicazione monomio-polinomio, ● moltiplicazione polinomio-polinomio.
2 ore	Lezione ed esercizi sul quadrato di binomio, con attività laboratoriali.
2 ore	Lezione ed esercizi sulla somma per differenza, con attività laboratoriali.
2 ore	Lezione ed esercizi sul quadrato di trinomio, con attività laboratoriali.
2 ore	Lezione ed esercizi sul cubo di binomio, con attività laboratoriali.
2 ore	Somministrazione del test di verifica e, alla riconsegna in classe, del questionario.

Tabella 2 - Ripartizione oraria sperimentazione

3.1 - Fase introduttiva comune ad entrambe le classi

Prima dell'inizio della differenziazione dei due percorsi didattici, la fase introduttiva sui polinomi, le loro caratteristiche, le operazioni e, soprattutto, il parallelismo tra la rappresentazione algebrica e geometrica è stata svolta in modo il più univoco possibile in entrambe le classi coinvolte nella sperimentazione.

Questa fase, della durata di due ore, ha lo scopo di rafforzare le basi e i prerequisiti di entrambe le classi in vista dell'introduzione successiva dei prodotti notevoli, fornisce inoltre, agli studenti un quadro condiviso sia algebrico che geometrico.

Durante le due ore sono stati analizzati i concetti fondamentali sui polinomi quali, la definizione, la riduzione a forma normale, il grado di un polinomio a forma normale. Soprattutto però ci si è soffermati sulle operazioni con i polinomi: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione di un monomio per un polinomio e la moltiplicazione di un polinomio per un polinomio con specifica attenzione alla loro rappresentazione geometrica, utilizzando il modello dell'area come strumento di interpretazione.

Per le operazioni si è fatto riferimento agli esempi riportati nel libro di testo (Bergamini

et al., 2023, p.309-310) :

► **ESEMPIO**

$$(5x^3 + 6x^2 - 3) + (7 - 2x + 4x^2 - 6x^3) =$$

) il polinomio somma è formato da tutti i termini dei polinomi addendi

$$5x^3 + 6x^2 - 3 + 7 - 2x + 4x^2 - 6x^3 =$$

) il polinomio somma non è ridotto; sommiamo i monomi simili

$$-x^3 + 10x^2 - 2x + 4.$$

► **ESEMPIO**

$$(3a^3 + 3a^2b + 5b^2) - (5a^4 + 3a^2b - b^2) =$$

) $A - B = A + (-B)$

$$(3a^3 + 3a^2b + 5b^2) + (-5a^4 - 3a^2b + b^2) =$$

) sommiamo i polinomi

$$3a^3 + 3a^2b + 5b^2 - 5a^4 - 3a^2b + b^2 =$$

$$3a^3 + 6b^2 - 5a^4.$$



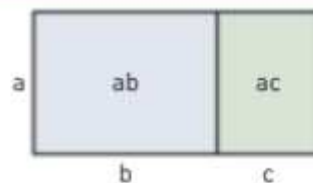
MATEMATICA PER IMMAGINI

Interpretazione geometrica

Consideriamo il rettangolo più grande in figura, i cui lati misurano a e $b + c$. L'area è $A = a \cdot (b + c)$.

Possiamo vedere il rettangolo anche come unione di due rettangoli di aree ab e ac , perciò l'area è anche $A = ab + ac$.

Risulta allora $A = a \cdot (b + c) = ab + ac$.



MATEMATICA PER IMMAGINI

Interpretazione geometrica

I lati del rettangolo più grande in figura misurano $a + b$ e $c + d$, quindi l'area è $A = (a + b)(c + d)$.

Possiamo vedere il rettangolo come unione di quattro rettangoli di area ac , ad , bc , bd , quindi l'area è anche $A = ac + ad + bc + bd$.

Risulta allora $A = (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

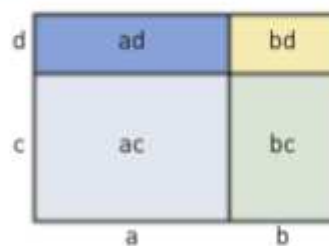


Figure 9 e 10 - Estratti del libro di testo delle operazioni tra polinomi

Come si vede nelle ultime due immagini, la moltiplicazione monomio-polinomio e la moltiplicazione polinomio-polinomio è stata perfettamente rappresentata geometricamente da una scomposizione di un rettangolo in due sotto-rettangoli e da un rettangolo in quattro sotto-rettangoli più piccoli, coerentemente con il numero dei termini di risoluzione delle due tipologie di prodotti.

Gli studenti hanno avuto modo, quindi, di avere una chiara rappresentazione dell'origine di tutti i termini che compongono lo sviluppo dei prodotti, questo ha favorito la comprensione sia algebrica che geometrica dei prodotti.

3.2 - Differenze nella mediazione didattica

I percorsi trattati sono stati progettati in modo da svolgere gli stessi contenuti didattici, le classi infatti, anche se non esattamente dello stesso indirizzo scolastico, hanno lo stesso programma di matematica. Inoltre, si sono mantenute invariate le tempistiche delle attività allo scopo di rendere significativo il confronto tra gli approcci. Infatti, in ambedue le classi sono stati affrontati gli stessi prodotti notevoli, nel medesimo ordine e con una distribuzione oraria identica.

Ciò che ha differenziato le attività proposte nelle due classi è stata l'approccio didattico. Nella classe 1I sono stati impiegati materiali manipolabili e attività concrete, basate sulla metodologia ispirata ad Emma Castelnuovo. Sono stati utilizzati cartoncini e modellini che gli studenti hanno costruito durante le ore di lezione.

Nella classe 1L l'approccio è avvenuto tramite strumenti digitali, nello specifico attraverso il software Geogebra, che ha consentito di interagire con le stesse situazioni geometriche, ma in ambiente digitale interattivo.

La differenza tra gli approcci ha permesso il confronto, non tra i contenuti o i livelli di difficoltà riscontrati, ma effettivamente sul ruolo dovuto allo strumento didattico.

3.3 - Lezioni nella classe 1I con approccio ispirato a Emma Castelnuovo

Nel percorso della classe 1I, il primo approccio ai prodotti notevoli è stato ispirato dal lavoro didattico di Emma Castelnuovo, che privilegiava l'apprendimento progressivo attraverso la geometria e la sua costruzione da oggetti concreti. L'attività è stata pensata

per favorire il passaggio dalla geometria all'algebra mediante l'osservazione, la discussione, ma soprattutto la manipolazione dell'oggetto direttamente da parte dello studente.

Nelle attività in 1I le consegne sono state fatte oralmente, nella stessa modalità per tutti i prodotti notevoli studiati. Il docente ha scritto alla lavagna il primo membro dell'uguaglianza del prodotto notevole e agli studenti è stato chiesto di interpretare tale scrittura con la sua rappresentazione geometrica, creandola con i cartoncini forniti. Successivamente, memori della lezione introduttiva, gli studenti sono stati invitati a creare una possibile scomposizione di quella figura geometrica, sempre con cartoncini e forbici. In questo modo gli studenti stessi sono stati in grado di scoprire da sé il secondo membro dell'uguaglianza algebrica.

Il quadrato di binomio

Nella prima ora di lezione nella classe 1I l'introduzione del quadrato di binomio verteva sulla scoperta della formula algebrica tramite la visualizzazione geometrica concreta. Grazie al lavoro fatto nella parte comune alle due classi gli studenti hanno potuto fin da subito interpretare il parallelismo tra geometria e algebra in modo corretto.

La lezione si è avviata attorno ad un problema di tipo geometrico, calcolare l'area di un quadrato di lato $a + b$. Il prodotto notevole quindi non viene inteso solo dal punto di vista algebrico, ma anche geometrico, provando a scomporre la figura in in esame.

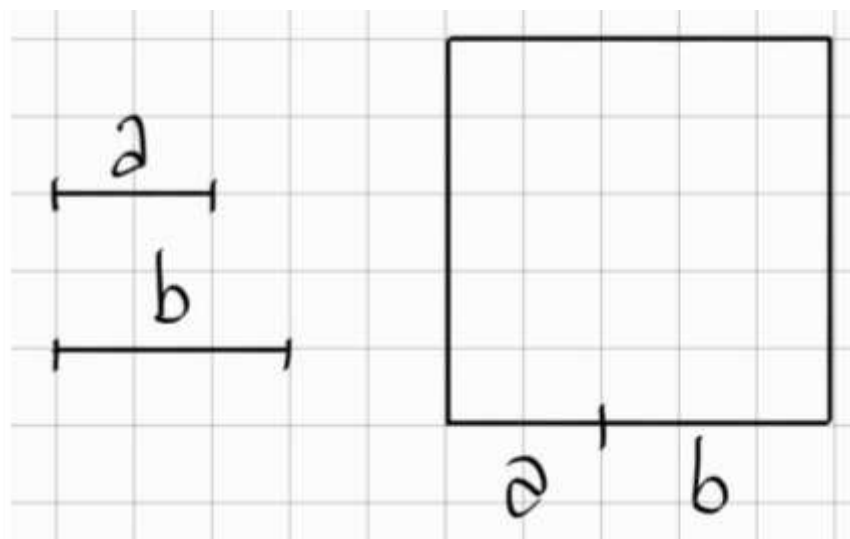


Figura 11 - Disegno iniziale fatto alla lavagna dal docente

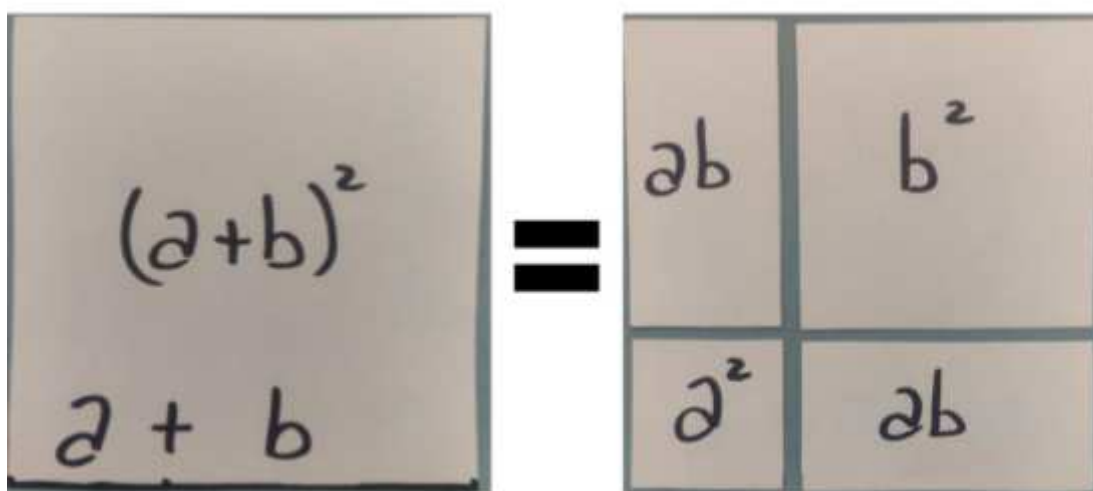


Figura 12 - Uguaglianza del quadrato di binomio

In seguito, riuniti a lavorare in gruppi eterogenei, gli studenti hanno riprodotto la scomposizione della figura individualmente, usando i cartoncini forniti dal docente. La fase a gruppi ha dunque favorito il confronto tra studenti, rendendo più chiaro e comprensibile il legame tra geometria e algebra.

Una volta che tutti i gruppi hanno riprodotto la scomposizione, si è formalizzata la

formula

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

espressione del ragionamento svolto e non formula da memorizzare. L'ora di lezione è poi continuata con una discussione finalizzata a stabilizzare l'apprendimento di quanto appena visto.

La somma per differenza

Il secondo prodotto notevole affrontato è stata la somma per differenza, in continuità con il precedente prodotto notevole, si è cercato di far riflettere sul significato acquisito del quadrato di binomio e cosa accadrebbe geometricamente in questo caso.

La terza ora di lezione è iniziata ponendo a confronto le espressioni $(a + b)^2$ e $(a + b)(a - b)$, spingendo gli studenti a riflettere su quali elementi del primo prodotto notevole, già trattato, possano essere utili per capire quello in esame al momento, soprattutto a vedere se alcuni elementi risultino modificati.

Quindi mediante l'uso dei cartoncini, gli studenti, sempre divisi in gruppi, sono stati indirizzati a scoprire le parti comuni e quelle che si annullano nella nuova configurazione geometrica, evidenziando come la sottrazione delle aree equivalga all'eliminazione dei termini misti, interpretando in modo corretto l'assenza dei termini ab nello sviluppo algebrico.

Si è posta particolare enfasi sul come la figura geometrica generata dalla sottrazione di un quadrato di lato b da uno più grande di lato a sia equivalente al rettangolo di dimensioni $(a + b)$ e $(a - b)$.

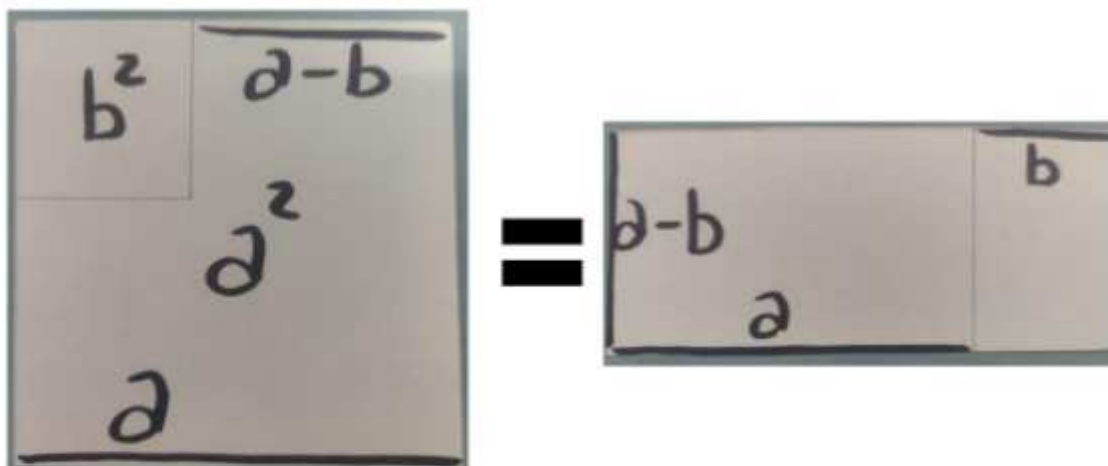


Figura 13 - Uguaglianza della somma per differenza

Alla fine dell'attività si è potuto scrivere la formalizzazione della formula

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Il quadrato di trinomio

L'attività didattica è proseguita con la quinta ora, dove si è analizzato il quadrato di trinomio. La lezione è stata costruita come naturale estensione del quadrato di trinomio, con la finalità ulteriore di evidenziarne le caratteristiche comuni, sia geometriche prima, che algebriche poi.

È stato fatto un breve richiamo alla lezione fatta precedentemente sul quadrato di binomio e sulla sua scomposizione geometrica, analogamente si è proposto agli studenti la situazione di calcolo del quadrato di lato $a + b + c$, invitandoli a riflettere come già fatto per il quadrato di lato $a + b$.

