



UNIMORE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE FISICHE, INFORMATICHE E
MATEMATICHE**

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Classe LM-40

Oltre il Limite.

**Come la realtà aumentata può favorire
l'apprendimento del concetto di limite**

Relatrice:

Prof.ssa Chiara Giberti

Correlatore:

Prof. Tommaso Rosi

Correlatrice:

Prof.ssa Sara Bagossi

Tesi di Laurea

Magistrale di:

Laura Sala

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Introduzione	3
1 Didattica dei limiti	5
1.1 Difficoltà più comuni	6
1.1.1 Ostacoli epistemologici	7
1.1.2 Fondamenti matematici e radici cognitive	9
1.2 Analisi delle Indicazioni Nazionali per i Licei e delle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali	11
1.2.1 Indicazioni Nazionali per i Licei	11
1.2.2 Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali	13
1.2.3 Considerazioni generali	13
1.3 Analisi delle proposte didattiche di alcuni libri di testo	13
1.3.1 Analisi del testo "Matematica.blu 2.0 - Vol. 5"	14
1.3.2 Analisi del testo "Colori della Matematica BLU 5"	18
1.3.3 Analisi del testo "Elementi di Analisi Matematica"	20
1.4 Proposte didattiche alternative all'approccio formale	22
2 Principali lenti teoriche alla base della progettazione	27
2.1 Il framework TPACK	27
2.1.1 Realtà Aumentata	31
2.2 Embodied learning	34
3 Didattica dei Limiti con l'implementazione della Realtà Aumen- tata	37
3.1 Augmented Mathematics	38
3.1.1 Svolgimento dell'attività	39
3.1.2 Difficoltà principali riscontrate dagli studenti	40
3.1.3 Feedback a posteriori degli studenti	44
3.1.4 Apporto dell'AR	45
3.2 Walking the limit	45

3.2.1	Apporto dell'AR	47
3.3	Ipotesi di sequenza didattica	47
3.3.1	Sequenza didattica	48
3.3.2	Proseguimento della sequenza didattica	51
Conclusioni		52
A Scheda FSL 4 Febbraio 2026		55
B Verifica finale		58
Bibliografia		61

Introduzione

Questo lavoro di tesi studia come sia possibile rendere più interattivo, e quindi più accessibile, il concetto di limite.

Si comincia da un'analisi della letteratura per capire quali siano gli ostacoli più comuni nell'apprendimento dei limiti. Numerosi ricercatori hanno infatti riscontrato che il concetto di limite è particolarmente difficile da apprendere e hanno individuato alcuni ostacoli cognitivi più comuni che, se tenuti in considerazione durante l'insegnamento, aiutano il docente a individuare in modo più preciso le tecniche di intervento per aiutare i propri alunni. Successivamente è stato analizzato il quadro normativo che dà indicazioni sull'insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado italiana, al fine di capire cosa ci si debba aspettare rispetto alla comprensione dei limiti da parte degli studenti alla fine del secondo ciclo di istruzione. Queste linee guida sono poi state confrontate con le proposte didattiche di alcuni libri di testo per verificare se i contenuti proposti e le modalità didattiche fossero coerenti.

Nel secondo capitolo sono state introdotte due lenti teoriche tratte dalla ricerca in didattica della matematica e utili a inquadrare la progettazione oggetto della tesi: il framework TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) e l'apprendimento embodied. Il primo suggerisce che un insegnante debba conoscere a fondo, non solo la propria materia, ma anche le prassi didattiche efficaci ed essere aggiornato in ambito tecnologico. In aggiunta, deve saper riunire queste tre aree di conoscenza per sviluppare una didattica davvero fruttuosa. Le teorie legate all'importanza dell'apprendimento embodied superano il dualismo cartesiano secondo il quale la mente e il corpo sono entità separate e quindi, quando si impara, sia meglio stare fermi. L'embodiment, al contrario, sottolinea quanto sia fondamentale muoversi mentre si apprende: le ricerche più recenti, infatti, evidenziano risultati di apprendimento migliori quando si integra questo approccio all'interno delle proprie lezioni, valorizzando così sia l'uso di gesti da parte dell'insegnante e degli studenti, sia, per esempio, l'eseguire in prima persona un esperimento.

Questo lavoro di tesi si conclude con una proposta di sequenza didattica per l'apprendimento del concetto di limite, basata su quanto studiato nei capitoli precedenti. In particolare, la sequenza didattica comincerà dall'idea intuitiva di limite che gli studenti naturalmente possiedono e che verrà stimolata ulteriormente grazie all'utilizzo della realtà aumentata. La sequenza poi procederà continuando ad associare i concetti più astratti a rappresentazioni grafiche, provando così a facilitare il salto, matematicamente necessario, dalla concept image alla concept definition di limite.

Capitolo 1

Didattica dei limiti

Numerosi ricercatori in Didattica della Matematica, come per esempio Beyene nella sua tesi di dottorato (Beyene, 2023), concordano nell'affermare che i limiti siano un argomento difficoltoso per la maggior parte degli studenti. Per la prima volta nello studio della matematica, infatti, gli studenti incontrano l'analisi matematica dove, a differenza dell'aritmetica e dell'algebra viste fino a quel momento, non esistono più formule o algoritmi per raggiungere una soluzione. A questa prima difficoltà se ne aggiunge poi una seconda: nonostante a livello grafico i limiti siano piuttosto intuitivi, questa immediatezza non si trasmette nella loro definizione formale esposta in termini di epsilon e delta, ovvero:

Definizione 1.0.1 (Limite di una funzione). Diciamo che l è il limite della funzione $f(x)$ quando x tende a x_0 se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Questa definizione, o le sue varianti in cui vengono utilizzati gli intorno di un punto al posto di ϵ e δ , è la prima definizione che solitamente si incontra nei libri di testo quando si vuole introdurre il concetto di limite.

Inoltre esistono frasi che vengono utilizzate spesso quando si parla di limiti, come per esempio “tende a” oppure “si avvicina a”, le quali, nel tentativo di semplificare il concetto, introducono in realtà ulteriori complicazioni nell'apprendimento del concetto di limite. Queste espressioni alimentano infatti due immagini solo parzialmente corrette: l'avvicinarsi senza mai toccare il limite, che produce un'immagine per la quale le funzioni devono essere monotone quando si avvicinano al proprio limite, e l'idea dinamica secondo cui la funzione “si avvicina” al limite, quando certamente la definizione afferma che la funzione è vicina al limite in un certo intorno, ma una funzione, per definizione, non può “avvicinarsi” a qualcosa. Questa metafora antropomorfa è estremamente intuitiva e funziona molto bene per le prime lezioni, ma l'insegnante dovrà saper guidare il salto mentale degli

studenti dal modello grafico al concetto astratto di limite quando sarà il momento giusto, per evitare di far fossilizzare un’idea che non fa parte della definizione formale. Infine, la parola “limite” stessa porta con sé tutto il vissuto dello studente, il quale potrebbe interpretare i limiti come restrizioni o confini invalicabili.

Questo primo capitolo è quindi dedicato a studiare quali siano le difficoltà più comuni degli studenti quando apprendono il concetto di limite; si prosegue poi analizzando cosa richiede il quadro normativo italiano rispetto a questo argomento e lo si confronta con l’offerta di alcuni libri di testo in adozione nelle scuole italiane. Infine saranno illustrati alcuni esempi di proposte didattiche alternative all’approccio formale.

1.1 Difficoltà più comuni

In questa tesi verranno utilizzati i termini “concept image” e “concept definition” col significato con cui sono stati conati da Tall e Vinner (1981). Secondo gli autori, la concept image è l’immagine mentale che associamo a un concetto, ovvero l’insieme di proprietà e processi che vengono evocati quando parliamo di un certo argomento, essa può essere migliorata negli anni e può anche contenere aspetti discordanti, la cui conflittualità emerge solo se veniamo messi davanti a qualcosa che li evoca contemporaneamente. La concept definition invece è una stringa di parole usata per definire il concetto ed esiste sia quella personale sia quella formale approvata dalla comunità matematica.

Davis e Vinner (1986) affermano che tante misconcezioni sui limiti derivano dalle prime lezioni fatte sull’argomento; sostengono infatti che siano i primi esempi visti dagli studenti a dominare la loro concept image. Per questo, considerando che nelle prime lezioni si usano solitamente locuzioni come quelle viste sopra e si comincia studiando funzioni monotone, quando si chiede agli studenti di dare la definizione di limite qualche tempo dopo aver introdotto la definizione formale, Tall e Vinner (1981) notano che la maggior parte di essi tende comunque a dare una definizione di limite dinamica, in cui il limite non viene mai raggiunto, o comunque non del tutto corretta, come per esempio:

“Quando x tende ad a , il valore di $f(x)$ tende a c ”

“ $|f(x) - c| < \epsilon$ per tutti i valori positivi di ϵ con x abbastanza vicino ad a ”

“Quando $x \rightarrow a$, $c - \epsilon \leq f(x) \leq c + \epsilon$ per ogni $n > n_0$ ”

“Quando x va sempre più vicino ad a , il valore della funzione è uguale a c ”

A tutto questo si aggiunge il fatto che, durante la trasposizione didattica (ovvero la trasformazione da sapere sapiente a sapere insegnato), potrebbero

arrivare agli studenti, insieme al concetto, significati impliciti derivanti proprio dall'interazione con l'insegnante. Se poi l'insegnante tenta di semplificare la spiegazione per evitare le misconcezioni più comuni, potrebbe generare nuovi ostacoli cognitivi e, sul lungo termine, problemi concettuali, come vedremo nel paragrafo 1.4.

1.1.1 Ostacoli epistemologici

Al fine di analizzare sistematicamente le difficoltà degli studenti nell'apprendimento di un determinato argomento e di sviluppare strategie didattiche migliori, Cornu (1991) ha definito gli ostacoli cognitivi. Questi ostacoli possono essere suddivisi in:

1. Ostacoli genetici e psicologici: dipendono dalla crescita personale dello studente;
2. Ostacoli didattici: dipendono dall'insegnante e dal suo metodo di insegnamento;
3. Ostacoli epistemologici: dipendono dalla natura del concetto matematico stesso.

Quest'ultima nozione è stata introdotta da Bachelard (1938), il quale afferma che gli ostacoli epistemologici hanno due caratteristiche principali: sono inevitabili e arrivano in parte dallo sviluppo storico del concetto stesso. Bachelard osserva infatti che gli ostacoli epistemologici che compaiono nello sviluppo storico di un determinato concetto, spesso si ritrovano anche negli studenti che stanno apprendendo il concetto. Successivamente Brousseau (1983) ha definito l'ostacolo epistemologico come una conoscenza che funziona bene in un certo campo, ma che in un campo più esteso porta al verificarsi di contraddizioni. Per sostituire la concezione errata con una conoscenza migliore è quindi necessario porre gli studenti in un contesto in cui l'ostacolo epistemologico porta a una risposta inesatta (riconosciuta come tale sia dell'insegnante che dagli studenti), così che gli alunni stessi sentano il bisogno di far evolvere le proprie conoscenze, nonostante questo comporti un grande sforzo di ricostruzione cognitiva.

Analizziamo dunque i quattro principali ostacoli epistemologici, evidenziati da Cornu (1991), che sono emersi durante lo sviluppo storico del concetto di limite.