Gli studenti sono stati indirizzati alla costruzione geometrica del quadrato di lato $a + b + c$ cercando di riconoscere le diverse componenti, ancora, analogamente al quadrato di lato $a + b$. Dopo il confronto collettivo tra i gruppi e tra la classe sono emersi le varie componenti, i quadrati di lati a , b e c e i sei rettangoli, due di dimensioni ab , due di dimensioni ac e due di dimensioni bc .

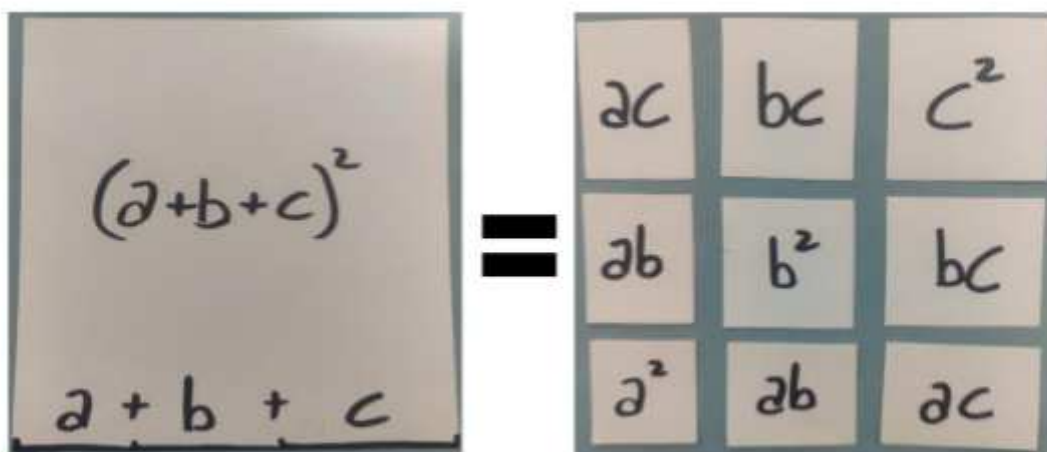


Figura 14 - Uguaglianza del quadrato di trinomio

Anche in questo caso si è voluto enfatizzare l'uguaglianza delle due figure geometriche. Dopo la discussione sulla scomposizione geometrica del quadrato e di come le varie

parti geometriche sono connesse alla sua area totale, si è giunti a scrivere la formula del quadrato di trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Il cubo di binomio

Il cubo di binomio è stato introdotto guidando gli studenti alla visione della geometria del prodotto notevole con lo scopo di evidenziare la sua natura tridimensionale. Diversamente dai prodotti notevoli precedenti, non è stata prevista una fase di costruzione attiva da parte degli studenti, in quanto la costruzione del cubo e delle sue varie parti avrebbe richiesto troppo tempo, l'attività si è concentrata sull'analisi di un modello precedentemente preparato dall'insegnante.

Dopo un richiamo al quadrato di binomio, già visto in precedenza. E il suo significato geometrico, si è cercato di estendere il suo modello di area al modello di volume del prodotto notevole in oggetto. È stato, quindi, proposto il calcolo del volume di un cubo di lato $a + b$, disegnato inizialmente alla lavagna e solo poi mostrato attraverso un modellino tridimensionale.



Figura 15 - Cubo di binomio costruito con materiali concreti.

Mediante l'attenta osservazione del modello, il docente ha guidato gli studenti nell'individuazione di tutte le componenti della scomposizione geometrica del cubo di binomio, i due cubi di lati a e b , evidenziando i sei parallelepipedi di dimensioni aab e abb associati ai prodotti misti, a turno i gruppi hanno osservato più da vicino il modellino. L'analisi ha permesso, dopo una discussione con la classe, di scoprire i vari termini dello sviluppo del cubo di binomio arrivando quindi alla formula

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$$

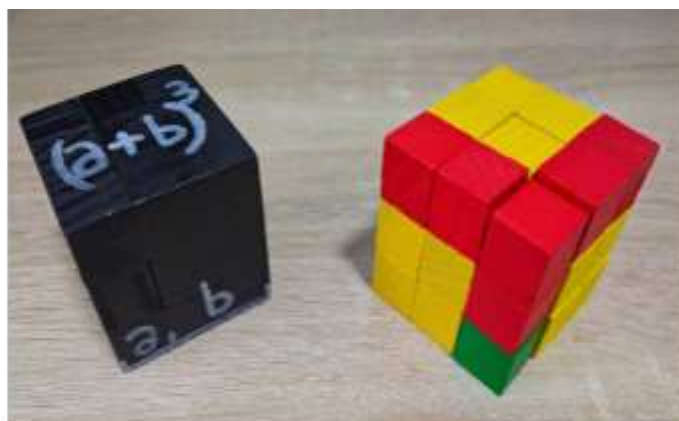


Figure 16 e 17 - Uguaglianza del cubo di binomio con materiali concreti e sua scomposizione

Alla fine delle varie spiegazioni, durante le ore dedicate alle esercitazioni, le studentesse hanno chiesto se si potevano riunire nuovamente nei vari gruppi e creare dei cartelloni con le varie formule e le rappresentazioni geometriche fatte da esporre poi nella classe. Questa attività, a loro molto gradita, è stata aggiunta alle ore precedentemente previste per le esercitazioni, considerandolo come un ulteriore momento di ripasso e di richiamo visivo. Inoltre, presenta un forte richiamo ai “tabelloni” che gli alunni di Emma Castelnuovo preparavano per le loro esposizioni.



Figure 18 e 19 - Alcune studentesse della classe II che producono i cartelloni

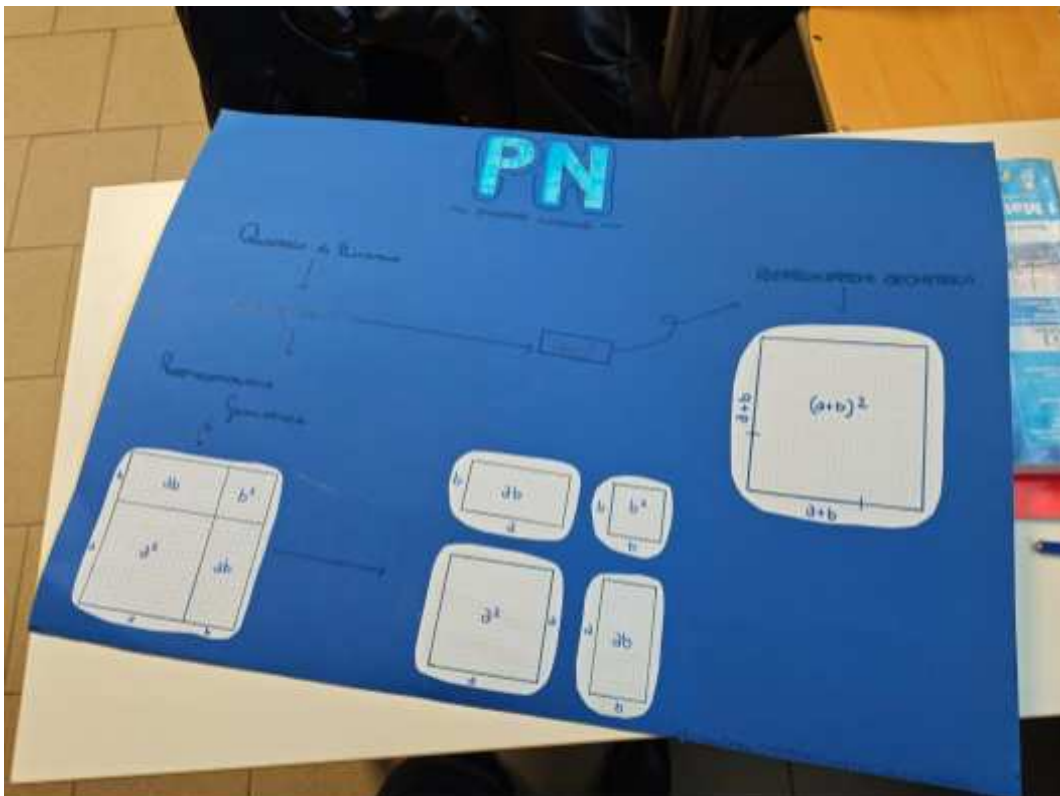


Figura 20 - Cartellone sul quadrato di binomio



Figura 21 - Panoramica della classe II durante una delle lezioni

3.4 - Lezioni nella classe 1L con approccio digitale mediato da Geogebra

Nel percorso didattico della 1L, l'introduzione ai prodotti notevoli è stata progettata mediante un approccio digitale, basato sul software Geogebra. Le attività sono state pensate per permettere un apprendimento progressivo grazie alla visualizzazione dinamica delle rappresentazioni geometriche, ma soprattutto per permettere la possibilità di manipolare le strutture geometriche in tempo reale.

Come per la prima I, il docente, scrivendo alla lavagna il primo membro dell'uguaglianza del prodotto notevole in questione, ha predisposto le consegne oralmente agli studenti. Per ciascun prodotto notevole affrontato e ad ogni studente è stata presentata una configurazione geometrica precostruita che loro sono stati in grado di vedere e manipolare con l'ausilio dei computer forniti dalla scuola, questa parte quindi gli studenti della classe prima L hanno lavorato singolarmente, ognuno con il proprio computer. Sulla configurazione era possibile intervenire e modificare in modo controllato le lunghezze e di conseguenza le aree corrispondenti si modificavano automaticamente. Agli studenti è stato richiesto di formulare ipotesi su come dovrebbe essere scritta la seconda parte dell'uguaglianza, in base all'esperienza appena fatta. In questo caso agli studenti, quindi, non è stato richiesto di creare, come nel caso della prima I, ma di manipolare in tempo reale le lunghezze, osservando come le variazioni influenzavano le aree corrispondenti.

Quadrato di binomio

La prima ora di lezione nella classe 1L è stata dedicata al quadrato di binomio, si è

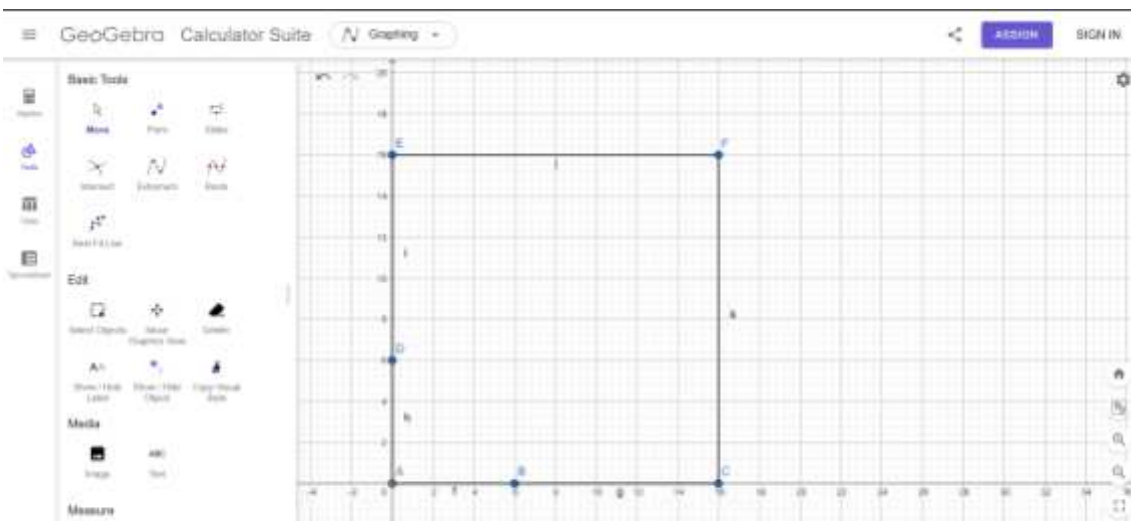


Figura 22 - Rappresentazione del quadrato di lato $a + b$

avviato il suo studio con la costruzione, in ambiente GeoGebra, di un quadrato di lato $a + b$.

Agli studenti è stato, quindi inviato, tramite il registro elettronico, il link per aprire il template GeoGebra precedentemente creato. Qui gli studenti sono stati invitati a manipolare i parametri a e b , a osservare e a fare le dovute ipotesi sul come quelle variazioni cambiassero le aree corrispondenti, con l'obiettivo di arrivare a scrivere il secondo membro dell'uguaglianza.

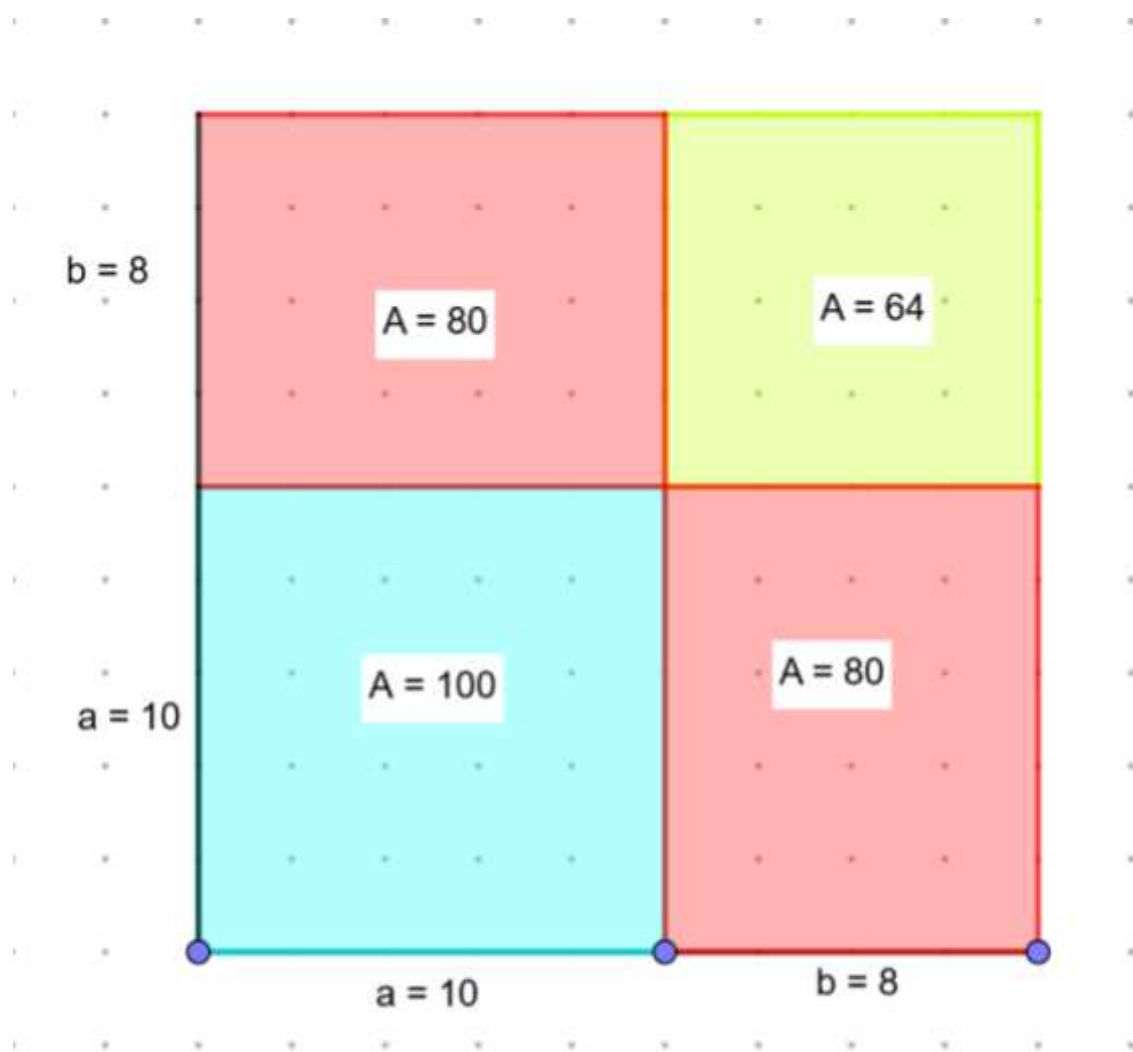


Figura 23 - Scomposizione del quadrato di binomio con dimensioni modificabili

Dopo questa fase, di esplorazione e manipolazione, gli studenti sono giunti alla formalizzazione di

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La lezione si è conclusa cercando di far riflettere gli studenti su cosa succederebbe se invece di avere la moltiplicazione per se stesso, formando quindi un quadrato, come appena analizzato, il lato $a + b$ moltiplicasse un lato formato dai segmenti $a - b$, in una sorta di preambolo per il prodotto notevole successivo, la somma per la differenza.

La somma per la differenza

Il lavoro, durante la terza ora di sperimentazione, per affrontare il prodotto notevole somma per differenza è stato pensato per essere in continuità con quello precedente. In questo caso il punto di partenza è stata la costruzione, da parte dell'insegnante e in ambiente GeoGebra, del rettangolo di dimensioni $a + b$ e $a - b$.

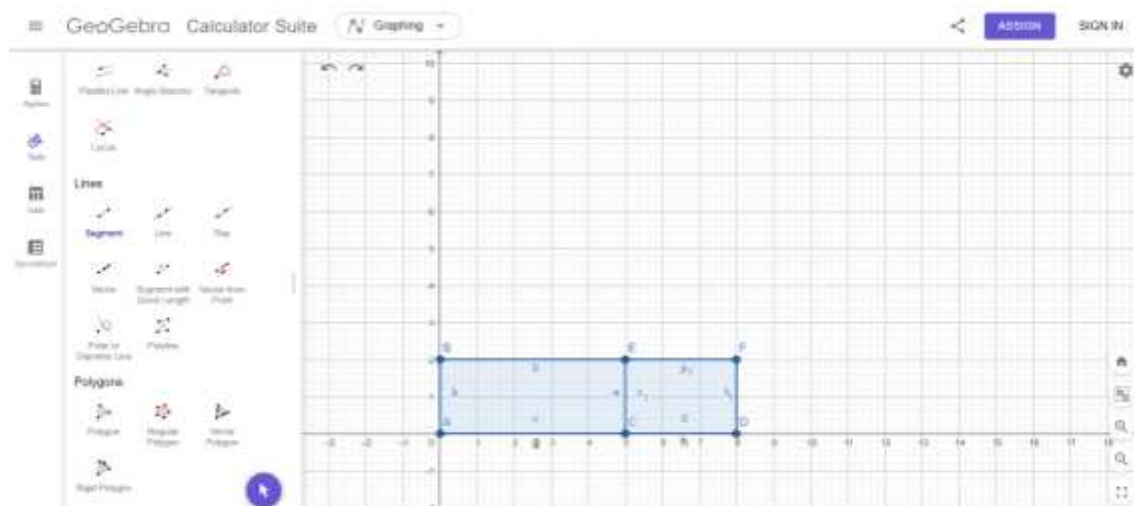


Figura 24 - Rappresentazione della figura di area $(a + b)(a - b)$

A questo punto, tramite il registro elettronico, si è passati all'invio del link per l'analisi e la manipolazione del secondo template precedentemente preparato. Come per il quadrato di binomio, agli studenti è stato chiesto di manipolare i parametri delle lunghezze e ipotizzare una possibile scrittura, interpretando la configurazione geometrica, del secondo membro dell'uguaglianza.

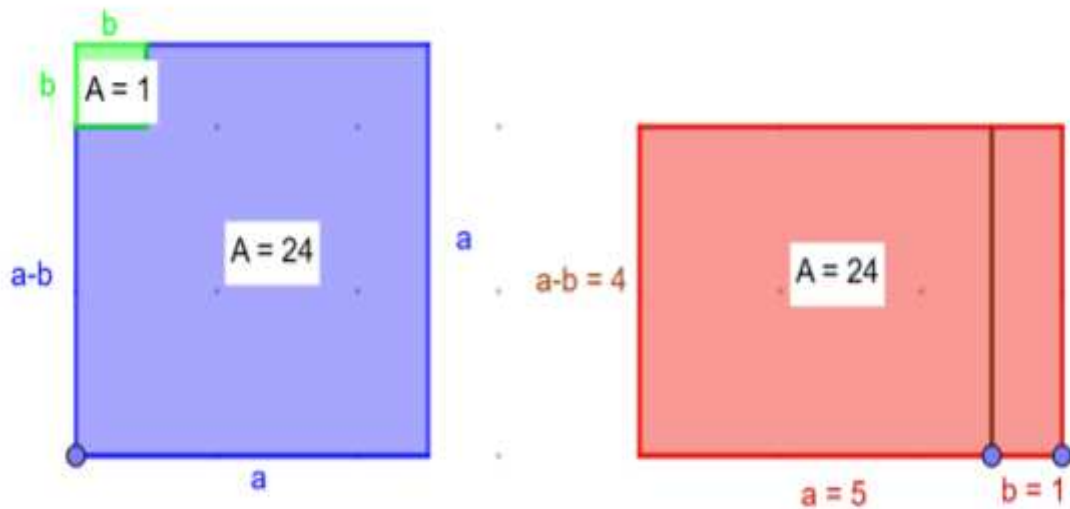


Figura 25 - Scomposizione della somma per differenza con lati mobili

Dopo la discussione collettiva si è arrivati così a formalizzare la relazione algebrica

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

presentata come sintesi delle osservazioni e il confronto delle strutture geometriche create.

Il quadrato di trinomio

La quinta lezione è rivolta al quadrato di trinomio, naturale estensione del quadrato di binomio, primo prodotto notevole visto. Geogebra è stato utilizzato in questo caso in modo efficace per rendere immediatamente visibile l'aumento di complessità della struttura. Si è operato alla stessa maniera del quadrato di binomio, con un precedente accenno a quel primo prodotto notevole visto qualche lezione prima, il punto di partenza è stato il calcolo dell'area di un quadrato di lato $a + b + c$.

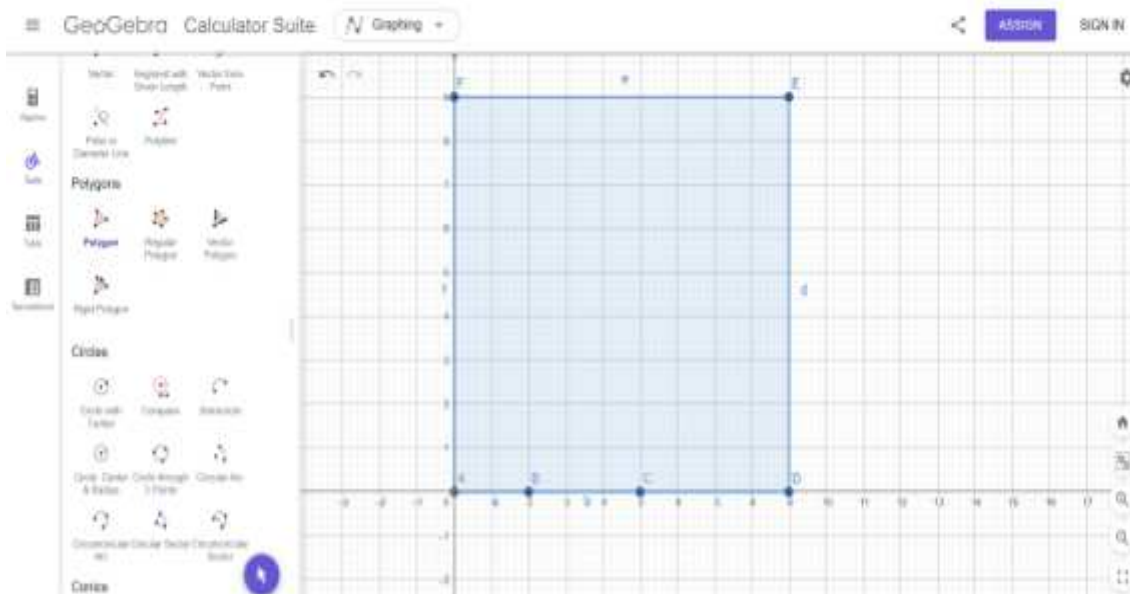


Figura 26 - Rappresentazione di un quadrato di lato $a + b + c$

Dopo aver costruito il quadrato in ambiente GeoGebra, indicando il quadrato come la prima parte della formula in esame, gli studenti sono stati incoraggiati a prevedere cosa sarebbe successo all'area di tale quadrato e come si sarebbe divisa, memori di quanto visto con il quadrato di binomio. Successivamente agli studenti è stato inviato il template preconfigurato e hanno potuto sperimentare e modificare in maniera controllata i vari parametri del quadrato di trinomio.

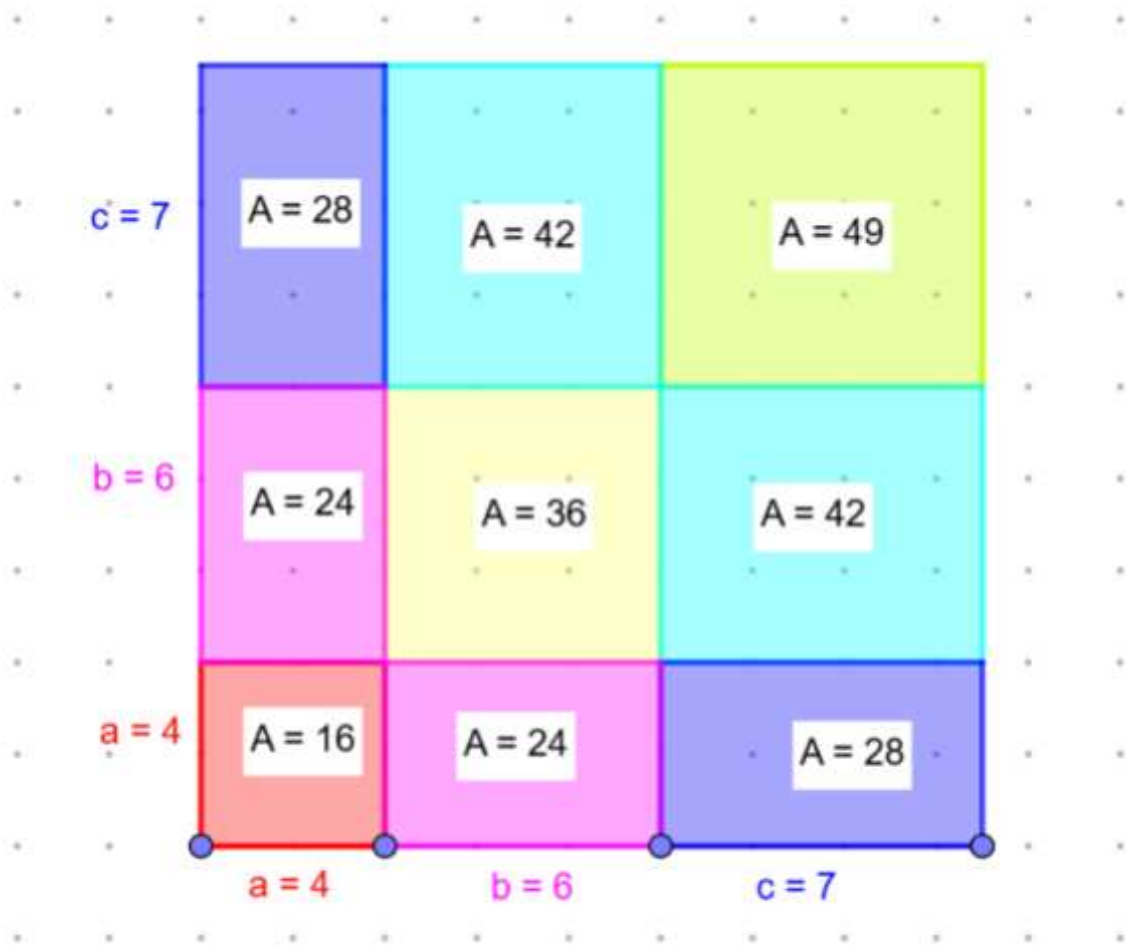


Figura 27 - Scomposizione del quadrato di trinomio con lati mobili

Partendo dalle ipotesi che gli studenti hanno formulato per cercare di capire la seconda parte della formula, e dopo una fase di discussione, si è arrivati a formalizzare

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Il cubo di binomio

L'introduzione, nella settima ora di lezione, del cubo di binomio ha richiesto l'uso della modellizzazione 3D di Geogebra, sfruttato come potente strumento di visualizzazione. L'attività ha ampliato il modello geometrico del quadrato di binomio estendendolo al caso del volume di un cubo di lato $a + b$.

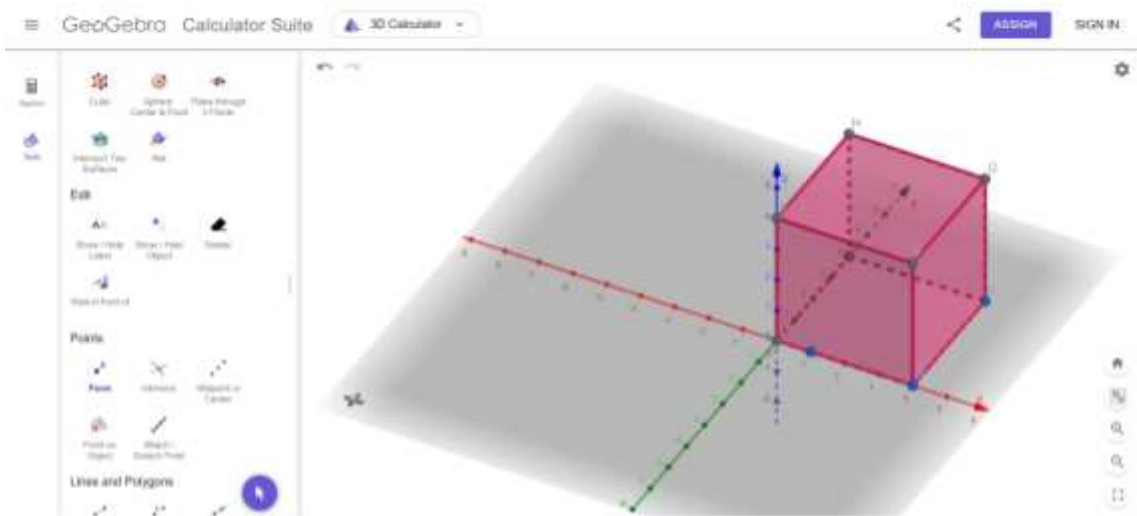


Figura 28 - Rappresentazione di un cubo di lato $a + b$

La lezione è stata avviata con la costruzione del cubo di lato $a + b$ in ambiente GeoGebra 3D, agli studenti è stato chiesto di ragionare sul significato geometrico del volume, osservando il solido e con dei richiami ai lavori precedenti. Successivamente è stato inviato il template e gli studenti hanno potuto osservare come, modificando in maniera controllata i parametri a e b , cambiassero le varie parti della scomposizione del cubo di binomio, evidenziando quindi i cubi di lato a e di lato b , poi i parallelepipedi rettangoli di dimensioni aab e abb .