1. Ippocrate voleva dimostrare che le aree di due cerchi stanno tra loro nello stesso rapporto dei quadrati dei loro diametri. Per farlo iscrisse poligoni

simili in cerchi di diametri diversi, poi aumentò il numero dei lati dei poligoni numerose volte, così che la loro area si avvicinasse sempre di più all'area dei cerchi e osservò che il rapporto tra l'area dei poligoni e il quadrato dei diametri dei cerchi si manteneva costante. Giunto a questo punto, Ippocrate affermò che al limite questo sarebbe stato vero anche considerando l'area del cerchio. Questo passaggio al limite venne spiegato meglio da Eudosso qualche anno dopo con il metodo di esaustione.

Per quanto il metodo di esaustione si avvicini al concetto di limite, esso nasce proprio per evitare di confrontarsi col problema dell'infinito e non possiamo quindi dire che i greci possedessero il concetto di limite. Inoltre, il metodo di esaustione veniva applicato caso per caso e solo geometricamente. L'interpretazione geometrica, pur nella sua grande utilità, ha rappresentato quindi un ostacolo epistemologico nel passaggio alla definizione di limite numerico e tutt'oggi gli studenti riscontrano meno difficoltà nel trovare il limite di una funzione dal suo grafico, rispetto a calcolarlo con l'algebra dei limiti.

2. Nel 1600 emerse tra i matematici e i fisici la necessità di sviluppare nuove strategie di calcolo (che poi prenderanno il nome di calcolo infinitesimale) e cominciarono a parlare di quantità infinitamente piccole. Nonostante lo sviluppo del calcolo differenziale e integrale procedessero con sempre maggiore successo, le principali critiche erano dirette proprio al concetto di infinitamente piccolo su cui si fondavano. La definizione di queste quantità, del resto, non era univoca: Eulero le considerava quantità piccole a piacere e che al bisogno potevano essere considerate nulle, per Cauchy erano quantità che tendono a zero, mentre D'Alembert si opponeva alla concezione di una quantità che esiste in un ipotetico spazio intermedio tra zero e una quantità determinata.

L'idea di infinitamente piccolo rappresentava quindi un ostacolo epistemologico ed è proprio lo stato intermedio criticato da D'Alembert che si ritrova spesso nelle menti degli studenti, solitamente identificato in ϵ . Inoltre, l'idea di arbitrariamente piccolo è conforme a come lavora la nostra mente, per questo, anche se è stata rimossa dalle dimostrazioni formali, continua a vivere nelle menti e nella comunicazione sia degli studenti che dei matematici.

3. Un altro grande ostacolo allo sviluppo dei limiti era rappresentato dal loro essere percepiti come un argomento metafisico. Numerosi infatti erano stati i tentativi di trovare i fondamenti dei limiti nell'algebra, ma erano stati

tutti fallimentari e questo faceva percepire il calcolo infinitesimale più come metafisico o filosofico che matematico.

Ancora una volta gli studenti condividono questa percezione, per la prima volta non esistono formule a cui appoggiarsi e questo fa percepire i limiti come poco rigorosi e non veramente appartenenti alla matematica.

4. Infine, uno dei principali ostacoli epistemologici riguarda l'effettivo raggiungimento del limite. Così come numerosi matematici erano convinti che il limite a un certo punto venisse raggiunto, tanti studenti sono convinti della stessa cosa.

Questi non sono certamente gli unici ostacoli epistemologici riguardanti i limiti e gli errori degli alunni sono fondamentali per trovarne altri durante l'insegnamento.

1.1.2 Fondamenti matematici e radici cognitive

Tall (2006) afferma che, in generale, cominciare a spiegare un argomento dalla sua definizione formale è poco fruttuoso, perché essa contiene sicuramente elementi sconosciuti per gli studenti. È quindi preferibile cercare un approccio che si basi su concetti che siano noti agli studenti e che, contemporaneamente, possano diventare buone basi per lo sviluppo matematico del concetto. Questo tipo di concetti sono chiamati da Tall “radici cognitive”. La differenza tra un fondamento matematico e una radice cognitiva, sta nel fatto che il fondamento matematico è il punto di partenza opportuno per fare deduzioni logiche, mentre la radice cognitiva è utile come punto di partenza per l'insegnamento. Il concetto di limite è certamente un buon fondamento matematico, in quanto su di esso si basano il concetto di continuità, di derivabilità e di integrabilità, ma la sua definizione formale non è una buona radice cognitiva proprio a causa della complessità che la contraddistingue.

Al contrario, molti libri di testo in adozione nella scuola italiana cominciano a insegnare la nozione di limite partendo dalla sua definizione formale. Questo genera una notevole confusione negli studenti, i quali dovrebbero approcciarsi per la prima volta all'analisi matematica tramite un argomento che ha una definizione che, per quanto corretta, non è per nulla immediata. A sottolineare il paradosso del partire dalla definizione formale, oltre alle difficoltà già citate, si aggiunge il fatto che storicamente la definizione formale di limite è stata l'ultimo passo nel processo di formalizzazione del concetto di limite, e quindi, come anche per tanti altri argomenti, è poco proficuo cominciare da essa.

Dopo aver dato la definizione formale di limite nei quattro casi possibili (come in Figura 1.1), il passo successivo di molti libri di testo è di enunciare alcuni

teoremi tra cui quelli che giustificano le regole per calcolare il limite della somma, del prodotto, del quoziente e della potenza di funzioni, seguiti poi da numerosi esercizi sull'algebra dei limiti e ricchi di tentativi (poco fruttuosi) di fornire algoritmi semplici per risolverli. Considerando che le esercitazioni date per compito riguardano principalmente quest'ultimo tipo di esercizio, gli studenti si focalizzano su di essi e una volta che hanno imparato a svolgerli correttamente sono sicuri di "aver capito i limiti", mentre, come osservano Tall e Vinner (1981), la definizione data inizialmente è già stata dimenticata.

DEFINIZIONE Prima definizione particolare: x_0 e l sono finiti		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$	[1]	
Fig. 16a Fig. 16b Fig. 16c		
DEFINIZIONE Seconda definizione particolare: x_0 è finito e l è infinito		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$	[2]	
Fig. 17a Fig. 17b Fig. 17c		
DEFINIZIONE Terza definizione particolare: x_0 è infinito e l è finito		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : x > N \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$	[4]	
Fig. 18a Fig. 18b Fig. 18c		
DEFINIZIONE Quarta definizione particolare: x_0 e l sono infiniti		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N > 0 : x > N \Rightarrow f(x) > M$	[6]	
Fig. 19a Fig. 19b Fig. 19c		

Figura 1.1: Quattro casi possibile della definizione di limite (Sasso & Zanone, 2020, pp. 68–70)

Cornu (1991) conferma che partire dalla definizione formale e proseguire con una spiegazione ben strutturata non è un metodo efficace per introdurre il concetto di limite. Ricorda, infatti, che quando si insegna matematica avanzata è comprovato che una sequenza di argomenti introdotti uno dopo l'altro in modo logico non sia sufficiente per un effettivo apprendimento da parte degli studenti; al contrario c'è apprendimento efficace solo se ci si pone in un contesto di problem solving, dove possedere il concetto di limite è percepito come un'esigenza da parte dell'alunno, al fine di risolvere un problema.

1.2 Analisi delle Indicazioni Nazionali per i Licei e delle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali

Il quadro normativo che regola gli argomenti e le modalità di insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado prevede tre documenti principali a cui fare riferimento:

- le Indicazioni Nazionali per i Licei;
- le Linee Guida per gli Istituti Tecnici;
- le Linee Guida per gli Istituti Professionali.

Tutti e tre i documenti suddividono gli obiettivi di apprendimento tra il primo biennio, il secondo biennio e il quinto anno. Considerando l'estrema somiglianza tra le Linee guida per gli Istituti Tecnici e quelle per gli Istituti Professionali, di seguito parleremo in generale di Linee Guida, come se fossero un unico documento. In tutti i documenti gli obiettivi matematici sono suddivisi in quattro ambiti, ovvero: Aritmetica e algebra, Geometria, Relazioni e funzioni e Dati e previsioni. Baccaglini-Frank et al. (2018) notano la differenza rispetto alle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo del 2012, nelle quali gli ambiti erano: Numeri (invece di Aritmetica), Spazio e figure (invece di Geometria), Relazioni e funzioni (invece di Algebra) e Dati e previsioni (invece di Probabilità e statistica). Gli autori leggono questa scelta ibrida tra oggetti matematici e teorie matematiche come un possibile segno del passaggio dall'esperienza empirica alla formalizzazione teorica. Osserviamo ora nel dettaglio come si esprimono questi documenti rispetto all'insegnamento dei limiti.

1.2.1 Indicazioni Nazionali per i Licei

Le Indicazioni Nazionali per i Licei cominciano con la sezione *Linee generali e Competenze* per poi passare agli *Obiettivi specifici di apprendimento*, dove lo studio dei limiti viene inserito tra gli obiettivi del quinto anno. Per quanto concerne lo studio dei limiti, le Indicazioni sono pressochè identiche per tutti i licei, per questo verrà fatta un'analisi unica.

Cominciando dalle *Linee generali e Competenze*, i passaggi che più riguardano lo studio dei limiti e l'utilizzo della tecnologia nella didattica affermano che gli studenti devono:

- acquisire una visione storico-critica dei rapporti tra pensiero matematico e contesto filosofico, scientifico e tecnologico;
- riconoscere il calcolo infinitesimale come argomento che ha caratterizzato la formazione del pensiero matematico;
- padroneggiare le funzioni elementari dell'analisi e le prime nozioni del calcolo differenziale e integrale.

Viene inoltre sottolineato che: *“Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi.”* (MIUR, 2010a, p. 23)

Per quanto riguarda gli *Obiettivi specifici di apprendimento*, il documento afferma che gli studenti:

- approfondiranno lo studio dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica;
- acquisiranno il concetto di limite e impareranno a calcolare i limiti in casi semplici;
- acquisiranno inoltre i concetti di continuità, derivabilità e integrabilità;
- sapranno riconoscere il calcolo infinitesimale come strumento fondamentale per descrivere e modellizzare fenomeni fisici.

Riassumendo questi punti, possiamo affermare che le Indicazioni Nazionali sottolineano l'importanza di insegnare i limiti senza ridurli solamente al loro calcolo, riconoscendone la loro portata storica ed evidenziando il loro ruolo nella spiegazione di fenomeni fisici. La sequenza didattica proposta nel Paragrafo 3.3 abbraccia questo approccio inserendo anche strumenti informatici con le modalità richieste dal documento. Infine evidenziamo che, considerata la somiglianza delle indicazioni di licei differenti, le attività progettate per un certo indirizzo di liceo possono assolutamente essere proposte anche ad altri indirizzi, seppur con le dovute accortezze dovute alle diverse motivazioni che muovono studenti di indirizzi diversi.

1.2.2 Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali

All'interno delle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali, l'apprendimento dei limiti si colloca nell'Area Generale, che è comune a tutti gli indirizzi, ed è previsto all'interno del secondo biennio.

L'introduzione del settore di Matematica delle Linee Guida comincia affermando che il docente di matematica deve far conseguire ai propri studenti: la padronanza del linguaggio matematico formale, l'acquisizione di strumenti statistici e la comprensione del pensiero scientifico nel contesto della storia.