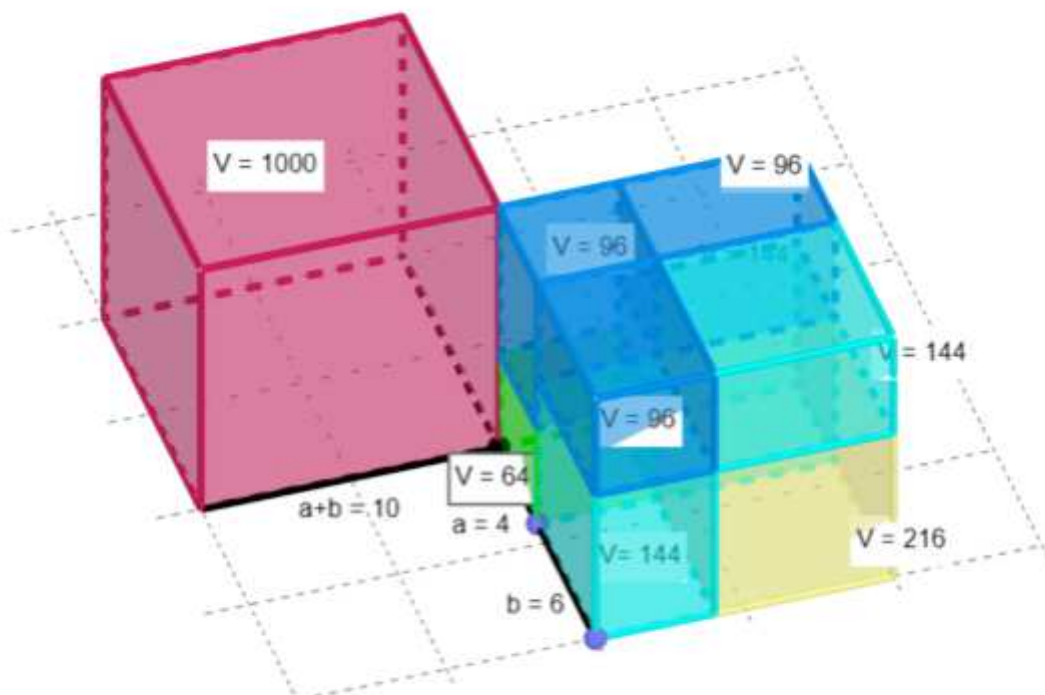


Figura 29 - Scomposizione e uguaglianza del cubo di binomio con lati mobili

Attraverso la lettura quindi della scomposizione 3D, gli studenti, insieme ai compagni di classe, hanno ragionato sul significato algebrico delle diverse parti del cubo iniziale, e solo al termine di questa fase e del successivo dibattito si è giunti alla scrittura della formula

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

L'uso di Geogebra 3D ha consentito la verifica immediata dei ragionamenti degli studenti e la loro coerenza riguardo i risultati potendo confrontare le varie parti geometriche con la rappresentazione algebrica.

3.5 - Attività di esercitazione e consolidamento

Dopo ogni lezione riguardante i singoli prodotti notevoli è stata prevista una fase sistematica di consolidamento tramite esercizi alla lavagna e individuali. Le fasi di esercitazione sono state distribuite lungo tutta la durata del percorso, in particolare, in ciascuna lezione di consolidamento sono stati proposti esercizi di applicazione.

Le ore di esercitazione sono state pensate in modo che fossero cumulative e progressive, i primi esercizi avevano come focus solo il caso del prodotto notevole appena affrontato, ma successivamente sono stati introdotti anche i casi affrontati progressivamente, con un livello di difficoltà crescente, ma accessibile. Inoltre, oltre agli esercizi classici è stato importante introdurre gli esercizi di ragionamento e interpretazione, vero focus di tutta la sperimentazione. Questo ha permesso che gli studenti interiorizzassero il metodo, non solo per risolvere singoli esercizi con un solo prodotto notevole, ma anche con più di uno, aiutandoli a favorire il riconoscimento delle diverse tipologie.

Alla totalità delle 8 ore previste per il percorso didattico di laboratorio nelle classi 1I e 1L, le ore dedicate all'introduzione dei singoli prodotti notevoli sono state quattro e quattro sono state dedicate alle esercitazioni di consolidamento.

Organizzando le attività in questo modo, si è potuto mantenere un certo equilibrio tra parte teorica ed esercizi, evitando un netto distacco tra i due e favorendo un apprendimento progressivo.

Durante lo svolgimento del lavoro nei gruppi il docente è rimasto sempre disponibile

per chiarire ogni dubbio, ripetere e chiarire le istruzioni come anche le procedure necessarie per lo svolgimento del compito assegnato. Allo stesso tempo sta svolgendo un importantissimo lavoro di osservazione degli studenti mentre lavorano, scoprono e ipotizzano insieme. Secondo Cavaliere & Graziuso (2021), “l’osservazione [...] permette di aprire una finestra sulle menti degli studenti. Ascoltando gli studenti che interagiscono tra loro, l’insegnante può stabilire meglio e con maggiore precisione il loro livello di apprendimento e le loro aree di difficoltà” (p.52) e intervenire quando la situazione lo richiede. Questo serve proprio a guidare l’alunno alla scoperta e alla costruzione del significato degli oggetti matematici coinvolti. Per questa ragione, Castellini & Spagnolo (2023) affermano:

Come passano gli allievi dall’esplorazione dell’attività laboratoriale a una formalizzazione matematica? In tutto questo si inserisce il ruolo insegnante. L’allievo deve arrivare a riorganizzare ed esplicitare quello che è stato compreso e appreso, questo è il passaggio fondamentale. Difficilmente un allievo riesce a farlo da solo, tutto questo avviene sotto la guida dell’insegnante. (p.28)

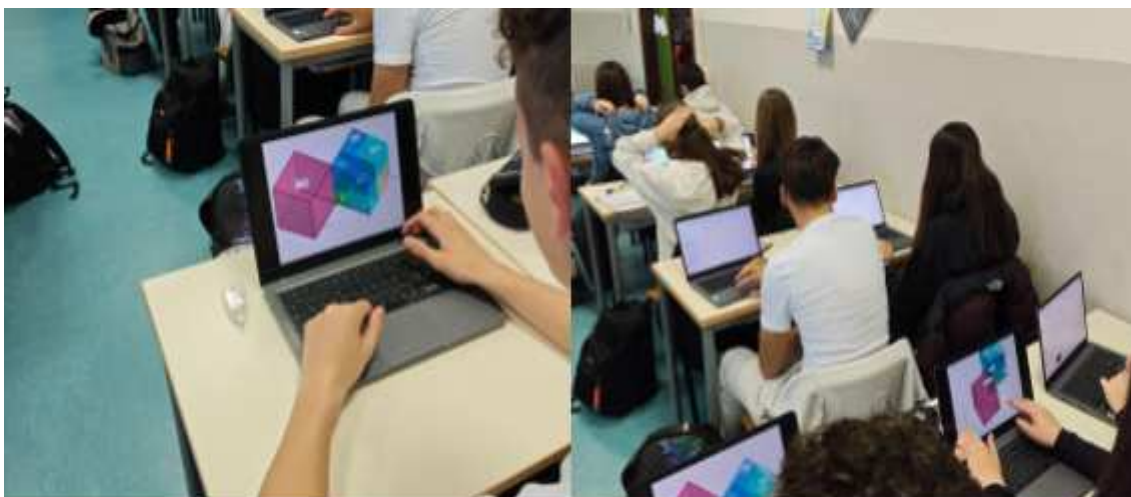


Figura 30 - Studenti della classe 1L, che analizzano il cubo di binomio

Cavaliere & Graziuso (2021) sottolineano inoltre l'importanza di fornire opportunità positive durante lo svolgimento delle attività di gruppo. Il feedback immediato da parte del docente mentre osserva un'interazione positive, una messa in atto di strategie ed abilità efficaci, permette di offrire incoraggiamento e di aumentare l'autostima degli studenti. Dopotutto, il raggiungimento di abilità che agevolano non solo il proprio apprendimento ma anche quello degli altri rappresenta un motivo valido di lode e apprezzamento.



Figure 31 e 32 - Studenti della classe 1L che analizzano la somma per differenza



Figura 33 - Studenti della classe 1L.

Capitolo 4

Analisi comparativa degli esiti

4.1 - Consegna dei test e momento di autovalutazione

Per promuovere una valutazione di tipo formativo, come suggerito da Black e Wiliam (1998), si è scelto di fornire un feedback dettagliato agli studenti con una correzione collettiva degli esercizi prima che questi possano vedere il voto numerico assegnato al loro compito. Si è cercato, in questo modo, di far sì che gli studenti si concentrassero sul processo di correzione dell'errore piuttosto che esclusivamente sulla loro prestazione. Lo scopo di separare questi due momenti è quello di approfittare dell'interesse e dell'apertura mentale che lo studente ha prima di vedere il voto, cercando quindi di evitare la chiusura mentale che spesso avviene una volta ricevuta una valutazione. Purtroppo, che siano soddisfatti o insoddisfatti del voto ricevuto, dopo la ricezione del voto, la maggior parte degli tendono a concentrarsi solamente su quello e difficilmente riescono a correggere e capire adeguatamente gli errori commessi, mostrando spesso un atteggiamento disinteressato.

Approfittando però di questa fase in cui gli studenti sono ancora cognitivamente aperti e ricettivi, si hanno più possibilità che capiscano al meglio gli errori o addirittura che siano loro stessi a sentire il bisogno di correggerli, quando per esempio si sono trovati alla lavagna delle incoerenze. Con questo differente approccio, si è cercato di trasformare l'errore in un'ulteriore opportunità di apprendimento, recupero o rinforzo, in un clima sereno e collaborativo.

Questo risulta coerente con quanto affermato anche da Zan (2007), la quale parla di un approccio che valorizza l'errore come tappa del processo di apprendimento, aiutando a ridurre di molto l'impatto emotivo negativo e l'ansia che spesso la valutazione sommativa può avere, soprattutto in una materia percepita spesso in modo negativo come la matematica. Effettivamente, senza vedere immediatamente il voto sul compito, il clima in classe è risultato più sereno, gli alunni hanno analizzato con più attenzione gli errori realizzati, spesso rimanendo stupiti dei numerosi errori di distrazione che hanno fatto.

In seguito alla correzione collettiva e con la guida degli errori marcati dal docente, ogni studente si è attribuito un punteggio per ogni esercizio svolto. Seguiva poi un momento di confronto e condivisione direttamente con il docente, il quale discuteva con ogni alunno i punteggi dei vari esercizi e poi indicava i punteggi che lui stesso aveva assegnato loro e il relativi voto finale.

Black & Wiliam (1998) parlano del fatto che spesso alcuni alunni possono essere addirittura troppo severi con se stessi. Questo è capitato quando una studentessa della classe II, la quale ha anche attribuito dei punteggi adatti ai suoi esercizi, ha affermato di aver "abbassato" il voto finale perché il voto iniziale le sembrava troppo alto.

Per avere la capacità di autovalutarsi, secondo Black e William (1998) gli studenti necessitano di

"a sufficiently clear picture of the target that their learning is meant to attain. When pupils do acquire such an overview, they then become more committed and more effective as learners. Moreover, their own assessments become an object of discussion with their teachers and with one another, and this discussion further promotes the reflection on one's own thinking that is essential to good learning" (p.7).

Il processo di autovalutazione è un processo lento che va costantemente allenato. In queste classi era stato precedentemente proposto quindi per gli studenti non era una novità assoluta. Perché l'autovalutazione sia significativa si ribadisce l'importanza di fissare obiettivi raggiungibili e molto chiari. Lentamente poi gli studenti, con la pratica, arriveranno ad acquisire gli strumenti per autovalutarsi, comprendendo anche quali siano gli obiettivi principali del loro apprendimento e quello che devono fare per raggiungerli. Per questa ragione, come già detto, il feedback del docente è di estrema

importanza e dovrebbe fornire agli studenti indicazioni su come e cosa migliorare, lasciando che diventino responsabili del proprio apprendimento.

Ovviamente, non tutti gli studenti sono riusciti ad attribuirsi una valutazione oggettiva, ma quelli che non ci sono riusciti hanno potuto comunque discutere con il docente degli errori commessi e delle aree di miglioramento, riuscendo comunque, anche se guidati, a portare a termine questo processo che promuove la consapevolezza e il miglioramento costante.

4.1.1 - I risultati dei test

Il test di verifica è stato somministrato alle due classi, come precedentemente indicato, alla fine delle attività svolte in classe. In termini di valutazioni non troviamo una superiorità assoluta di un metodo rispetto all'altro. Le medie sono molto vicine, abbiamo 6,2 per la classe 1I e 6,8 per la classe 1L.

Entrambe le classi sembrano aver raggiunto un livello medio di acquisizione dei contenuti proposti. La classe 1L si distingue per una maggiore uniformità dei risultati, i quali si collocano in un fascia intermedia. In contrasto, nella classe 1I si nota una dispersione maggiore, con prestazioni che variano maggiormente. Nonostante in questa classe si registrano alcuni risultati eccellenti, si notano anche lacune più evidenti.

La differenza più rilevante che si denota riguarda però le strategie risolutive e le tipologie di errori che sono stati commessi dagli alunni delle due classi, come anche alla capacità di interpretazione delle consegne. Gli alunni della classe 1L sembrano aver acquisito una maggiore capacità di interpretazione delle consegne e un'applicazione più rigorosa delle procedure. Invece, nella classe 1I si riscontra una maggiore variabilità negli approcci e una maggiore frequenza di errori di distrazione o di interpretazione.

4.2 - Analisi dell'esecuzione degli esercizi: punti di forza e criticità

Dall'analisi dei testi sono emerse alcune propensioni in particolare, in base all'approccio didattico adottato. Nella classe 1I, l'approccio geometrico intuitivo ispirato ad Emma Castelnuovo sembra abbia stimolato maggiormente il pensiero visivo, rendendo i concetti astratti entità manipolabili e concrete. degli alunni. La maggior parte di loro, nell'esercizio 3, sono riusciti a visualizzare correttamente il passaggio del quadrato di binomio a quello di trinomio senza l'ausilio di calcoli algebrici. Sempre la classe 1I, ha dimostrato una buona capacità davanti a richieste di fornire rappresentazioni grafiche di prodotti notevoli non standard. Avendo gli studenti costruito fisicamente i quadrati con i cartoncini durante le ore di laboratorio, la vista del foglio bianco nell'esercizio 1b oppure nell'esercizio 3, non ha rappresentato per loro una novità ma solamente il semplice richiamo di un'azione motoria e visiva già compiuta. L'astrazione è passata dalle loro mani, rendendo più facile e immediato il passaggio dall'oggetto al simbolo.