Quelli che nelle Indicazioni Nazionali per i Licei sono *Obiettivi specifici di apprendimento*, qui sono “Conoscenze” e “Abilità”. In particolare, per quanto riguarda i limiti, troviamo nelle Conoscenze “*Continuità e limite di una funzione. Limiti notevoli di successioni e di funzioni*” e nelle Abilità “*Calcolare limiti di successioni e funzioni*” e “*Analizzare esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto*” (MIUR, 2010c, Area Generale p. 14) (MIUR, 2010b, Area Generale p. 9) L'approccio al concetto di limite negli Istituti Tecnici e Professionali è quindi molto più impostato sul loro lato pratico.

1.2.3 Considerazioni generali

Le Linee Guida sono più sintetiche rispetto alle Indicazioni Nazionali e, mentre le seconde forniscono all'insegnante una guida da interpretare, le prime forniscono uno strumento che si avvicina di più a un manuale da seguire.

Per quanto riguarda i limiti, le Indicazioni Nazionali si concentrano sulla loro rilevanza sia storica che concettuale, mentre le Linee Guida propongono un insegnamento più improntato sul calcolo dei limiti e mirato alla loro utilità pratica, pur mantenendo parte dell'attenzione sulla loro portata storica.

I documenti forniscono quindi ai docenti uno strumento che rispecchia le necessità degli indirizzi di scuola differenti, aiutandoli così a fare scelte adeguate per i propri studenti.

1.3 Analisi delle proposte didattiche di alcuni libri di testo

In questa sezione verrà analizzato come tre diversi libri di testo affrontano il concetto di limite. I primi due sono libri di testo recenti, destinati alla quinta liceo scientifico, che si avvicinano al concetto di limite in modi differenti. L'ultimo libro di testo è di Emma Castelnuovo (1913-2014), insegnante di matematica e

fisica e ricercatrice in didattica della matematica, il cui metodo ha rivoluzionato il modo di insegnare matematica. Sarà quindi un testo destinato alla quinta secondaria di secondo grado più datato, ma ricco di spunti interessanti.

1.3.1 Analisi del testo "Matematica.blu 2.0 - Vol. 5"

Il testo “Matematica.blu 2.0 - Vol. 5” di Bergamini et al. (2017) dedica due capitoli al concetto di limite, intitolati rispettivamente “Limiti di funzioni” e “Calcolo dei limiti e continuità delle funzioni” (ne segue un terzo dedicato alle successioni e alle serie), questi sono preceduti dal primo capitolo del libro “Funzioni e le loro proprietà”.

Il capitolo “Limiti di funzioni” comincia con uno studio approfondito di intervalli, intorno e insiemi limitati e illimitati. Dopo aver fornito la definizione di punto di accumulazione, gli autori danno la seguente definizione intuitiva di limite: *“Più scegliamo x vicino al valore x_0 e più la sua immagine $f(x)$ si avvicina a un certo valore l ”* (Bergamini et al., 2017, p. 1352). Prendono quindi in considerazione una funzione e un punto non appartenente al dominio della funzione (il punto è una discontinuità eliminabile), poi creano una tabella di x e y in cui scelgono valori di x che si avvicinano sempre di più, da destra e da sinistra, al valore considerato e di conseguenza producono valori di y che si avvicinano sempre di più a un certo valore, il quale viene identificato come il limite della funzione. Questa spiegazione viene accostata a un riferimento grafico del tutto simile a quello della Figura 1.2, con la sola differenza che invece dell’intorno e di ϵ vengono utilizzati valori numerici. Dopo questo esempio viene data la definizione formale del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e la sua interpretazione geometrica, non viene però sottolineata la dipendenza dell’intorno di x_0 da ϵ . Abbiamo già osservato come la definizione non sia una buona radice cognitiva, se però la strada intrapresa è questa, un’interpretazione geometrica potrebbe sicuramente aiutare gli studenti a capire più facilmente la definizione. Insieme alla definizione geometrica però, gli autori introducono anche un’immagine dinamica di ϵ : prima scrivendo *“Considerando ϵ , pensiamo a valori che diventano sempre più piccoli.”* (Bergamini et al., 2017, p. 1353), poi proponendo la Figura 1.2, allontanandosi così fin da subito dalla definizione formale per la quale ϵ è un valore positivo fissato.

Il passaggio successivo del testo è di fare un accenno alla definizione di continuità, concetto previsto per il capitolo successivo, poi il paragrafo si conclude con la definizione dei limiti per eccesso e per difetto e dei limiti da destra e da sinistra. Il capitolo continua con la definizione del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, nel quale prevedibilmente riemergono le stesse criticità legate alla trasposizione didattica della

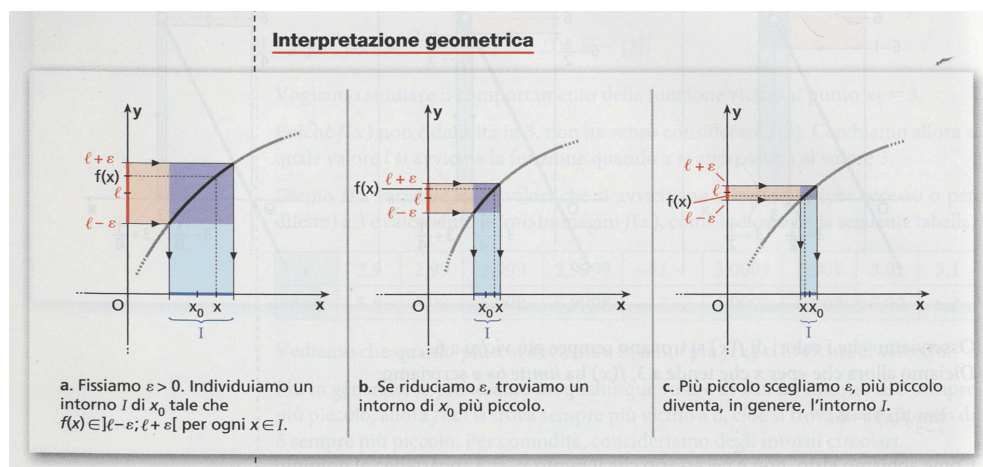


Figura 1.2: ε e l'intorno di x_0 sembrano diventare sempre più piccoli (Bergamini et al., 2017, p. 1354)

casistica precedente: “Pensiamo a valori di M che diventano sempre più grandi” (Bergamini et al., 2017, p. 1359), M è, in realtà, un valore positivo fissato. Vengono quindi definiti gli asintoti verticali.

A seguito del limite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, per il quale permangono le criticità precedenti, vengono definiti gli asintoti orizzontali. In questa sezione sono apprezzabili gli esempi riportati di asintoti orizzontali che vengono intersecati dalla funzione un numero finito o infinito di volte, come auspicato da Davis e Vinner (1986). Questo contribuisce ad ampliare la concept image degli studenti ed evitare che permanga un'immagine per la quale, quando la funzione si avvicina a un proprio asintoto, debba avere un comportamento monotono.

Infine, la definizione del limite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ viene data in tutte e quattro le casistiche possibili.

Il capitolo si conclude con i seguenti teoremi: teorema di unicità del limite, teorema della permanenza del segno e il teorema del confronto, tutti dotati di dimostrazione.

Tra le pagine di teoria e quelle di esercizi, si trova una brevissima sintesi di quanto visto nel capitolo, riportata nella Figura 1.3, dove il collegamento tra concetto e modello grafico viene completamente trascurato; le numerose pagine di esercizi sono suddivise in paragrafi i quali sono in corrispondenza con quelli della teoria.

IN SINTESI

Limiti di funzioni

■ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che:
 $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x \in I, x \neq x_0$.
- Una funzione è **continua in un punto** x_0 del suo dominio se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
 Una funzione è **continua nel suo dominio** quando è continua in ogni punto del suo dominio.

■ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I, x \neq x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I, x \neq x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ se per x che tende a x_0 i limiti destro e sinistro sono entrambi infiniti, con segno opposto.

In questi casi, la retta $x = x_0$ è **asintoto verticale** per il grafico di f .

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di ℓ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di ℓ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di ℓ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.

In questi casi, la retta $y = \ell$ è **asintoto orizzontale** per il grafico di f .

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $+\infty$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $+\infty$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $-\infty$ tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $-\infty$ tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.

■ Primi teoremi sui limiti

- **Teorema di unicità del limite:** se per x che tende a x_0 la funzione f ha limite ℓ , allora tale limite è unico.
- **Teorema della permanenza del segno:** se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, con $\ell \neq 0$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I, x \neq x_0$, quando $\ell > 0$ (< 0).
- **Teorema del confronto:** date le funzioni $h(x), f(x), g(x)$ definite in $H \subseteq \mathbb{R}$, escluso al più il punto $x_0 \in H$, se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in H$, con $x \neq x_0$, e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Figura 1.3: Sintesi del capitolo (Bergamini et al., 2017, p. 1374)

Il capitolo “Calcolo dei limiti e continuità delle funzioni” comincia con una prima sezione sulle operazioni sui limiti suddivisa in: limiti di funzioni elementari (dove vengono elencati diversi tipi di funzioni con un esempio di grafico a fianco, seppur senza riferimento esplicito alle immagini), limite della somma, limite del prodotto, limite del quoziente, limite della potenza di funzioni, limite delle funzioni composte. In ognuno di questi sottoparagrafi sono presenti tabelle riassuntive,

come quella della Figura 1.4, le quali rischiano di rendere il calcolo dei limiti un esercizio completamente procedurale. Inoltre, ogni volta che si incontra una forma

Le funzioni non hanno entrambe limite finito		
Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, per il limite del prodotto si possono presentare diversi casi che riassumiamo nella tabella, osservando che anche quando si usano i simboli $+\infty$ e $-\infty$ vale ancora la regola dei segni.	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$
	$\lim [f(x) \cdot g(x)]$	
$l > 0$	$< +\infty$	$+\infty$
	$< -\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$< +\infty$	$-\infty$
	$< -\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Figura 1.4: Tabella riassuntiva per il limite del prodotto (Bergamini et al., 2017, p. 1418)

indeterminata, questa non viene inserita nella tabella riassuntiva, ma viene solo segnalata come tale sul momento. Vengono forniti alcuni esempi in cui limiti del tipo $+\infty - \infty$ giungono a risultati diversi (per dimostrare l'indeterminatezza), ma le forme indeterminate vengono analizzate tutte insieme solo nella sezione successiva.

La seconda sezione è quindi interamente dedicata alle forme indeterminate incontrate nella prima.

La terza sezione elenca sette limiti notevoli.

La quarta sezione parla di infinitesimi, infiniti e del loro confronto. L'infinitesimo viene definito così: "Una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ è uguale a 0", mentre l'infinito così: "Una funzione $f(x)$ è un infinito per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ è uguale a ∞ ". La sezione si conclude con un breve paragrafo sulla gerarchia degli infiniti.

Fino a qui il capitolo è completamente spoglio di figure, le quali potrebbero essere un ottimo strumento per radicare i concetti astratti in modelli grafici e facilitarne quindi l'apprendimento.

La quinta sezione ritorna sulla continuità di una funzione ed enuncia il teorema di Weierstrass, il teorema dei valori intermedi e il teorema di esistenza degli zeri.

La sesta sezione è incentrata sui punti di discontinuità di una funzione, mentre la settima è dedicata agli asintoti.