La classe 1L, alla quale è stato proposto il laboratorio matematico con Geogebra, ha dimostrato una maggiore rapidità nell'eseguire l'esercizio 2. Il fatto che il software geometrico offra feedback immediati sembra aver agevolato una maggiore precisione nel calcolo. Gli studenti hanno compreso che se cambiano un segno o un numero, l'intera struttura collassa o cambia forma, questo perché hanno potuto vedere la formula "lavorare" in tempo reale. Nonostante questa classe abbia lavorato più rapidamente, c'è sempre il rischio che l'astrazione rimanga legata allo strumento. Infatti, davanti alla richiesta di produrre una rappresentazione grafica a mano, alcuni studenti hanno avuto difficoltà perché non avevano il feedback immediato del software.

Per analizzare meglio l'impatto dei due approcci, si propone un'analisi dei blocchi degli esercizi:

Esercizio 1 (rappresentazione del quadrato di binomio)

Entrambe le classi hanno dato risposte generalmente corrette, ma con sfumature diverse. Nella classe 1I la maggior parte degli studenti ha disegnato le aree ben proporzionate, riconoscendo i rettangoli uguali come il "doppio prodotto" del quadrato di binomio.

Nella classe 1L, alcuni hanno correttamente risolto la parte algebrica, ma hanno avuto qualche difficoltà ad assegnare correttamente le aree come due volte 6a, scrivendo invece due volte 12a.

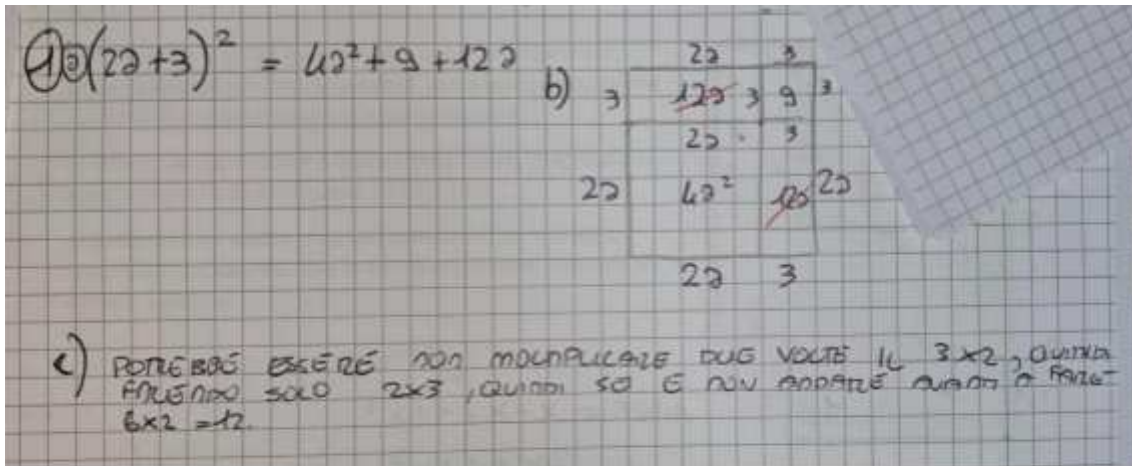


Figura 34 - Esercizio 1 non svolto correttamente

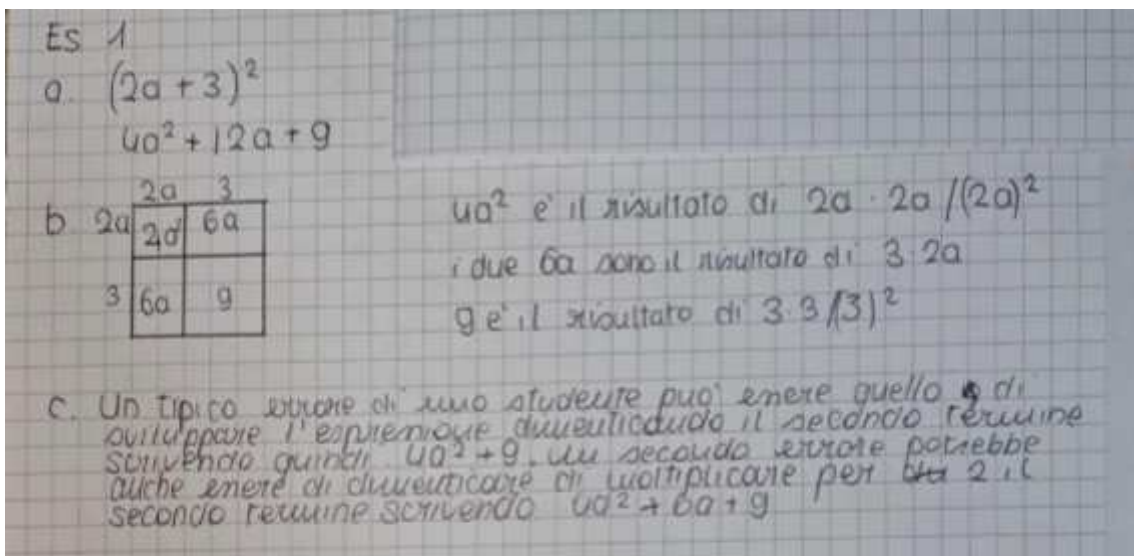


Figura 35 - Esercizio 1 svolto in maniera corretta

Esercizio 2 (Teoria e semplificazioni)

La classe 1L ha riscontrato punteggi nettamente superiori rispetto alla 1I in questo ambito, soprattutto nella sezione del Vero/Falso. La manipolazione dinamica delle figure geometriche tramite GeoGebra sembra aver aiutato gli studenti a fissare meglio il concetto in questione.

ES 2

a) $(x-1)^3 - (3x-1) + 3x^2 =$
 $= x^3 - 3 + 9x - 3x^2 - 3x + 1 + 3x^2$
 $= x^3 + 6x - 2$

$(x+y-1)^2 - (2xy+1) + 2(x+y) =$
 $= x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 - 2xy - 1 + 2x + 2y =$
 $= x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y$

b) $2(a^3-1) + 3(x^2+2x+2) = 2(x+1)(x-1) + 3(x+1)^2$
 $2a^3 - 2 + 3x^2 + 6x + 6$
 $2a^3 + 4 + 3x^2 + 6x$

Figura 36 - Esercizio 2 scelto con errori sia algebrici che concettuali

Esercizi 3 e 4 (Applicazioni)

Negli esercizi 3 e 4 le due classi hanno avuto un profitto pressoché uguale, ma anche qui con una differenza. Mentre negli elaborati degli studenti della classe 1I si evince un ragionamento più complesso, nella classe 1L gli studenti hanno propenduto nell'applicare meccanicamente la formula imparata.

a. $\overline{AB} = x-2$ $BC = x+2$ $A = (x-2)(x) = x^2 - 2x$ area

b. ① $= (2)(x-2)$
 ②
 ③

c. $(5-2)(5)$
 $3(5) = 15$ area

Es4

a) Considera la figura geometrica e la parte evidenziata, scrivi l'espressione che rappresenti l'area evidenziata prima in forma di prodotto notevole e poi sviluppata.

b) Indica, per ogni sezione di area della figura, l'espressione algebrica per calcolare quella singola area.

c) Verifica che il valore ottenuto sostituendo $x = 5$ sia lo stesso sia nell'espressione in forma di prodotto notevole sia nel suo sviluppo.

Figura 37 - Esercizio 4 in cui lo studente non ha compreso la corretta suddivisione della figura geometrica proposta

4.3 - Riflessioni sul percorso: tra coinvolgimento e difficoltà

I dati visti nel paragrafo precedente offrono una stima dei risultati di questo specifico argomento. Riflettere, invece, sui processi di apprendimento, sulle difficoltà riscontrate, sul clima d'aula e la partecipazione degli studenti, ci permette di comprendere meglio le dinamiche cognitive ed emotive che hanno portato a quei risultati. L'obiettivo è quindi quello di valutare, al meglio possibile, l'efficacia dei due approcci incrociando i dati dei questionari con le osservazioni del diario di bordo annotate durante tutta la durata delle attività.

4.3.1 - Descrizione dell'atmosfera in classe

L'atmosfera che si è creata durante i laboratori ha certamente rappresentato una rottura con la solita routine della lezione frontale e delle attività svolte in classe fino a quel momento.

Nella classe II l'uso di materiali fisici e manipolabili ha suscitato generalmente un clima di curiosità e scoperta. Inizialmente ci sono state delle lamentele perché alcuni studenti hanno paragonato queste attività più manuali ad attività tipiche della scuola dell'infanzia o della scuola primaria. Questo iniziale pregiudizio è stato fortunatamente superato quando gli studenti hanno scoperto perché dovevano tagliare i cartoncini e quello che si poteva rappresentare con questi semplici pezzi di carta.



Grafico 1 - Distribuzione delle preferenze, per le due classi, rispetto a quello che gli studenti hanno trovato utile

Qui sotto una delle risposte indica proprio l'importanza di aver visto i pezzi che si incastravano.

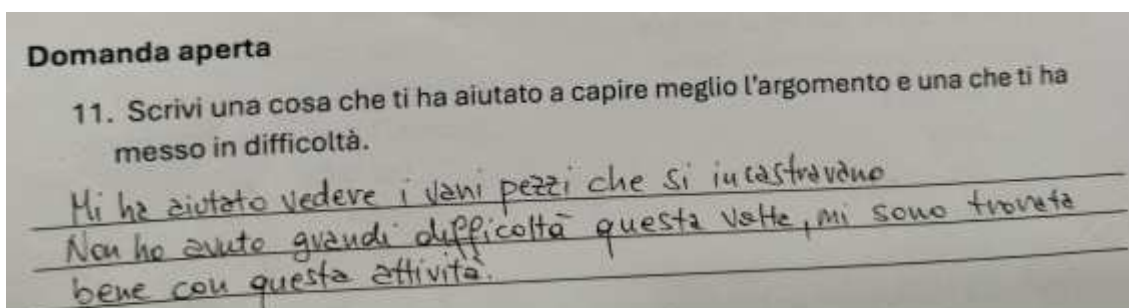


Figura 38 - Risposta alla domanda aperta del questionario da parte di uno studente

Il diario di bordo rivela un dato molto positivo: il livello di interesse e partecipazione è stato decisamente alto. L'aspetto più rilevante, tuttavia, è stato il coinvolgimento attivo di studenti che solitamente restano in disparte e non partecipano attivamente. Certamente la novità delle attività, superati eventuali preconcetti, ha aiutato molto la classe, normalmente non particolarmente partecipativa ad attivarsi. Il questionario, infatti, conferma che il 61% degli studenti ha trovato "molto" o "moltissimo" utile lavorare con materiali concreti. Tanti di loro hanno anche apprezzato il fatto che l'attività prevedesse il lavoro in gruppo, cosa che dava loro la possibilità di aiutarsi e supportarsi a vicenda.

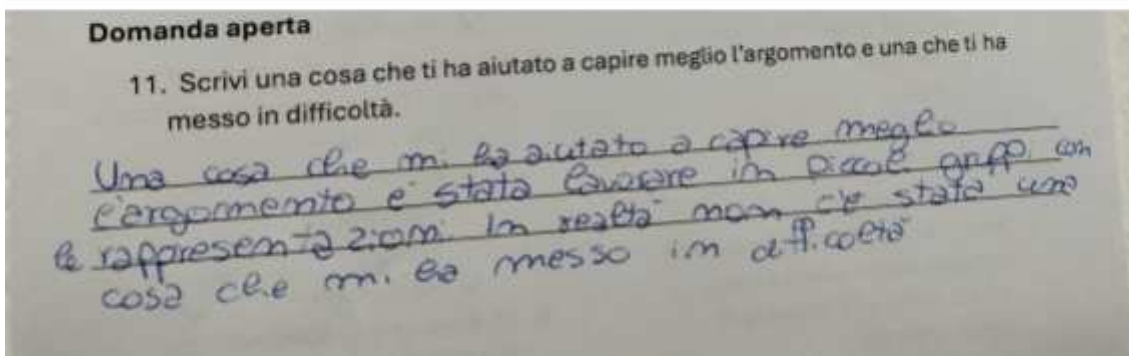
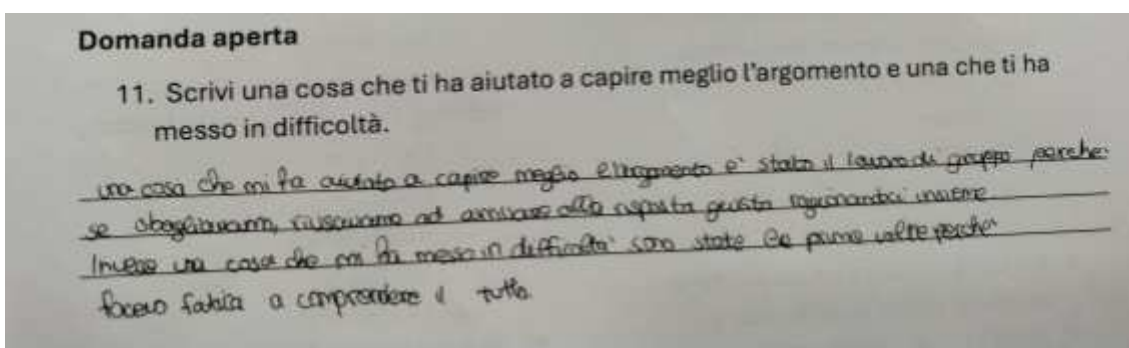


Figure 39 e 40 - Risposte alla domanda aperta del questionario da parte di due studenti

Gli studenti procedevano per tentativi ed errori nel riconoscere e manipolare le aree, alcuni hanno avuto però bisogno di essere indirizzati in maniera più marcata verso il collegamento tra materiale e formula. Sicuramente molti di loro, come rilevato dal questionario, si sono sentiti aiutati molto dalle rappresentazioni grafiche, nonostante abbiano rilevato altre difficoltà.