L'ottava e ultima sezione spiega come ottenere il grafico probabile di una funzione fornendo un elenco di punti da eseguire per ottenerlo.

Anche in questo caso sono presenti numerose pagine di esercizi, suddivise come

nella teoria.

Per quanto detto in precedenza, si può affermare che la strada percorsa da questo testo non è sicuramente la migliore, in quanto senza dubbio esso procede per conseguenze logiche, ma abbiamo osservato come questo non sia sufficiente. Inoltre si può osservare come il libro tenda a fornire un approccio più algoritmico (come: se succede questo, allora fai questo) che logico (ovvero incentrato sul perchè si procede in un certo modo in determinate situazioni).

Viene poi naturale osservare come la proposta del libro di testo sia decisamente più ampia rispetto a quanto richiesto dalle Indicazioni Nazionali o dalle Linee Guida, rischiando di perdere di vista “L’obiettivo principale [...] di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura”, nonché la sua collocazione nel periodo storico in cui si è sviluppato, come richiesto dai documenti citati.

1.3.2 Analisi del testo "Colori della Matematica BLU 5"

Ne “I Colori della Matematica BLU 5” di Sasso e Zanone (2020), c’è un unico capitolo dedicato ai limiti delle funzioni a variabili reali, mentre lo studio della continuità è contenuto in un capitolo a sè. A differenza del primo libro di testo, questo si apre con il capitolo “Introduzione all’analisi e funzioni”, che spiega da quali problemi è nata la necessità di sviluppare il calcolo infinitesimale, fornendo allo studente la motivazione per cui si sta per approcciare ai concetti di funzione e di limite.

La prima sezione è un’introduzione intuitiva al concetto di limite. Comincia infatti con i quattro esempi classici dei limiti, per i quali fa un’analisi numerica (crea una tabella di x e di y , dove nelle x si inseriscono valori sempre più vicini a x_0 e i rispettivi valori di y), la quale viene poi interpretata graficamente, come mostrato in Figura 1.5. Prosegue spiegando cosa significa avvicinarsi da destra e da sinistra. La sezione si conclude con le definizioni di asintoti verticali e orizzontali.

La seconda sezione definisce gli intorni, i punti di accumulazione ed enuncia una definizione generale di limite in termini di intorni.

Le quattro definizioni classiche vengono fornite nella quarta sezione insieme alla loro interpretazione grafica. Al contrario del testo precedente, questa volta il modello grafico rispecchia davvero la definizione di limite, come si può osservare dalla Figura 1.6.

Sempre nella quarta sezione enunciano, e a volte dimostrano, i seguenti teoremi: le tre versioni del teorema del confronto, il teorema di esistenza del limite per le

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
y	5,9	5,99	5,999	Non definita	6,001	6,01	6,1

↔ 6 ↔

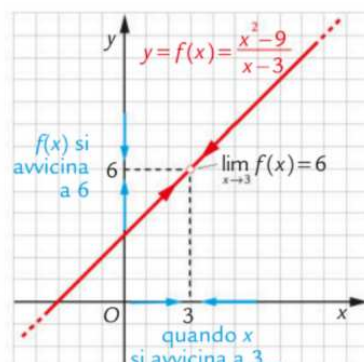


Figura 1.5: Analisi numerica e interpretazione grafica del limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ (Sasso & Zanone, 2020, p. 58)

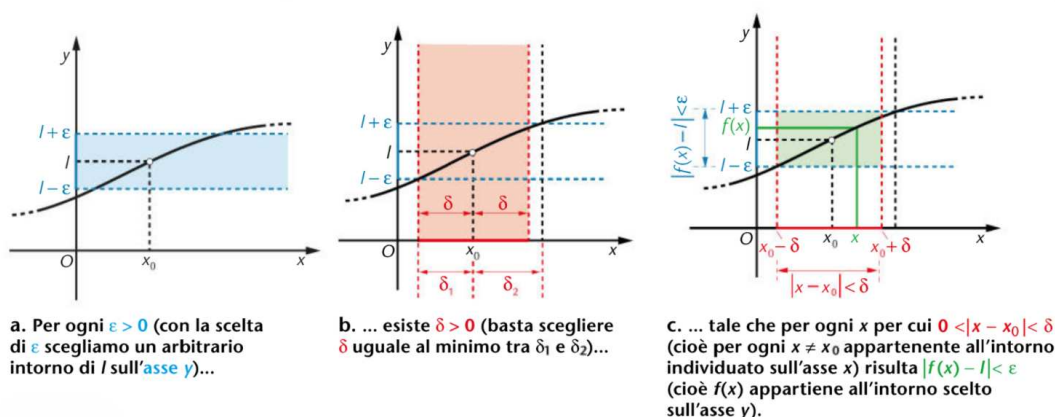


Figura 1.6: Rappresentazione grafica corretta del concetto di limite (Sasso & Zanone, 2020, p. 68)

funzioni monotone, il teorema di unicità del limite e il teorema della permanenza del segno.

La quinta sezione comincia con un accenno alla continuità di una funzione, poi propone i limiti delle funzioni elementari, questa volta completi di grafico, e continua con l'algebra dei limiti. Anche in questo caso sono presenti tabelle riassuntive simili a quelle della Figura 1.4.

Ancora una volta le forme indeterminate sono trattate successivamente; in particolare la sezione 6 è dedicata alle forme di indecisione delle funzioni algebriche e la sezione 7 a quelle delle funzioni trascendenti.

Nella sezione 8 è presente la definizione di di ordine di infinitesimo e di infinito, con i loro confronti, e la gerarchia degli infiniti.

Anche in questo caso è presente un ampio numero di esercizi, che rispecchiano la struttura della teoria.

Questo testo si attiene di più alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida rispetto al libro precedente, in quanto pone l'argomento nel suo contesto storico (all'inizio del primo capitolo) e definisce solo la terminologia necessaria, mantenendo così l'attenzione sul concetto di limite senza appesantirlo ulteriormente. Come Bergamini et al. (2017), però, procede per conseguenze logiche, seppur con maggiore attenzione a mantenere un collegamento tra modello grafico e concetto e a non incappare nelle misconcezioni più comuni.

1.3.3 Analisi del testo "Elementi di Analisi Matematica"

Negli Elementi di Analisi Matematica di Castelnovo et al. (1988), sono dedicati due capitoli al concetto di limite, rispettivamente intitolati "Limiti di funzioni" e "Continuità e calcolo dei limiti". Anche in questo caso il testo si apre con un capitolo dedicato alle funzioni, il quale comincia, come tipico del metodo di Emma Castelnovo, da esempi pratici.

Gli autori introducono anche il concetto di limite con un esempio dalla realtà, in particolare presentano un modello di crescita della popolazione mondiale e, mentre lo analizzano, sorge la necessità di avere uno strumento adeguato per scoprire cosa succede quando il tempo tende a infinito.

Nella seconda sezione vengono quindi proposte diverse funzioni e, facendo un'analisi numerica simile a quelle dei testi precedenti, si calcola il loro limite per x che tende a infinito e si comincia a utilizzare la notazione dei limiti.

La sezione 3 è dedicata a dedurre la definizione formale di limite per i casi osservati, la quale rimane espressa in una modalità ibrida tra parole e simboli, come si può osservare nella Figura 1.7. Si può osservare come, nonostante manchi la notazione matematica usuale per definire il limite, questa definizione è comunque rigorosa ed è più facilmente comprensibile per gli studenti, in quanto più discorsiva.

Si arriva così ad una più rigorosa definizione di limite, che possiamo esprimere nel modo seguente (fig. 16):

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:

scelto un numero M , positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x , detto x_M , tale che risulti

$$f(x) > M \text{ per qualunque } x > x_M.$$

Figura 1.7: Definizione di limite quando $x \rightarrow +\infty$ (Castelnovo et al., 1988, p. 59)

Per passare allo studio di limiti in cui la x tende a un valore finito, la sezione 4 comincia prendendo in considerazione fenomeni reali che producono grafici discontinui. Come primo esempio gli autori usano la teoria della relatività ristretta, in particolare prendono in considerazione la formula $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ che perde significato quando $v = c$, e il secondo esempio è il grafico generato da un voltmetro quando due sfere vengono caricate fino al loro potenziale esplosivo (Figura 1.8). Poi si ripete la struttura della seconda e della terza sezione, ma per il caso di x che tende a un valore finito.

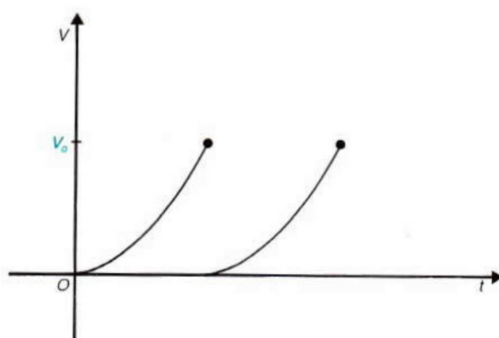


Figura 1.8: Grafico generato dal voltmetro (Castelnuovo et al., 1988, p. 66)

Nella sezione 7 viene proposta una definizione unica di limite che utilizza il concetto di intorno (Figura 1.9).

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \ell, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

Figura 1.9: Grafico generato dal voltmetro (Castelnuovo et al., 1988, p. 77)

L'ottava sezione contiene il teorema della permanenza del segno e il teorema di unicità del limite, che vengono dimostrati e anche studiati nel dettaglio.

Il capitolo "Continuità e calcolo dei limiti" comincia osservando fenomeni continui e discontinui per poi dare la definizione di continuità nella seconda sezione e dei casi di discontinuità nella terza.

La sezione 4 si occupa del passaggio dalla continuità al calcolo dei limiti. Per ottenere i limiti delle funzioni elementari, gli autori osservano alcuni casi particolari, a partire dai quali ricavano le regole generali.

La quinta sezione, dedicata all'algebra dei limiti, è stata suddivisa tra algebra dei limiti finiti, algebra dei limiti infiniti e forme indeterminate.

Il capitolo si chiude con il teorema del confronto, il teorema della continuità, il teorema di Bolzano, il teorema dell'esistenza degli zeri e il teorema di Weierstrass.

Gli esercizi dei due capitoli seguono l'impostazione della teoria e sono spesso esercizi in cui allo studente non viene richiesto di applicare una procedura, ma di dedurre una risposta sulla base delle nozioni studiate, come per esempio nell'esercizio riportato nella Figura 1.10.

Disegnare almeno due curve che possono rappresentare una funzione $y=f(x)$, definita nell'insieme dei reali, di cui sono date le seguenti informazioni:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \quad f(3) = 0$$

Figura 1.10: Esempio di esercizio non procedurale (Castelnuovo et al., 1988, p. 365)

Questo testo accompagna decisamente meglio il lettore nella scoperta del concetto di limite rispetto ai due precedenti. Gli autori infatti analizzano numerosi esempi, senza cercare di semplificare l'argomento per gli studenti e contemporaneamente creando una concept image aperta ad arricchirsi, prendendosi il tempo adeguato per ragionare su ogni aspetto ed evitando di appesantire un argomento già molto ricco con la pesantezza di alcuni tecnicismi poco utili.