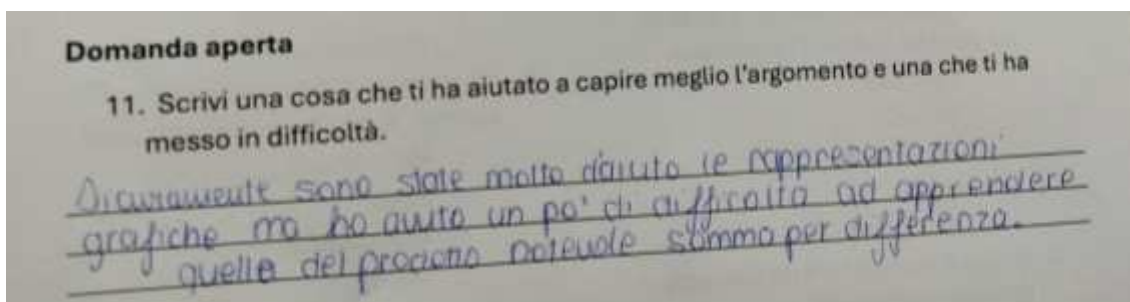
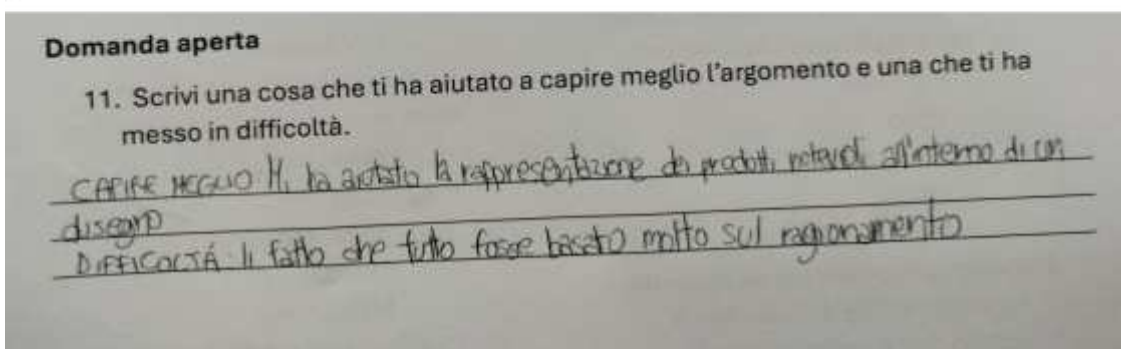
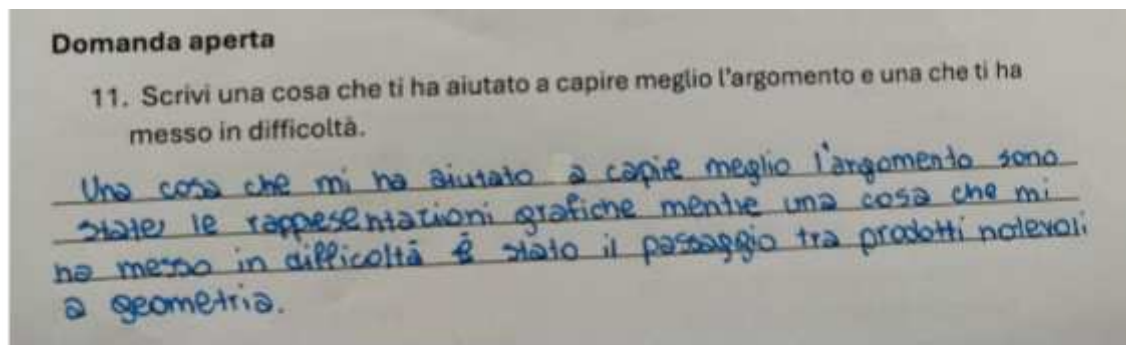


Figure 41, 42 e 43 - Risposte alla domanda aperta del questionario

In una delle risposte aperte al questionario, è interessante notare che, nonostante lo studente sia sincero e affermi di non aver capito nulla o poco nulla dell'argomento, comunque sembra che abbia apprezzato le rappresentazioni grafiche.

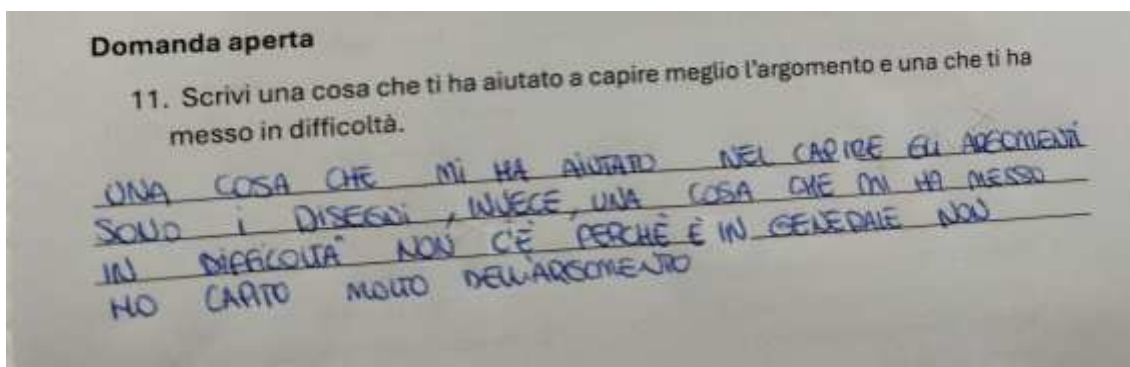


Figura 44 - Risposta alla domanda aperta

Con questa classe, la difficoltà maggiore riscontrata è stata la gestione dei tempi, in quanto manipolare oggetti e costruirli ha richiesto parecchio tempo in più rispetto a quello preventivato, rallentando la tabella di marcia.

Nella classe 1L il coinvolgimento è stato non a gruppi, ma individuale, anche se gli studenti si confrontavano e discutevano spesso con i compagni di banco. Il fatto di avere a disposizione un Chromebook personale ha permesso anche agli studenti solitamente più distratti di avere un coinvolgimento maggiore. Dal questionario risulta che il 58% della classe si è sentito “molto” aiutato in questo frangente.

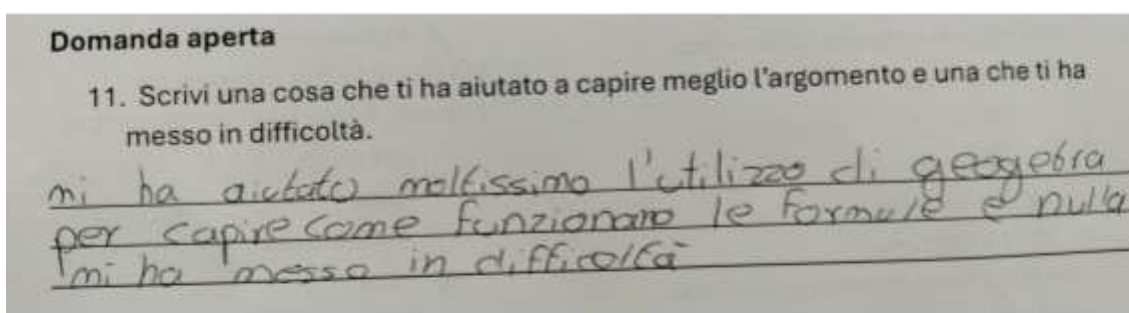
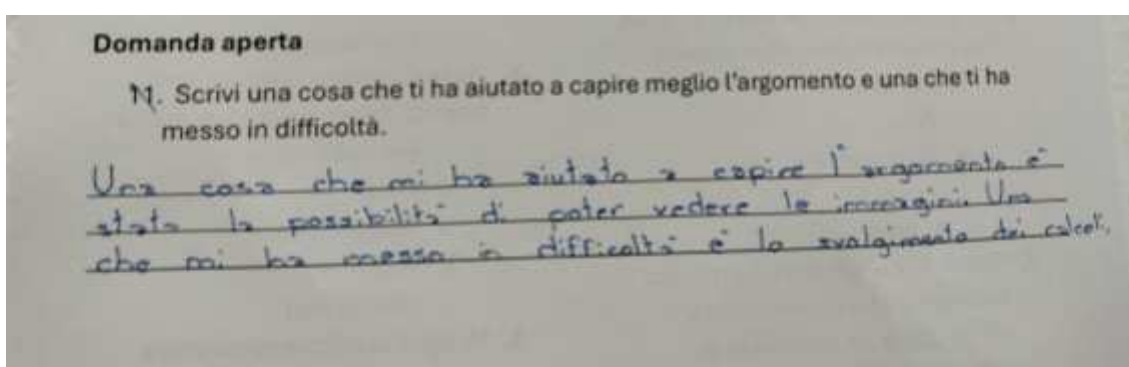


Figure 45 e 46 - Risposta alla domanda aperta

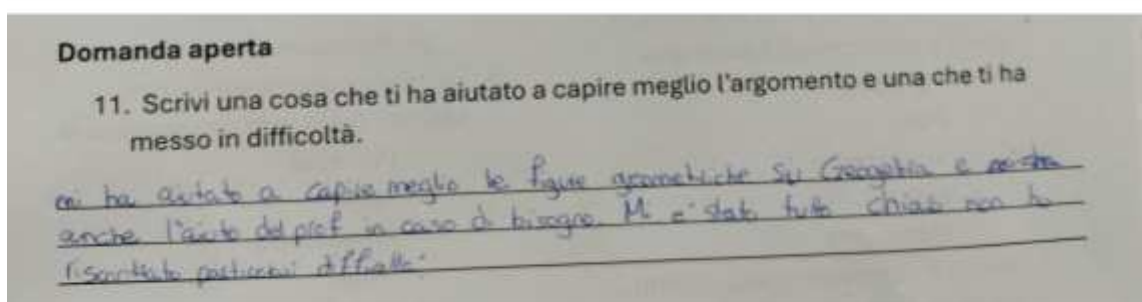
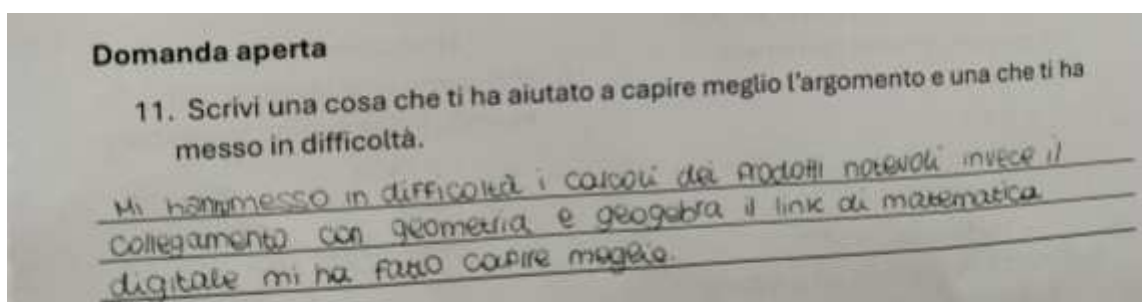


Figure 47 e 48 - Risposte alla domanda aperta

La questione dell'autonomia qui è stata potenziata dal fatto che gli studenti avessero già la figura esattamente costruita che dovevano solamente manipolare, non c'era nulla da costruire; non dovevano quindi richiedere al docente la correttezza delle loro supposizioni, né verificarle da soli.

Le difficoltà maggiori riscontrate durante le ore nella classe 1L sono state soprattutto di tipo tecnico, non tutti gli studenti avevano familiarità con GeoGebra, ma questo ha messo in moto una situazione di cooperazione tra studenti, dove i più esperti hanno aiutato i compagni in difficoltà.

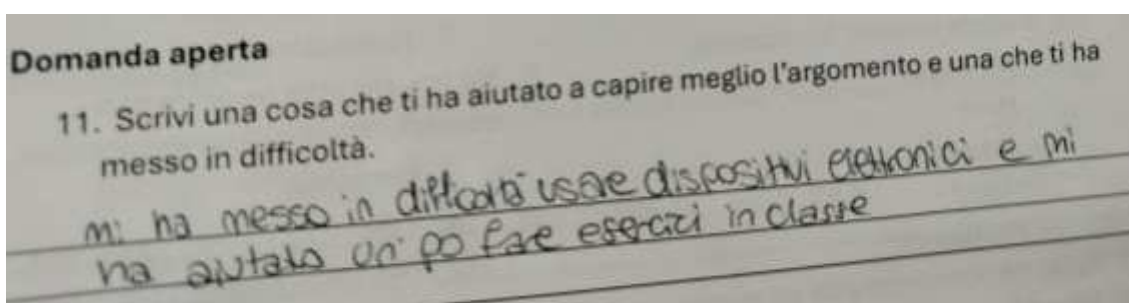


Figura 49 - Risposta alla domanda aperta del questionario

Durante lo svolgimento di tutte le attività laboratoriali, il docente non solo ha svolto il

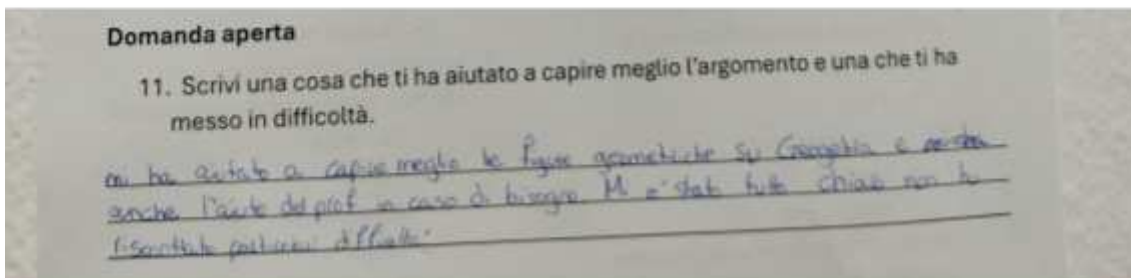
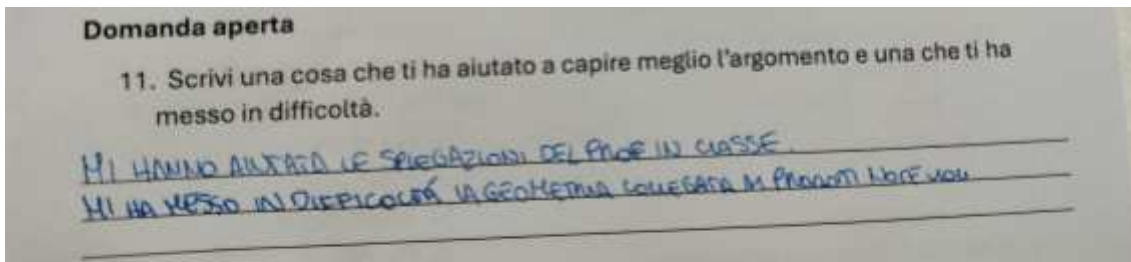


Figura 50 e 51 - Risposte alla domanda aperta del questionario

lavoro di osservazione ma anche di supporto, di ripetizione e di chiarimento di eventuali dubbi. Dopotutto, come ricordano Castellini e Spagnolo (2023), il ruolo dell'insegnante non è solo quello di progettare l'attività di laboratorio ma anche di "ascoltatore, orchestratore di discussioni, mediatore, modello e attivatore di atteggiamenti metacognitivi" (p.28). Più di qualche studente afferma che l'aiuto supplementare e il supporto del docente li ha aiutati a superare le difficoltà iniziali e, poi, a capire gli argomenti trattati.

In entrambe le classi c'è la convinzione, emersa dalle risposte al questionario, che il metodo operativo è preferibile alla lezione tradizionale, in modo schiacciante, a dimostrazione che il coinvolgimento attivo è la chiave per superare le perplessità degli studenti riguardanti la matematica, come si può vedere nel grafico 3.



Grafico 2 - Preferenze del metodo di lavoro in classe

4.3.2 - Le criticità emerse durante il laboratorio

Durante le attività in classe, durante le esercitazioni ed anche durante il test, ci sono stati numerosi errori comuni alle due classi. Gran parte di questi errori derivavano principalmente dall'influenza delle conoscenze pregresse oppure da precedenti lacune, sia di tipo procedurale che di gestione del calcolo.