1.4 Proposte didattiche alternative all'approccio formale

Come anticipato, proprio a causa della ricchezza e della complessità delle nozioni legate ai limiti e delle tante concezioni pre-esistenti in ognuno, l'insegnamento del concetto di limite è estremamente complicato. Abbiamo già osservato come non sia sufficiente una spiegazione chiara e completa da parte dell'insegnante affinché gli studenti possano superare i propri ostacoli epistemologici, nonostante questa sembri essere una tesi portata avanti da molti libri di testo. Cornu (1991) afferma che progettare attività in cui si fanno emergere preconcezioni, immagini mentali, intuizioni ed esperienze degli studenti, le quali inevitabilmente faranno parte del loro processo di apprendimento, prima di cominciare a lavorare sui limiti, permetterà agli alunni di costruire attivamente la concezione di limite.

I tentativi di progettare lezioni più partecipative e che generino la necessità, da parte degli studenti, di concettualizzare i limiti, come proponeva Brousseau (1983), non mancano. Vediamo alcuni esempi di seguito.

Nel tentativo di semplificare l'idea di limite per i propri studenti, Orton (1980) aveva proposto il seguente problema:

Esercizio 1.4.1. Considerate la scala della Figura 1.11:

- (a) Se ripetiamo questa procedura un numero indefinito di volte, quale sarà il risultato finale?
- (b) Quante volte dobbiamo aggiungere dei nuovi gradini per arrivare a questo “risultato finale”?
- (c) Qual è l’area della figura finale in termini di a (dove a è il lato del primo quadrato)? Ovvero qual è l’area sottesa alla “scala finale”?

Se uno studente rispondeva con una formula alla richiesta (c), gli veniva chiesto: *Puoi usare questa formula per ottenere il “termine finale” o limite della sequenza?*

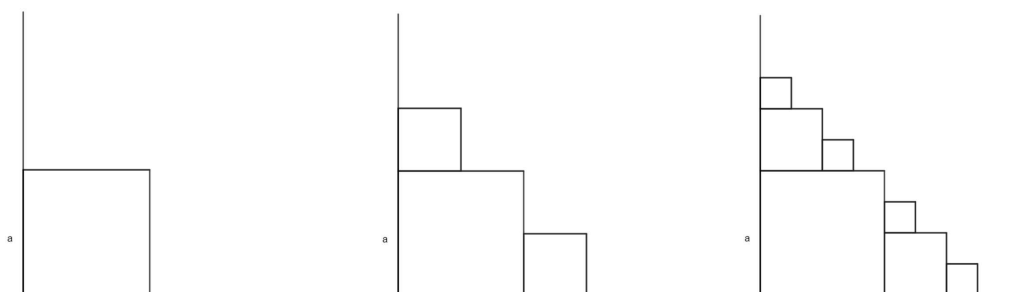


Figura 1.11: La scala proposta da Orton

L’espressione “termine finale” è stata usata da Orton proprio nel tentativo di aiutare gli studenti a comprendere il significato di limite. Questo “termine finale” ha però prodotto negli studenti l’immagine di una scala costituita da un numero infinito di gradini invece del triangolo rettangolo isoscele che sarebbe dovuto emergere.

I tentativi di aiutare gli studenti semplificando concetti complessi spesso portano direttamente agli stessi ostacoli epistemologici che si stava tentando di evitare, ma magari senza accorgersi di esserci arrivati. Come già osservato, questi ostacoli sono inevitabili, ma anche fondamentali per uno sviluppo completo della concept definition di limite ed è quindi necessario che gli studenti li incontrino sotto la guida dell’insegnante.

Nel 1985 Davis e Vinner (1986) si sono chiesti se fosse possibile far cominciare la spiegazione dei limiti dalla comprensione del perché li si sta studiando. Questa domanda sorge dal fatto che gli studenti che hanno già seguito corsi di analisi matematica spesso non sono comunque in grado di dare una definizione di limite corretta o di spiegare perché essi siano fondamentali nell’analisi.

Gli autori hanno quindi strutturato una sequenza di lezioni in cui, partendo

da successioni legate a situazioni reali, si delinea la necessità di capire come si comportano queste successioni a infinito e viene richiesto agli studenti di formulare una definizione di limite di una successione che soddisfi gli esempi visti. A ogni definizione proposta dagli studenti, prevedibilmente afflitta dalle misconcezioni più classiche, veniva proposto un controesempio che costringeva gli studenti a far evolvere la propria definizione. Per esempio, se veniva proposta la definizione *“Il limite L è il più piccolo numero per il quale $a_n \leq L$ per ogni valore di n ”* accompagnata dalla sequenza esempio $0.9, 0.99, 0.999, \dots$, gli autori proponevano come controesempio la sequenza $0.1, 0.01, 0.001, \dots$, che invece di approssimare il proprio limite dal basso, lo approssima dall’alto. Gli studenti sentivano allora il bisogno di creare una nuova definizione che comprendesse anche questa sfaccettatura.

Durante le lezioni, gli studenti sono giunti a tre tipi di definizioni: prima una intuitiva, poi una grafica e infine alla definizione formale. Lo scopo era, non solo di possedere la definizione corretta, ma anche di sceglierla a dispetto di quelle più intuitive. Gli autori sostengono infatti che se uno studente fornisce una definizione scorretta di limite, questo non implica automaticamente che lui non sappia la definizione giusta. È probabile, invece, che coesistano nella sua mente una definizione più intuitiva, ma incompleta, e quella matematicamente corretta e che in quel momento lui abbia scelto quella intuitiva. Gli autori sapevano che le misconcezioni hanno spesso una vita più lunga della concept definition, per questo, durante l’insegnamento della definizione formale, hanno spesso posto gli studenti davanti a problemi che imponevano una scelta tra queste due nozioni, questi problemi erano progettati affinché la misconcezione desse una risposta chiaramente errata, mentre la definizione corretta avesse successo e quindi permanesse nel lungo termine.

Trascorsi alcuni mesi dal termine del corso, a sorpresa, è stato dato un test agli studenti in cui si chiedeva loro di descrivere i limiti in modo intuitivo e poi di dare la definizione formale. Nessuno dei quindici partecipanti allo studio è stato in grado di dare la definizione formale, cadendo nelle misconcezioni più classiche. Gli studenti hanno attribuito questo risultato al fatto che non erano stati avvisati del test e ai mesi appena passati privi di studio di matematica. Gli autori si riservano di migliorare il progetto alla luce di questi risultati e rimarcano quanto siano tenaci le misconcezioni.

La necessità di formalizzare il concetto di limite può nascere anche dalla volontà di definire il concetto di derivata, è possibile quindi cominciare a studiare il calcolo infinitesimale a partire dalle derivate, come del resto è stato storicamente.

Su questa linea, Tall (1986) propone di avvicinarsi sempre più al grafico di una funzione, come a ingrandirlo. In questo modo gli studenti possono vedere che, se mi avvicino abbastanza alla funzione, il grafico sembra una retta e posso quindi associare un gradiente ai punti della funzione. L'utilizzo di mezzi tecnologici, che permettono agli studenti di esplorare la funzione, aiuta la loro comprensione del concetto di derivata molto più di un supporto statico. Questo permette all'insegnante di cominciare a studiare il calcolo infinitesimale da un argomento più concreto rispetto ai limiti, come è quello della derivata e, quando si vuole dare la definizione formale di derivata, sorgerà la necessità di introdurre il concetto di limite.

L'autore basa questo approccio sulla tesi per cui la differenziabilità delle funzioni è una buona radice cognitiva per introdurre il concetto di limite. Infatti esistono grafici che possiamo ingrandire fino a vedere una linea dritta, ma anche funzioni così grinzose per le quali questo non succede mai, nonché funzioni che formano cuspidi o anche funzioni sempre dritte. Questa ricchezza di alternative amplia fin da subito la concept image degli studenti, confermando la differenziabilità delle funzioni come una radice cognitiva migliore della definizione di limite.

Anche Andriano et al. (2025) hanno utilizzato la tecnologia per rendere meno ostile il primo approccio degli studenti coi limiti: hanno creato un gioco sul software GeoGebra per fornire agli studenti uno strumento in cui la definizione di limite, in termini di ϵ e δ , è rappresentata in modo interattivo, ma senza cadere nella dinamicità tipica delle misconcezioni.

Gli studenti giocano a coppie e hanno davanti a loro GeoGebra con una funzione sulla quale è fissato un punto (x_0) e due slider, i quali corrispondono a ϵ e a δ . Il primo a giocare è Mr. Epsilon, che sceglie un'ampiezza di ϵ , poi Mrs. Delta sceglie un'ampiezza di δ . A questo punto, se Mr. Epsilon riesce a selezionare almeno un punto della funzione la cui ascissa appartiene a $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, ma la cui ordinata cade fuori dall'intervallo dato da ϵ , allora Mr. Epsilon ha vinto, altrimenti vince Mrs. Delta. Se gioca secondo la definizione di limite, Mrs. Delta ha quindi la possibilità di vincere sempre.

Dopo alcune partite in cui gli studenti si scambiano i ruoli, gli viene chiesto se uno dei due ruoli è avvantaggiato, nel senso che “se gioca bene” può sempre vincere. Nel caso si siano accorti che Mrs. Delta è avvantaggiata, l'insegnante chiede come spiegherebbero la tattica per vincere sempre a un altro compagno, stimolando così la loro riflessione affinché si evolva anche sul piano matematico.

Gli autori hanno proposto questa attività a una quarta di un liceo scientifico e hanno osservato una delle coppie mentre rispondeva alle domande. È emerso che,

giocando alcune partite e confrontandosi sia a parole che a gesti, le due studentesse sono riuscite a trovare e a spiegare il metodo grazie al quale Mrs. Delta può vincere sempre. Le parole utilizzate dalle alunne attestano l'aver raggiunto una maggiore consapevolezza riguardante il significato della definizione formale di limite, confermando così l'utilità di questo gioco nella comprensione del concetto di limite.

Capitolo 2

Principali lenti teoriche alla base della progettazione

Questo capitolo si occupa di analizzare la letteratura esistente riguardo all'implementazione della tecnologia all'interno della didattica della matematica e riguardo all'apprendimento embodied. L'importanza di utilizzare la tecnologia per l'apprendimento viene infatti sottolineata in tutti e tre i documenti che delineano il quadro formativo per l'istruzione nel secondo ciclo di istruzione (MIUR (2010a), MIUR (2010b), MIUR (2010c)) e richiedono quindi che essa sia parte integrante della didattica.

2.1 Il framework TPACK

Per poter parlare del framework TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) è necessario fare un passo indietro e conoscere prima il framework PCK (Pedagogical Content Knowledge). Quest'ultimo è stato definito da Shulman (1986) ed è l'insieme di quelle nozioni possedute dall'insegnante che vanno oltre la materia insegnata e diventano nozioni sulla materia finalizzate all'insegnamento.

Il framework PCK racchiude tre abilità fondamentali per l'insegnante: conoscere la materia che si insegna, saper spiegare i concetti in tanti modi diversi per poter raggiungere il maggior numero di studenti possibile e conoscere le strategie per superare le preconcezioni più comuni degli studenti. Shulman infatti sostiene che, così come non si può insegnare senza conoscere la propria materia, insegnare conoscendo solo la materia senza una base pedagogica non sarà efficace.