Black e Wiliam (1998) sottolineano l'importanza di rendere visibili le idee degli studenti e di lavorare sugli errori come risorsa cognitiva. Questo è stato fatto discutendo con gli alunni sugli errori più comuni, non appena queste sono comparsi durante le ore di esercitazione. Infatti molto spesso, durante il lavoro iniziale nei gruppi, alcuni studenti hanno utilizzato questa nuova conoscenza introdotta e hanno deciso applicarci gli schemi appresi precedentemente. La nuova annotazione può essere più difficoltosa, poiché ha una certa somiglianza con ciò che lo studente è abituato a trattare in algebra. Quello che il docente può fare per aiutare gli studenti è esplicitarli, anche prima che questi errori appaiano, in un primo momento dell'attività didattica, riuscendo magari che ne vengano creati meno oppure addirittura per niente.

Il primo tipo di errore, quello che abbiamo detto deriva dall'influenza di conoscenze pregresse, come afferma Zan (2007) non è da considerarsi frutto di mancanza di conoscenza o abilità, ma semplicemente il risultato di un processo di pensiero coerente dello studente, derivante da un ipergeneralizzazione di regole apprese precedentemente. Uno degli errori più comuni riscontrati è l'applicazione della proprietà delle potenze rispetto al prodotto, legato ad un'analogia, errata, con la proprietà distributiva:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Nella classe 1I la manipolazione fisica e la creazione attiva dei cartoncini ha funzionato quasi come un correttore automatico. Come emerso durante le attività, gli studenti si rendevano conto subito del vuoto lasciato da “qualcosa” mentre costruivano lo sviluppo della formula di un quadrato di una somma. Le risposte al questionario confermano questa efficacia, la maggior parte della classe scrive che gli esempi con le figure sono stati “molto” o “moltissimo” utili.

Nella classe 1L, tramite il confronto dinamico, gli studenti hanno potuto osservare come l'area totale non coincidesse con la somma dei singoli quadrati, evidenziando immediatamente che la proprietà distributiva, in questo caso, non vale.

Il secondo tipo di errore derivava principalmente da difficoltà pregresse nel calcolo letterale o, come troppo spesso accade, da semplici errori di distrazione. Lo studente, per esempio, capiva che serviva calcolare un doppio prodotto, ma si dimenticava semplicemente di moltiplicare per 2, oppure nello sviluppo di tripli prodotti di un cubo di binomio: $3(a)^2(-2) + 3(a)(-2)^2$ diventa $+6a^2 - 6a$. Questa tipologia di errori è comparsa di più nella classe 1L, dove il laboratorio si è svolto con l'ausilio di Geogebra. Senza il supporto del software che offriva agli studenti un supporto visivo, questo si è ripresentato molte volte, segno che il supporto digitale, se non adeguatamente accompagnato da una costante pratica di calcolo, rischia di ridurre l'autonomia procedurale degli studenti.

Altre criticità che sono emerse riguardavano, oltre il cubo di binomio, anche il quadrato di trinomio, mentre il quadrato di binomio è stato interiorizzato, tutto sommato,

abbastanza bene. Il cubo di binomio richiede agli studenti una capacità di astrazione spaziale superiore e sia nel caso dell'approccio attivo e concreto ispirato a Castelnuovo che quello che prevedeva l'utilizzo di Geogebra, gli studenti hanno faticato. Nella classe 1I alcuni studenti hanno trovato difficoltoso visualizzare i tripli prodotti perché, a differenza dello sviluppo del quadrato di binomio, che è nel piano, questi non lo sono. Allo stesso modo, nella classe 1L, nonostante Geogebra permetta di ruotare il solido, la perdita di contatto diretto sembra aver reso difficoltoso per alcuni studenti, complici anche la presenza di lacune pregresse, capire la differenza tra volume e area, portandoli a errori nei gradi dei monomi a^2b e a^3 .

Per quanto riguarda, invece, il quadrato di trinomio si è assistito ad un sovraccarico cognitivo. Sembra che l'aumento dei termini abbia abbassato l'attenzione degli studenti, portandoli a dimenticare parte dei doppi prodotti: $(a + b + c)^2$ diventa $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$ omettendo $2bc$ e $2ac$. Tutto questo porta a dimostrare che senza un solido controllo procedurale, il calcolo diventa particolarmente fragile.

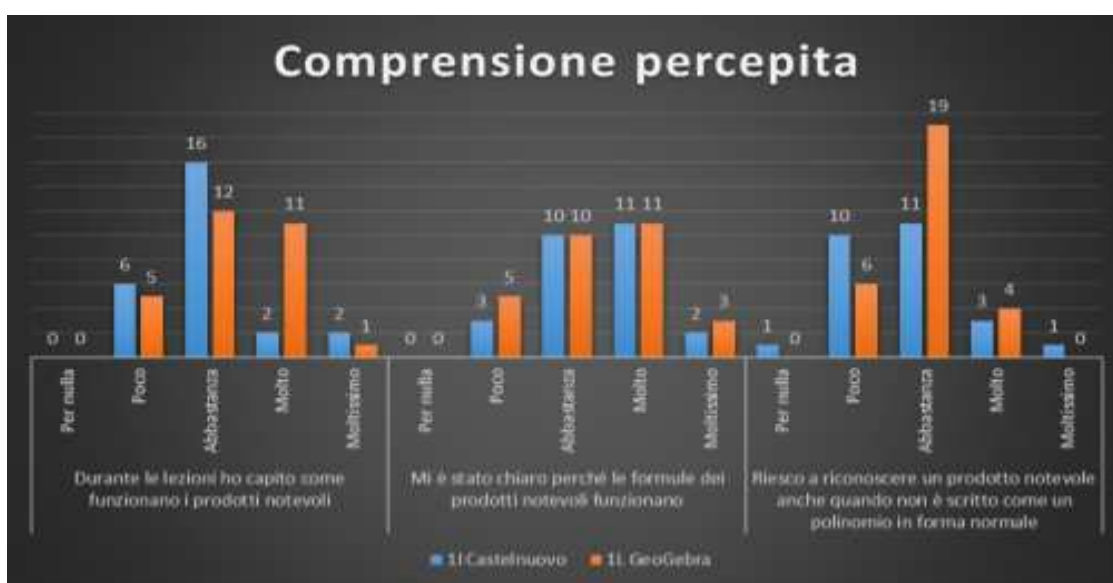


Grafico 3 - Comprensione percepita degli studenti

Il grafico 3 indica invece l'autovalutazione degli studenti rispetto al proprio percorso di apprendimento. Si può notare che, sebbene entrambi i gruppi abbiano acquisito una solida consapevolezza teorica, la classe 1L sembra abbia percepito una maggiore sicurezza e una capacità di generalizzazione, indicando di sentirsi più preparati ad affrontare esercizi che si discostano dai modelli standard presentati durante le lezioni.



Grafico 4 - Distribuzione su cosa gli studenti hanno trovato difficoltà e sulla strategia adottata dopo un errore

Un ulteriore dato sul quale vale la pena soffermarsi è quello sulle strategie di correzione, dove quasi metà degli studenti della classe 1L “cerca di capire dove ha sbagliato”, mentre metà degli studenti della classe 1I opta per “rifare i calcoli”. Ciò potrebbe suggerire che l’approccio software adottato nella classe 1L porti ad una diagnosi dell’errore, mentre l’approccio manipolativo e concreto adottato nella classe 1I favorisca una ricostruzione del processo dall’inizio.

4.3.3 - Analisi delle difficoltà incontrate

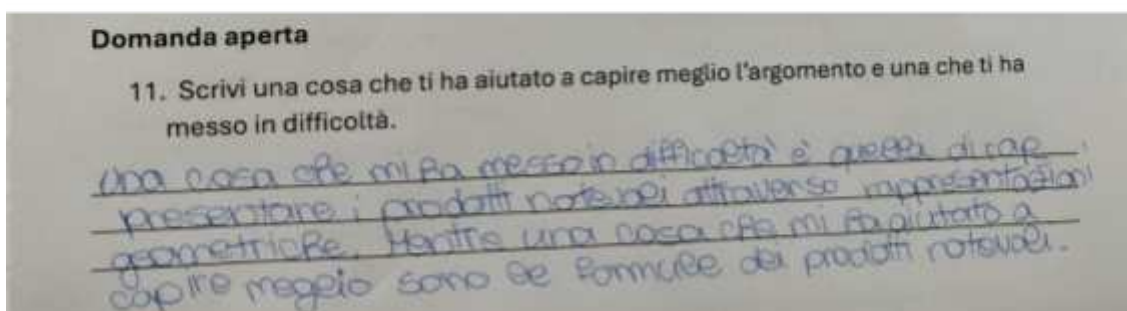
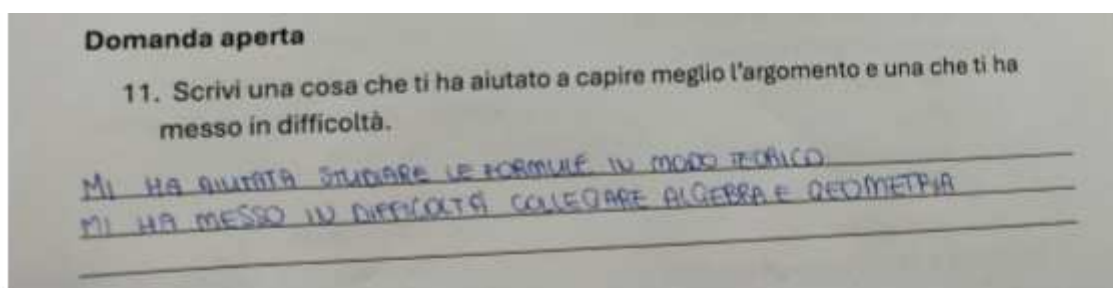
Benché l’entusiasmo per le attività laboratoriali è stato in buona sostanza elevato in entrambe le classi, l’analisi non può esimersi dallo studio delle criticità emerse. Dal questionario, dal test e dal diario di bordo si capisce che le difficoltà sono legate alla tipologia di approccio didattico.

Per quanto riguarda la classe 1I, che ha lavorato con materiali concreti, lo scoglio principale non è stato il comprendere il concetto, ma la sua formalizzazione. Sono stati ben 9 studenti, sul totale di 28, che hanno indicato come difficoltà principale “lo svolgere i calcoli”. Questo dato è confermato nelle valutazioni dell’esercizio 2a del test, dove la media della classe 1I è inferiore a quella della classe 1L. Anche considerando un

livello di partecipazione ed interesse alle attività abbastanza alto, alcuni studenti hanno riscontrato molta difficoltà nel passare dal modello concreto all'algebra sul foglio. Il salto di astrazione per questi studenti ha giocato un ruolo importante, dopo aver capito che, ad esempio, l'area del quadrato di binomio è formata da quattro parti, il fatto di tradurre questo concetto in monomi corretti richiede un rigore algebrico che il materiale fisico non fornisce.

Nella classe 1L, mediata con l'aiuto di GeoGebra, 10 studenti su 29 totali hanno dichiarato che la difficoltà maggiore è stata "riconoscere la tipologia di prodotto notevole", indicando che qui il problema è più di tipo cognitivo. Malgrado la classe 1L abbia ottenuto, in generale, risultati migliori, gli studenti si sentono più insicuri nel distinguere le figure geometriche quando queste non vengono presentate loro tramite forme standardizzate. La struttura preimpostata del software può aver indotto un automatismo che bypassa la fase di analisi della formula algebrica. Dal diario di bordo, infatti, si evince come alcuni studenti, sebbene interessati, esprimevano non poca frustrazione quando la formulazione da loro ipotizzata non corrispondeva al disegno digitale.

L'elemento in comune ad entrambe le classi sta nel fatto che molti studenti vedono ancora la geometria come "disegno" e l'algebra come "calcolo", non afferrando che sono due linguaggi che indicano la stessa cosa. Infatti 11 studenti della classe 1I e 9 della classe 1L indicano che la difficoltà per loro è stata "collegare algebra e geometria".



Domanda aperta

11. Scrivi una cosa che ti ha aiutato a capire meglio l'argomento e una che ti ha messo in difficoltà.

Mi ha aiutato molto a capire l'argomento scrivere le formule e applicarle nei calcoli delle espressioni. Invece ho trovato difficile applicare le formule sulla geometria.

Domanda aperta

11. Scrivi una cosa che ti ha aiutato a capire meglio l'argomento e una che ti ha messo in difficoltà.

Una cosa che mi ha messo molto in difficoltà è l'applicazione dei prodotti notevoli sulla geometria. Una cosa che mi ha aiutato è stato fare ~~gli~~ alcuni esercizi assieme al prof.

Figure 52, 53, 54 e 55 - Risposte alla domanda aperta del questionario

E' quindi interessante notare quello che gli studenti hanno indicato come la loro strategia di reazione ad un errore, mentre la maggioranza della classe 1I è "rifare i calcoli" o "cercare di capire dove ho sbagliato", la strategia dominante nella classe 1L è "cercare di capire dove ho sbagliato". Questo potrebbe suggerire che l'approccio tramite GeoGebra, che offre un'evidenza immediata dell'errore, sia un terreno di allenamento migliore alla ricerca dell'errore rispetto all'approccio con materiali concreti.

Queste difficoltà potrebbero spiegare, almeno in parte, perchè alcuni studenti, 13 nella classe 1I e 9 nella classe 1L, indichino di trovare ancora più utile la "spiegazione tradizionale", questi studenti sono, con molta probabilità quelli che sentendosi non ancora indipendenti in attività di questo tipo, cercano nel docente la rassicurazione della formula "già pronta".

In sintesi le difficoltà incontrate confermano che nell'approccio con materiali concreti si necessita di tempo ulteriore da dedicare alla "traduzione" dei materiali all'algebra per evitare che lo studente sia privo di quegli strumenti che gli consentono il calcolo puro, quando ne avrà bisogno. Mentre nell'approccio digitale si richiede una guida da parte del docente più incalzante per evitare che la velocità del software sostituisca la riflessione sul dualismo figura/formule.

Capitolo 5

Discussione e conclusioni

5.1 - Considerazioni didattiche: vantaggi e limiti di ciascun approccio

La sperimentazione nel complesso è risultata essere un buon metodo di studio e di analisi degli approcci utilizzati. Ha permesso di osservare che non esiste un metodo in assoluto più efficace per l'insegnamento dei prodotti notevoli, ma che ogni proposta didattica attiva diversi canali di apprendimento. Il lavoro svolto con la classe II con l'utilizzo di materiali concreti e operativi, ispirata dai lavori di Emma Castelnuovo, ha confermato che il pensiero della Castelnuovo sia attuale più che mai, sottolineando come il passaggio dal "concreto" sia fondamentale per sviluppare il significato.

L'entusiasmo e la partecipazione rilevati nella classe II confermano l'idea di Bolondi (2016), secondo cui il laboratorio di matematica deve essere visto non come spazio fisico, ma come una vera e propria pratica didattica in cui l'allievo è posto al centro di un processo di costruzione di significati, superando la passività della lezione trasmissiva.

Tra i vantaggi di questo tipo di approccio troviamo:

- la solidità concettuale, i materiali concreti tendono ad impedire lo sviluppo delle più classiche delle misconcezioni. Lo studente, quindi è portato a non dimenticare, ad esempio, il doppio prodotto poiché nello sviluppo geometrico "mancherebbero dei pezzi";
- l'inclusività e partecipazione, come emerge dal diario di bordo, l'uso di materiali

concreti ha, in qualche modo, appianato le differenze tra gli studenti e, lavorando in gruppo, anche ai più timorosi è stato permesso di manipolare gli oggetti senza la “paura del calcolo”.

L’approccio attivo con strumenti concreti ha, però, evidenziato il limite del tempo di esecuzione, la manipolazione attiva richiede tempi dilatati rispetto, ad esempio, alla lezione frontale. Oltre a questo, il rischio più grosso con l’approccio che utilizza i materiali concreti è che lo studente resti vincolato alla rappresentazione geometrica, dal test è emerso, infatti, che molti studenti hanno faticato per tradurre in algebra il linguaggio geometrico.

Il lavoro svolto con la classe 1L, tramite l’approccio digitale, ha evidenziato come il software possa, in certi casi, sviluppare le capacità analitiche degli studenti. I risultati, infatti, supportano la tesi di Zucchetti (2014), secondo cui l’uso di supporti digitali non rappresenta un mero artificio tecnologico, ma offre opportunità cognitive concrete. Il fatto di poter manipolare in maniera dinamica le figure geometriche permette di visualizzare immediatamente le loro proprietà algebriche, astratte invece nel calcolo tradizionale, facendo diventare lo strumento informatico un vero mediatore di apprendimento.

Tra i vantaggi dell’approccio digitale troviamo:

- il feedback immediato del software, tramite la manipolazione dell’immagine, permette di verificare subito un’ipotesi formulata dallo studente, permettendo di ridurre i tempi di errore e verifica dello stesso;
- il software aiuta lo studente a tradurre quello che sta guardando dalla geometria all’algebra, gli studenti della classe 1L sono stati, infatti, più sicuri nel riconoscere le strutture geometriche, anche non standardizzate, nel test;
- il software spinge lo studente a chiedersi attivamente il motivo della sua ipotesi fallace, favorendo la metacognizione.

Allo stesso modo dell’approccio con materiali concreti, anche con questo approccio non mancano le limitazioni, nello specifico per qualche studente l’impedimento più grande, all’inizio, ancora prima del formalismo algebrico, è stato l’utilizzo concreto del

software, rischiando di allontanare il focus dal concetto di prodotto notevole. Il rischio più grande è quello che la velocità del software diventi un impedimento, rischiando di portare ad una risoluzione meccanica dei problemi. Lo studente, se non guidato, potrebbe risolvere gli esercizi senza aver assimilato pienamente i concetti e l'argomento in questione.

5.2 - Interpretazione rispetto alle ipotesi iniziali

L'ipotesi iniziale si è sviluppata sul fatto che in una classe prima di scuola secondaria di secondo grado, dove gli studenti hanno un'età dove il pensiero astratto è ancora in fase di sviluppo, sarebbe stata più apprezzata e più efficace la metodologia che prevedeva l'utilizzo di materiali concreti, sia rispetto alla didattica tradizionale sia rispetto alla quella digitale.

La classe 1I ha mostrato di saper ricostruire meglio il senso geometrico, infatti il materiale concreto, evidentemente, ha creato un legame, nello studente, più stabile dello schermo, dimostrando che sul piano dell'intuizione l'ipotesi iniziale è stata confermata.

La classe 1L è riuscita, invece, a ottenere risultati migliori della classe 1I nel calcolo, questo potrebbe indicare che l'uso del software è vantaggioso in termini di velocità e precisione, ciò aiuta quindi lo studente ad adattarsi al calcolo algebrico più facilmente.

Un'evidenza fondamentale emersa è che il metodo di Emma Castelnuovo è genericamente neutro riguardo la tecnologia utilizzata, la forza del suo approccio è, infatti, nella struttura logica.

La classe 1L ha registrato alti livelli di partecipazione e gradimento per l'utilizzo di mezzi digitali, questo potrebbe essere considerato come una naturale evoluzione in chiave moderna, più rapida e dinamica, del suo metodo concreto, confermando che l'intuizione di Emma Castelnuovo è valida ancora oggi.

5.3 - Limiti della sperimentazione

Nonostante i risultati positivi della sperimentazione, si rende necessario prendere atto anche dei suoi limiti.

Il primo e più evidente è rappresentato dal fatto che il campione analizzato è troppo esiguo, la sperimentazione su soli 60 studenti, sebbene rappresentativi della scuola di appartenenza, non può essere considerata attendibile per la generalizzazione dei risultati in ambito più ampio e statistico. In aggiunta la sperimentazione ha riguardato un argomento unico, i prodotti notevoli, svolgendosi una finestra temporale veramente limitata. Una didattica di questo genere, sia concreto che digitale, ispirata al metodo di Emma Castelnuovo, richiederebbe una sperimentazione su più classi di gradi diversi, su più argomenti, con una continuità annuale e su più tipologie di istituti per avere valenza statistica.

Una ulteriore limitazione può essere riscontrata se prendiamo in considerazione la persistenza degli argomenti. Il test verifica la preparazione degli studenti immediatamente dopo la fine delle attività laboratoriali, non è stato possibile, né lo sarà in futuro, almeno parzialmente, verificare che i concetti siano stati appresi appieno o che le misconcezioni siano state debellate. Non si potrà sapere, ad esempio, se l'anno prossimo uno studente delle due classi in esame sarà ancora in grado di collegare lo sviluppo di un quadrato di binomio alla sua controparte geometrica senza errori.

Inoltre, come si evince dal diario di bordo, gli studenti hanno risposto alle attività con un coinvolgimento molto alto, ma non si può escludere che questo sia dato dal fatto che attività laboratoriali come queste siano una novità per loro. Insomma non si può escludere l'effetto novità, che l'attività di laboratorio sia stata considerata dagli studenti solo come un cambiamento nella quotidianità e non si può sapere se l'attenzione, la partecipazione o l'entusiasmo dimostrato degli studenti sarebbe lo stesso se attività come questa diventassero la quotidianità in futuro.

Non sono da trascurare poi le variabili di contesto. Nella classe 1L ci sono state, inizialmente, delle difficoltà tecniche legate al fatto che non tutti gli studenti erano abituati all'uso di GeoGebra. Nella classe 1I la gestione dei gruppi, del materiale, e dello spazio in classe ha sottratto tempo alla sperimentazione vera e propria.

Questi fattori esterni non possono non essere presi in considerazione e hanno influenzato la sperimentazione in modo imprevedibile, rendendo il confronto tra le due mediazioni meno "puro", premesso che non si potrà mai avere un confronto "puro".

5.4 - Suggerimenti per sviluppi futuri

Come è emerso dal capitolo precedente, entrambi gli approcci hanno dato i loro frutti, sebbene non allo stesso modo. Attraverso questa sperimentazione certamente non si voleva arrivare ad un unico indiscusso approccio “vincitore”, ma principalmente capire quali processi cognitivi sono stati attivati attraverso questi due laboratori e quali siano i punti di forza e di debolezza di ogni approccio, in modo da poter migliorare ed eventualmente, in futuro, portare in aula altre attività laboratoriali simili. Quello che risulta più utile, a mio avviso, sarebbe un approccio che unisce entrambi i metodi. Questo potrebbe permettere, agli studenti, di osservare e manipolare sia materiali fisici che digitali per arrivare ad un approccio attivo completo. Da una parte non viene tralasciata la manualità, la quale, come abbiamo avuto modo di vedere, può rappresentare una difficoltà non da poco per alcuni ragazzi. Dall’altra parte, invece, si continuano ad usare strumenti digitali, ormai intrinseci nella vita odierna degli studenti.

Questa attività ha reso ancora più chiara l’importanza dell’eredità di Emma Castelnuovo per quanto riguarda lo sviluppo e l’utilizzo del laboratorio di matematica nelle scuole italiane. Attraverso le sue attività e le sue proposte di esperienze attive a scuola, Emma Castelnuovo diventò un’esperta “nel trovare gli oggetti, gli esempi, le parole e le elaborazioni capaci di facilitare l’incontro di molti con la matematica, far sentire loro la potenza del pensare e la felicità di scoprire e capire” (Castelnuovo, 2017, p. 12). Inoltre, l’idea di scoperta che arriva dopo aver osservato e sperimentato, è quello di cui abbiamo immensamente bisogno anche nella didattica della matematica oggi. Personalmente trovo la sua idea di matematica, “in cui è promosso l’uso delle mani, degli oggetti, dei materiali dinamici, e non solo del linguaggio, di formule e di pensiero astratto” (Lanciano & Montinaro, 2023, p.9) estremamente attuale e fondamentale per poi utilizzare i software dedicati alla didattica della matematica. Infatti, senza un’intuizione concreta che porta ad una comprensione matematica, difficilmente si può arrivare ad un utilizzo corretto dei software didattici.

Idealmente quindi, all’interno del laboratorio di matematica, si potrebbe introdurre l’argomento o il concetto matematico con del materiale operativo semplice e manipolabile mentre il software didattico può aiutare a generalizzarlo. Ovviamente,

come base per ogni attività proposta ci deve essere una didattica attenta ai bisogni dei propri studenti e alla costruzione di significati. Castellini e Spagnolo (2023) affermano che

Proprio grazie alle dinamiche di comunicazione e di condivisione tra gli alunni, assume un ruolo principe nel laboratorio la “discussione matematica” che può svilupparsi in più momenti: nella lettura e interpretazione di un testo, nella proposta e analisi delle varie di strategie e anche nel controllo delle soluzioni. Nel laboratorio si usano le mani e il corpo, si opera con oggetti concreti, si usano tecniche e strumenti, si misura e si documenta. Nel laboratorio si discute con i compagni di lavoro e con l’insegnante sull’interpretazione di quello che accade, si progettano azioni e attività di gruppo, si comunica con altri. In questo senso, quello che soprattutto contraddistingue il laboratorio sono l’atteggiamento e il modo di pensare e di operare, più che la presenza di attrezzature e strumenti. (p.29)

In conclusione, mi reputo fortunato ad aver avuto la possibilità di fare questa sperimentazione e portare in classe queste attività, passando da avere un ruolo tradizionale e statico, ad uno più attuale e rilevante, di progettista di ambienti di apprendimento. Come affermano Gabbari et al. (2016), ai giorni nostri risulta “indispensabile infatti avviarsi al superamento della tradizionale impostazione didattica “frontale” e prospettare nuovi scenari tramite azioni, strumenti, strategie e attività che sottendono alle nuove metodologie centrate [...], sul protagonismo e la centralità dello studente” (p.56). Osservare le reazioni degli studenti mentre affrontavano le esperienze da me proposte, vedere le difficoltà, gli errori ma soprattutto i momenti in cui avvengono le intuizioni e le scoperte, per me rappresenta la ragione principale che mi ha fatto scegliere questo lavoro. Proponendo loro attività di questo genere e trasformando l’aula in uno spazio d’azione, non solo si adegua la matematica alla vita vera e in movimento, come affermava Emma Castelnuovo, ma si dà la possibilità, sia agli studenti che all’insegnante, di esplorare ed osservare la realtà, dando vita a momenti unici di continua scoperta a scuola.

Bibliografia

- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G., & Bazzini, L. (2013). Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni. *La matematica nella società e nella cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 6(1), 1–16.
https://iris.unito.it/retrieve/e27ce429-1f21-2581-e053-d805fe0acbaa/ArzarelloBussiBazzini_Emma_Castelnuovo.pdf
- Bartolini Bussi, M. (2007). Il laboratorio di matematica: storia e osservazioni. *Innovazione educativa*, 8, 7–8.
- Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2023). *Matematica. Azzurro I*. Zanichelli.
- Bolondi, G. (2016). Il laboratorio di matematica nelle Indicazioni curriculari per la scuola italiana. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 39(novembre–dicembre), 551–562.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the Black Box: Raising Standards Through Classroom Assessment*. King's College London School of Education.
- Cannizzaro, E., & Lanciano, N. (2024). Le esposizioni di matematica di Emma Castelnuovo: il loro senso pedagogico. *Matematica, cultura e società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 9(2–3), 233–252.
http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_2-3_233_0
- Castellini, A., & Spagnolo, C. (2023). Riflessioni per la progettazione di un laboratorio di matematica. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, (Numero speciale 11), 27–35. G.R.I.M., Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo.
- Castelnuovo, E. (1965). *La matematica nella realtà*. Laterza.
- Castelnuovo, E. (1976). *Didattica della matematica*. La Nuova Italia.
- Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica. Ragionare con i materiali*. Edizioni La Meridiana.

Castelnuovo, E. (2017). *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica*. De Agostini Scuola.

Cavaliere, E., & Graziuso, R. (2021). *Il cooperative learning*. Youcanprint.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Pitagora.

Faggiano, E. (2012). "Integrare" le tecnologie nella didattica della matematica: un compito complesso. *BRICKS*, 4, 98–102.

https://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2017/08/8_Faggiano.pdf

Ferretti, F., Leonetti, E., & Viale, M. (2023). La dimensione linguistica nell'apprendimento della matematica: un esempio di attività laboratoriale. *Quaderni di ricerca in didattica*, 11, 17–25.

https://sites.unipa.it/grim/NumSpec_11_2023_Ferretti.pdf

Gabbari, M., Gagliardi, R., Gaetano, A., & Sacchi, D. (2016). Lo "spazio d'azione", uno strumento per insegnare - Rivoluzionare lo "spazio-aula-scuola" per una didattica attiva. *BRICKS*, 6(1), 51–71.

https://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2017/08/10_Equipe.pdf

Lanciano, N., & Montinaro, R. (2023). *In altri termini. Materiali per laboratori di geometria: Didone, Euclide, Ipazia, Galileo*. StreetLib.

Lanzarini, L. (2019). Inizia tutto con una tartaruga. *BRICKS*, 2, 59–65.

https://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2019/06/2019_2_06_Lanzarini.pdf

Meneghini, M. (2013). Emma Castelnuovo: la nascita di una nuova scuola. *La matematica nella società e nella cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 6(1), 45–80. http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_1_45_0

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*.

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decr

[eto_indicazioni_nazionali.pdf](#)

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Linee guida per gli istituti tecnici*.

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI.pdf

Montone, A. (2012). Il mio nome è GeoGebra: uno strumento per migliorare le pratiche didattiche. *BRICKS*, 4, 124–128.

https://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2017/08/11_Montone.pdf

Unione Matematica Italiana. (2003). *Abilità e conoscenze matematiche per la scuola secondaria di secondo grado*. In *Matematica 2003*.

<https://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf>

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer-Verlag.

Zuccheri, L. (2014). Utilizzo delle tecnologie digitali nella didattica della matematica: moda effimera o opportunità? *Quaderni CIRD*, 8, 23–40.

<https://www.openstarts.units.it/server/api/core/bitstreams/9946f1b1-35b4-467c-9cd0-5e49caea80a/content>