Oggi si tende a parlare direttamente di framework TPACK, acronimo di Technological Pedagogical and Content Knowledge, che è nato proprio a partire dal framework PCK per includere anche le conoscenze tecnologiche (sia analogiche

che digitali). Koehler et al. (2013) spiegano i fondamenti di questo framework a partire dalle tre conoscenze principali (conoscenze legate alla disciplina insegnata, pedagogia e tecnologia) e analizzando tutte le intersezioni della figura 2.1.

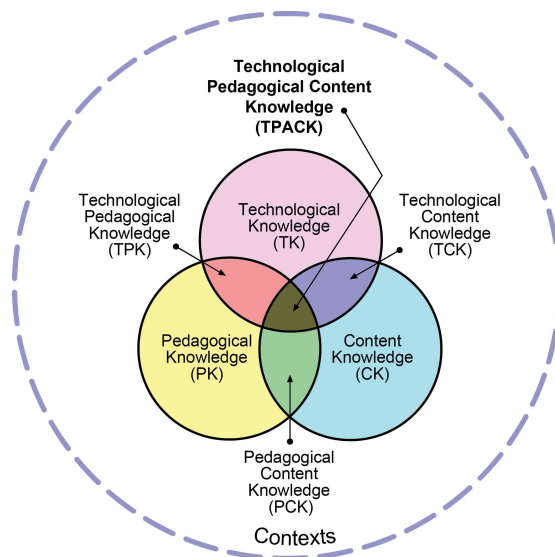


Figura 2.1: TPACK Framework

Reproduced by permission of the publisher, © 2012 by tpack.org

Prima di iniziare, gli autori evidenziano che non esiste un unico modo ottimale per integrare la tecnologia all'interno delle proprie lezioni, piuttosto l'integrazione deve essere fatta su misura basandosi sia sull'argomento che sul contesto scolastico.

- Content Knowledge

La Content Knowledge è ciò che l'insegnante sa della materia che deve insegnare; questa conoscenza deve comprendere anche i fondamenti della materia. Se questa conoscenza comprensiva manca, infatti, gli studenti potrebbero ricevere informazioni scorrette e sviluppare misconcezioni.

Con il termine *misconcezione* individuiamo quelle convinzioni errate che gli studenti considerano corrette in quanto funzionano per la risoluzione della maggior parte degli esercizi, ma che impediscono loro di raggiungere la *concept definition*. Quando per esempio si insegna la geometria euclidea, l'insegnante di matematica deve avere nel proprio bagaglio anche la conoscenza delle geometrie non euclidee e usarla al momento giusto, affinché gli studenti non si convincano che esista una sola geometria.

- Pedagogical Knowledge

La Pedagogical Knowledge consiste nella conoscenza da parte del docente delle pratiche didattiche e dei processi di apprendimento. In particolare l'insegnante

deve sapere come imparano gli studenti, come gestire la classe, come pianificare le lezioni e come valutare gli studenti, ovvero deve conoscere le principali teorie cognitive, sociali ed evolutive dell'apprendimento.

Per l'insegnante di matematica, ad esempio, è importante riconoscere quanto la materia che insegna sia considerata insidiosa e, per questo, fare in modo di renderla il più possibile accessibile.

- Technology Knowledge

La Technology Knowledge è in costante cambiamento, ancora di più delle conoscenze precedenti. In generale, però, possiamo affermare che richiede di conoscere la tecnologia al punto di saperla utilizzare efficacemente a lavoro e nella vita quotidiana, di riconoscere quando può aiutare e quando può ostacolare il raggiungimento di un obiettivo e di sapersi adattare continuamente alle sue novità. Solo una tale padronanza permette di utilizzare la tecnologia in modo aggiornato in classe.

- Pedagogical Content Knowledge

La Pedagogical Content Knowledge è quella introdotta da Shulman (1986) e consiste nell'abilità dell'insegnante di interpretare, rappresentare in modi diversi e adattare la propria Content Knowledge agli studenti, al fine di insegnarla in modo efficace.

Di fondamentale importanza in matematica è fornire rappresentazioni diverse per lo stesso concetto per raggiungere più studenti possibile, ovvero sfruttare la propria content knowledge per rendere accessibile la propria materia.

- Technological Content Knowledge

La Technological Content Knowledge è la comprensione di come la tecnologia e gli argomenti insegnati si influenzino vicendevolmente. È possibile infatti che una certa tecnologia renda possibile o limiti una certa rappresentazione matematica, così come un certo contenuto matematico può limitare il tipo di tecnologia utilizzabile. L'insegnante deve quindi saper scegliere quale tecnologia è la più appropriata di caso in caso e capire come un argomento si relaziona con una certa tecnologia.

Quando nella scuola secondaria di secondo grado si studia la geometria solida, per esempio, è fondamentale avere a disposizione software che rappresentino ellissoidi, paraboloidi e tutte le figure che si vuole osservare e che le rendano esplorabili, cosa che non sarebbe possibile solo grazie a un disegno fisso su una lavagna. Contemporaneamente però, una classe della primaria che sta lavorando su perimetri e aree e sta osservando come poligoni con lo stesso perimetro possano

avere aree diverse, gioverà molto di più di un insegnante che, grazie a un filo chiuso, mostra loro rettangoli diversi tutti accomunati dall'aver perimetro pari al filo, rispetto ad avere la stessa rappresentazione su un supporto digitale dove l'esperienza è meno tangibile.

- Technological Pedagogical Knowledge

La Technological Pedagogical Knowledge è la conoscenza di come l'insegnamento e l'apprendimento cambino quando una determinata tecnologia viene utilizzata in un certo modo. Per costruire la TPK, l'insegnante deve quindi conoscere approfonditamente i vincoli e le potenzialità delle tecnologie che vuole utilizzare, tanto quanto deve saper prevedere come probabilmente la propria classe risponderà a tali tecnologie.

La TPK è particolarmente importante perché, mentre la maggioranza dei software più conosciuti sono stati sviluppati per le aziende e i blog e i podcast sono stati sviluppati per l'intrattenimento e la comunicazione, è raro che qualcosa venga sviluppato con uno scopo didattico. Gli insegnanti devono quindi mettere in gioco lungimiranza, creatività e mentalità aperta per guardare oltre gli usi più comuni delle tecnologie e trovare una loro declinazione in ambito didattico.

Nella prossima sezione vedremo alcuni esempi di ricercatori che, utilizzando hardware sviluppati per scopi commerciali (e quindi facilmente reperibili a prezzi abbordabili), hanno sviluppato software finalizzati ad attività didattiche.

- Technological Pedagogical Content Knowledge

Infine, il modello TPACK è ciò che riunisce tutto quanto analizzato sopra e gli autori evidenziano che è diverso rispetto a possedere tutte e tre le conoscenze di base separatamente. Il framework TPACK costituisce, infatti, la base di un insegnamento efficace con la tecnologia, richiedendo all'insegnante di:

- saper rappresentare concetti diversi con le tecnologie più adatte, come visto nell'esempio riportato per la Technological Content Knowledge;
- adottare tecniche pedagogiche che permettano di utilizzare le tecnologie in modo costruttivo al fine dell'apprendimento (andare nel laboratorio dei computer per utilizzare GeoGebra non significa fare una lezione "di riposo", ma dev'essere parte fondamentale della spiegazione del concetto matematico che si sta studiando);
- conoscere gli ostacoli più comuni nell'apprendimento di determinati concetti e saper individuare quali tecnologie possano facilitare questi passaggi (vedremo

nel capitolo successivo come la tecnologia sia fondamentale nell'insegnamento dei limiti proprio per questo punto);

- riconoscere che gli studenti possiedono nozioni pregresse e che è necessario insegnare tenendone conto (la maggioranza degli studenti nel primo ciclo di istruzione è convinta che la moltiplicazione possa solo ingrandire i numeri coinvolti, per esempio);
- utilizzare le tecnologie per sviluppare nuove epistemologie o rafforzare quelle esistenti.

Infine, è importante ricordare che il framework TPACK si utilizza sempre in un contesto, il quale influenza, per esempio, il tipo di tecnologia a disposizione o la disponibilità dei colleghi a formarsi e a portare avanti nuove sperimentazioni volte a migliorare l'apprendimento degli studenti. Non esiste allora una ricetta perfetta che funziona sempre, l'insegnante deve saper adattare il framework a ciò che lo circonda.

A conferma dell'importanza di formare i docenti sul framework TPACK, Chai et al. (2013) hanno osservato come numerosi studi condotti su insegnanti che sono stati così formati evidenzino, come previsto, una maggiore autonomia nel creare lezioni in cui si utilizza la tecnologia, nonché un utilizzo migliore della tecnologia stessa rispetto ai gruppi di controllo.

La sequenza didattica sul concetto di limite, sviluppata nel Capitolo 3, si basa proprio su questi studi. La content knowledge dell'insegnante non viene infatti imposta dall'alto, al contrario verrà utilizzata la tecnologia per far emergere le nozioni pregresse e le preconcezioni degli studenti, nonché per dare basi tangibili a un argomento astratto. Le tecnologie utilizzate sono quindi parte integrante del percorso tanto quanto lo è la consapevolezza di quali siano gli ostacoli più comuni nell'apprendimento del concetto di limite, al fine di dare agli studenti la più ampia ricchezza di significati possibile.

2.1.1 Realtà Aumentata

Sempre più spesso si sente parlare di Realtà Estesa (o abbreviando XR), questo nome è un termine ombrello che racchiude i tre ambienti seguenti:

- Realtà Virtuale: ambiente completamente immersivo in cui si esiste tramite un avatar che si relaziona con altri avatar e oggetti virtuali;
- Realtà Aumentata: ambiente nel quale oggetti virtuali vengono sovrapposti al mondo reale;

- Realtà Mista: ambiente nel quale coesistono oggetti virtuali e reali, i quali possono interagire tra loro.

Sono proprio questi i tipi di ambiente utilizzati dai visori, dispositivi acquistati da sempre più persone globalmente (Draw & Code, 2023).

La Realtà Estesa è decisamente una nuova frontiera da esplorare in ambito didattico, grazie infatti al Piano Scuola 4.0 promosso dal Ministero dell'Istruzione (2022) tante scuole italiane hanno acquistato dei visori per fare attività in realtà virtuale o aumentata. D'altro canto però, i tempi estremamente contingentati entro i quali le scuole hanno dovuto fare questi acquisti, non ha permesso loro di studiare, prima dell'acquisto, come avrebbero poi effettivamente utilizzato queste nuove tecnologie. ImparaDigitale (2023) ha stimato che alla fine dell'attribuzione dei fondi sarebbero stati spesi € 2.430.697 in realtà aumentata, considerando un valore medio di € 500 a visore, questi equivarrebbero a circa 4.800 visori ovvero a una media di 240 visori per ogni regione, contemporaneamente, però, spesso non sono stati acquistati software didattici che permettono di utilizzare questi visori e le poche licenze comprate avevano una scadenza annuale o biennale. In questo momento le scuole sono quindi alla ricerca di attività didattiche significative che permettano loro di non lasciare i visori chiusi nelle stazioni di ricarica.

Su questa necessità Rosi et al. (2022) e Bagossi et al. (2023, 2024) hanno studiato come utilizzare la realtà aumentata in ambito didattico, in particolare in ambito fisico e matematico. Per quanto osservato nel paragrafo dedicato alla TPK, lo sviluppo di software dedicati alla didattica per i visori è particolarmente lodevole, in quanto risparmia agli insegnanti di doverli creare loro stessi, quando non tutti gli insegnanti (probabilmente la maggioranza) ne sono in grado.

Analizziamo allora nel dettaglio di cosa si occupano questi software. AnReAL (Augmented Reality Active Learning) è stato sviluppato da Rosi et al. (2022) per lo studio della cinematica e della dinamica in fisica. Il software permette infatti di tracciare il moto dei controller in tempo reale, siano essi in mano a una persona che si muove, o legati a un qualsiasi oggetto. Durante il tracciamento del moto, AnReAL può essere impostato affinché disegni, sempre in tempo reale, i vettori che caratterizzano il moto, come per esempio vettori velocità, accelerazione, forze o momenti. Questo permette agli studenti di visualizzare in tempo reale concetti che fino a quel momento erano rimasti solo astratti o disegnati, e quindi statici e bidimensionali, su una lavagna; se si pensa per esempio al moto circolare uniforme, la cui accelerazione è costante e diretta verso il centro della circonferenza percorsa, è chiaro quanto la realtà aumentata possa essere d'aiuto nel suo studio. Contemporaneamente il software traccia anche un grafico dei dati che si vogliono

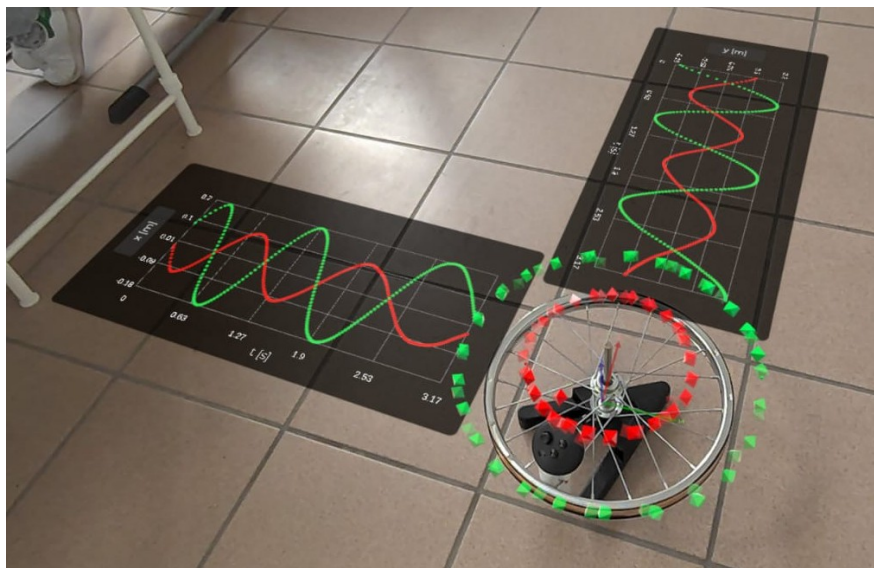


Figura 2.2: AnReAL utilizzato per studiare il moto circolare uniforme

osservare in funzione del tempo, si possono graficare, per esempio, le posizioni dei punti, la loro velocità, la loro accelerazione, la quantità di moto, la forza totale che agisce su di essi e molto altro grazie ai continui aggiornamenti del software (si veda la Figura 2.2).

Infine AnReAL permette di utilizzare metodologie didattiche come il Predict Observe Explain, nel quale gli studenti formulano un'ipotesi, poi osservano l'esperimento e controllano se la previsione che avevano fatto coincide con quanto osservato oppure no, in entrambi i casi devono poi dare una spiegazione del fenomeno. Questo approccio permette di rendere molto più partecipi gli studenti rispetto al fare solo vedere l'esperimento. Gli studenti che hanno provato AnReAL hanno molto apprezzato l'immediatezza dell'applicazione.

Bagossi et al. (2023) hanno studiato come la realtà aumentata possa essere un buon mezzo affinché gli studenti si pongano domande sull'attività che stanno svolgendo, creando così un approccio molto più proficuo rispetto a quando è l'insegnante a fare le domande, perché porta a una comprensione migliore di ciò che si sta studiando. In particolare hanno studiato la reazione di alcune studentesse mentre osservavano il moto di un blocco su un piano inclinato tramite la realtà aumentata, la quale, durante la discesa del blocco, registrava dati sulla distanza rispetto al tempo. Gli autori hanno verificato che effettivamente la realtà aumentata ha spinto gli studenti a porsi domande, in particolare all'inizio hanno fatto principalmente "attention focus questions", ovvero domande con lo scopo di portare l'attenzione della persona a cui si sta ponendo la domanda dove è focalizzata l'attenzione di chi sta facendo la domanda; mentre l'esperimento

proseguiva, invece, sono aumentate le “testing questions”, ovvero le domande fatte per accertarsi di aver capito. Gli autori hanno inoltre notato che la coesistenza di oggetti reali e virtuali ha portato le studentesse a utilizzare sia le parole che i gesti e questo le ha aiutate a comprendere il grafico generato dalla realtà aumentata.

Bagossi et al. (2024) hanno inoltre sviluppato il software “Touch the derivative” per far scoprire agli studenti il concetto di derivata, intesa come la funzione che associa a ogni punto del dominio il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione originaria in quel punto. L’applicazione si apre proponendo allo studente sette funzioni diverse tra cui scegliere, poi, una volta scelta la funzione, lo studente la segue col dorso della mano e, se la segue in modo preciso, appare sul grafico anche la tangente alla funzione che si muove con la mano e contemporaneamente viene tracciata la derivata della funzione considerata. Gli autori hanno mostrato che far sentire agli studenti, tramite il proprio corpo, la correlazione che esiste tra una funzione e la sua derivata permette loro di capirla prima della definizione formale.

In aggiunta alle motivazioni già evidenziate, nel Paragrafo 2.2 incontreremo ulteriori motivazioni per le quali le attività che coinvolgono il movimento del corpo, come quelle appena riportate, sono oggi considerate fondamentali per l’apprendimento degli studenti.

2.2 Embodied learning

Il testo di Palmiero e Borsellino (2014) narra come la scienza cognitiva sia passata dalle teorie basate sul dualismo cartesiano tra *res cogitans* e *res extensa* all’embodied cognition. Cartesio sosteneva che la mente fosse un’entità astratta separata dal corpo, la cui unica finalità era quella di svolgere le azioni dettate dalla mente, ma la scoperta dei neuroni a specchio negli anni ’90 confermò le correnti che si stavano sviluppando in contrapposizione al dualismo cartesiano, secondo le quali le percezioni che viviamo grazie al nostro corpo sono parte integrante della nostra mente. Oggi la teoria dell’embodied cognition, sostengono gli autori, afferma che la corporeità è il mezzo tramite il quale impariamo e grazie al quale possiamo ragionare, non è quindi assolutamente subordinata alla mente, ma al contrario contribuiscono entrambe al nostro sapere in un unico intreccio.

Nonostante queste fondamentali scoperte psicologiche, Macedonia (2019) nota come continuiamo ad apprendere come facevano i nostri genitori, ovvero limitandoci a leggere e ad ascoltare da fermi e, in matematica, imparando formule e applicandole meccanicamente. Gli studi sull’embodied cognition evidenziano che,

quando pensiamo a un'azione o a un concetto astratto, si attivano gli stessi processi sensomotori che si attivano quando eseguiamo effettivamente quell'azione o azioni legate al concetto astratto; questo conferma che anche i concetti astratti, che si pensavano legati soltanto alla mente, sono in realtà fortemente legati all'esperienza che facciamo di ciò che ci circonda. Sulla base di questi studi, l'autrice evidenzia come sia stato scoperto che gli studenti imparano meglio la matematica quando l'insegnante accompagna con gesti significativi la spiegazione, rispetto a quando la spiegazione avviene solo in modo orale e scritto.

Questi studi diventano ancora più rilevanti quando si lavora su concetti astratti come quello di limite. Abbiamo infatti visto come parte dei libri di testo analizzati nel capitolo precedente propongano solo la definizione formale di limite e le formule necessarie per risolvere gli esercizi, senza dare riferimenti al mondo reale e tanto meno a esperienze corporee. Nella sequenza didattica proposta nel Capitolo 3 abbiamo allora volutamente inserito attività in cui vivere col proprio corpo il concetto di limite, al fine di renderlo più accessibile.

Fugate et al. (2018) sottolineano inoltre come, considerando che le nostre idee si formano a partire dalle esperienze che viviamo, l'ambiente e la cultura in cui ci muoviamo siano determinanti per il modo in cui pensiamo. È quindi estremamente importante ricordarsi, mentre si insegna, che persone con vissuti differenti impareranno in modo differente e non ci si può quindi aspettare, al termine di una lezione, un riscontro unico e condiviso da tutti gli studenti di una classe. Le autrici affermano che comprendere un linguaggio consiste nel collegare ogni parola a esperienze del nostro vissuto e che questa unione di esperienze sotto un'unica etichetta permette di costruire una simulazione a cui afferiamo ogni volta che sentiamo o utilizziamo quella determinata parola. Quest'idea conferma la validità del concetto di "radice cognitiva" sviluppato da Tall che abbiamo visto nel paragrafo 1.1.2, in quanto se arricchiamo da subito l'idea di limite, la simulazione che gli studenti assoceranno alla parola "limite" sarà migliore. Nel passaggio da esperienza fisica a concetto astratto è poi fondamentale il ruolo delle metafore, le quali ci permettono sia di fare salti concettuali dal concreto all'astratto, sia di radicare i concetti astratti nel nostro vissuto affinché essi siano di più facile comprensione per noi stessi.

Le autrici chiamano "embodied learning" l'insegnamento che si basa sull'embodied cognition e osservano come sia fondamentale nelle materie STEM. In particolare, per l'insegnamento della matematica hanno osservato come, maggiore sia la difficoltà di calcolo proposta agli alunni, più si attivino le aree somatosensoriali del cervello e che quando si permette agli studenti di utilizzare i gesti e il proprio

corpo per fare matematica, questi sviluppano una comprensione più ampia del problema che gli è stato proposto. Lo stesso, affermano, accade nello studio della fisica dove è stato provato che, se gli studenti possono condurre l'esperimento in prima persona, l'information retention (ovvero la capacità di fare riferimento alle conoscenze apprese anche sul lungo periodo) dell'argomento studiato è migliore rispetto a quando possono solo osservare l'esperimento.

Fugate et al. (2018) inoltre sostengono che i gesti possono sia essere sia reali, sia sfruttare le tecnologie immersive (come per esempio visori per la realtà virtuale o aumentata). Queste tecnologie sono fondamentali per poter utilizzare l'embodied learning anche nell'insegnamento di concetti astratti come quello di limite. Per questo, nella sequenza didattica sviluppata nel Capitolo 3, non ci siamo limitati a utilizzare software per il computer, ma abbiamo implementato anche software per la Realtà Aumentata.

L'articolo si conclude ricordando che il movimento o l'utilizzo di tecnologie utilizzati senza basarsi sull'embodied cognition, non possono essere considerati attività di embodied learning e che è fondamentale utilizzare l'embodied learning nelle ore curricolari, non solo nei progetti extra-curricolari.

Un aspetto dell'embodied learning che non abbiamo ancora approfondito, ma che costituisce un pilastro determinante dell'insegnamento, è l'utilizzo dei gesti. Sabena (2011) ha studiato come i gesti siano parte integrante del discorso, e non solo una cornice delle conversazioni. Per questo ha notato come essi possano essere un'importante risorsa in ambito matematico: quando vengono utilizzati dall'insegnante durante una spiegazione, infatti, contribuiscono ad alleggerire il carico cognitivo degli studenti, lasciando così più libera la loro memoria di lavoro di riorganizzarsi meglio e apprendere meglio. In particolare, nell'ambito del calcolo infinitesimale, ha notato che, in una classe di un liceo scientifico osservata per due anni, sia gli studenti che l'insegnante utilizzavano un gesto formato da indice e pollice tenuti ad una distanza di qualche centimetro. Questo gesto rappresentava distanze nel piano cartesiano e incrementi di variabili, forniva quindi supporto al limite del rapporto incrementale, definizione del concetto di derivata. Questo gesto rappresenta allora la componente embodied del concetto di derivata e aiuta quindi a comprendere quest'ultimo proprio grazie al ponte tra esperienza fisica e concept definition che si crea con il gesto.

Capitolo 3

Didattica dei Limiti con l'implementazione della Realtà Aumentata

Nel capitolo 1 abbiamo studiato le difficoltà più comuni nell'apprendimento dei limiti e nel capitolo successivo le potenzialità del framework TPACK. Quest'ultimo capitolo è allora dedicato a illustrare alcune proposte didattiche per l'insegnamento dei limiti con l'implementazione della realtà aumentata.

La prima attività presentata si intitola “Augmented Mathematics” ed è stata proposta a un gruppo di studenti in visita al Dipartimento di scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia come parte del loro percorso di Formazione Scuola-Lavoro. La seconda attività descritta è denominata “Walking the limit” e unisce il concetto di limite ad alcuni suoi possibili significati fisici. Entrambe le esperienze utilizzano il software sopracitato AnReAL.

In queste attività, ma anche nella sequenza didattica proposta nel Paragrafo 3.3, due tra i riferimenti principali sono il “Laboratorio di Matematica” e la “Discussione matematica”.

Il primo è stato definito dall'Unione Matematica Italiana (2003, p. 27) come segue:

“Il Laboratorio [...] si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate sull'uso di strumenti, tecnologici e non, e finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non vuole essere un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, idee.”.

a cui si aggiunge che:

“La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all’uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall’altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l’esercizio di tali attività”.

Il laboratorio non appartiene più solo alle scienze applicate, ma diventa un approccio didattico grazie al quale gli studenti costruiscono significati, invece di riceverli passivamente.

Al termine di questi laboratori, e in molte altre occasioni, verrà utilizzata la “Discussione matematica” come definita da Bartolini Bussi et al. (1995, p. 7):

“Una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell’attività di insegnamento apprendimento”.

I significati allora si cominciano a costruire durante il laboratorio e continuano a formarsi durante la discussione coi compagni, guidata dall’insegnante. Per quanto osservato nel Capitolo 1, questo è fondamentale, in quanto i concetti imposti dall’alto non vengono mai completamente compresi dagli studenti.

Il capitolo si concluderà con un’ipotesi di sequenza didattica sui limiti, all’interno della quale sono state inserite Augmented Mathematics e Walking the limit. La sequenza si basa, oltre che sulle riflessioni derivanti dai primi due capitoli, sulle Linee Guida per le discipline STEM (MIM, 2023). Queste, in particolare nelle indicazioni metodologiche specifiche per il secondo ciclo di istruzione, richiedono il superamento di una didattica frontale a favore di attività e momenti di gruppo, di ricerca e di sperimentazione.

3.1 Augmented Mathematics

Augmented Mathematics è un’attività laboratoriale proposta agli studenti suddivisi in piccoli gruppi e che prevede l’utilizzo della realtà aumentata per cominciare ad approcciarsi al concetto di limite. È destinata a studenti di quarta e quinta secondaria di secondo grado che non hanno ancora affrontato questo argomento. L’obiettivo di questa attività è infatti di scoprire in modo intuitivo l’idea di limite di una funzione, nonché di far emergere tutti i preconcetti che possediamo rispetto all’idea di limite, prima di introdurre la sua definizione formale, come consigliato da Cornu (1991) e dall’Unione Matematica Italiana (2003).

L'attività è stata sviluppata all'interno di questo lavoro di tesi sulla base della letteratura scientifica studiata nei primi due capitoli. *Augmented Mathematics* chiede a studenti, che non hanno ancora incontrato il concetto di limite, di disegnare il grafico di una funzione della quale conoscono solo alcuni limiti. I limiti sono scritti su una scheda sia con la notazione matematica, sia in modo discorsivo, affinché gli studenti possano congetturare in gruppo sul loro significato. Abbiamo affiancato, ai limiti espressi in notazione matematica, il modo in cui si leggono in quanto, prevedendo di avere studenti che non avevano mai studiato il concetto di limite, la notazione matematica da sola non sarebbe stata probabilmente sufficiente a far emergere la *concept image* legata alla parola limite; per cui, per esempio, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ è affiancato alla frase “Quando x tende a $-\infty$, il limite della funzione $f(x)$ vale 3”. Come anticipato, l'attività è stata proposta a un gruppo di studenti a Febbraio 2026, la scheda che è stata a loro fornita durante l'attività è consultabile nell'Appendice A.

3.1.1 Svolgimento dell'attività

Il software in Realtà Aumentata che è stato utilizzato è *AnReAL*, il quale, ricordiamo, permette di tracciare il moto dei controller, di rappresentare diversi vettori a scelta dell'utente e di far disegnare grafici dei dati raccolti rispetto al tempo. Per questa attività abbiamo visualizzato solo la traccia del moto, senza eventuali vettori, e non sono stati considerati i grafici cartesiani in funzione del tempo.¹

Il laboratorio è cominciato spiegando agli studenti che lo scopo della sperimentazione era di capire quanto fosse intuitivo il concetto di limite e, di conseguenza, che era normale che non sapessero nulla riguardo all'argomento trattato; è stato poi illustrato come utilizzare il visore e, in particolare, come utilizzare *AnReAL*. Infine, è stata fornita la scheda che si trova nell'appendice A. Questa era uguale per tutti, tranne per i limiti della prima funzione proposta che cambiavano da gruppo a gruppo, per evitare che in un primo momento si influenzassero vicendevolmente. L'attività è composta da una prima fase in cui si chiede agli studenti di disegnare con *AnReAL* il grafico di una funzione della quale conoscono solo tre limiti. Concluso questo primo, semplice, grafico, gli alunni devono rispondere ad alcune domande mirate a farli riflettere sulle difficoltà che hanno incontrato, su come le hanno risolte (se le hanno risolte) e anche su quali gesti e parole hanno usato per

¹In seguito allo svolgimento dell'esperienza con gli studenti è stata inserita anche la funzione *draw* che permette di disegnare senza registrare dati fisici ed è quindi ancora più adatta per questa attività.

confrontarsi.

Ci si aspetta che a questo punto il gruppo abbia raggiunto un accordo interno su cosa sia il limite di una funzione, comincia quindi la seconda parte del laboratorio. La consegna è la stessa della fase precedente, per una nuova funzione, ma stavolta ci sono più limiti e svelano alcune insidie che prima non c'erano (limiti da destra e da sinistra e limiti che non esistono). In questa fase si chiede anche di costruire un riferimento reale che coincida con quello virtuale del software e di disegnare con AnReAL prendendo quello come riferimento. In seguito, gli studenti riportano la versione finale del loro secondo grafico sulla scheda, scattano una foto e la caricano su Padlet, un'applicazione per creare una bacheca virtuale. Grazie a Padlet, l'insegnante mostra a tutti gli studenti il lavoro di tutti i gruppi su una LIM e chiede loro quali sono le differenze tra il proprio grafico e quelli degli altri e, soprattutto, da dove scaturiscano secondo loro queste differenze. Si instaura quindi una vera e propria discussione matematica il cui scopo è di costruire il significato di limite di una funzione.

Hanno partecipato al laboratorio 26 studentesse e studenti di diverse scuole secondarie di secondo grado, di cui 19 di quarta e 7 di quinta, che avevano scelto di svolgere parte della loro Formazione Scuola-Lavoro presso il Dipartimento di Matematica di UniMoRe. Tutti gli alunni di quinta avevano già studiato il concetto di limite, mentre gli altri non lo avevano mai affrontato. Sono stati suddivisi in due gruppi da tre alunni e in cinque gruppi da quattro, gli studenti di quarta e di quinta sono stati divisi in gruppi differenti in modo che ci fosse omogeneità di conoscenze all'interno dello stesso gruppo.

Un gruppo di studenti di quinta secondaria di secondo grado è stato registrato con video e audio grazie a un tablet (di seguito denominato gruppo A) e altri due gruppi di studenti di quarta secondaria di secondo grado sono stati registrati solo con audio (di seguito denominati gruppo B e gruppo C).

3.1.2 Difficoltà principali riscontrate dagli studenti

La più grande perplessità rilevata in tutti i gruppi formati da studenti di quarta secondaria di secondo grado è rappresentata dalla seguente frase pronunciata dal gruppo B: "Non sapendo cosa sono i limiti, non saprei proprio come farlo". Nonostante fosse stato esplicitato che stavamo conducendo una sperimentazione e che quindi non esistevano risposte sbagliate e che osservare come lavoravano era proprio il nostro scopo, gli studenti hanno comunque fatto fatica a muoversi liberamente nell'attività. Questo potrebbe essere attribuibile a una scarsa abitudine a svolgere attività laboratoriali in cui i concetti vengono formalizzati al termine

dell'attività. Infatti, solo dopo aver avuto conferma da una delle responsabili dell'attività del fatto che stavano procedendo nella direzione giusta, hanno cominciato a osare di più nelle proprie risposte. Del resto una studentessa di quinta, quando alla fine dell'attività è stato chiesto ai gruppi cosa secondo loro aveva funzionato oppure no, si è immedesimata autonomamente in una studentessa di quarta che non conosceva i limiti e ha risposto: "Secondo me forse... cioè se uno non sa cosa sono i limiti, cioè come... non so come come possa fare... molto complesso...". Questa forte perplessità conferma l'esistenza di un contratto didattico come quello riportato da D'Amore e Fandino (2007, p. 24):

"In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito quello di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico"

La studentessa infatti, nonostante le premesse dell'attività, quando si immedesimava in una studentessa di quarta percepiva una difficoltà notevole dovuta al non aver ricevuto abbastanza informazioni per capire come poter interpretare l'attività e svolgerla come noi presumibilmente avremmo voluto che venisse svolta. La scelta di rompere il contratto didattico era intenzionale e proprio per questo l'attività è stata proposta in una situazione a-didattica. Brousseau e Warfield (2020) definiscono le situazioni a-didattiche come attività durante le quali si genera ogni sorta di conoscenza, sia quella attesa, sia frammenti incompleti o anche falsi rispetto alla conoscenza che si vuole raggiungere; per gli autori, in una buona situazione a-didattica, l'ambiente stesso in cui ci si pone (che può essere costituito da testi, oggetti materiali o dai compagni) dà risposte oggettive, permettendo così agli studenti di correggere i propri errori senza basarsi esclusivamente sull'autorità dell'insegnante. Quando l'insegnante interviene nell'attività, infatti, rischia di bloccare il flusso di pensieri degli studenti e questo è esattamente ciò che è successo per il gruppo C. Dopo la richiesta di chiarimenti da parte del gruppo C su cosa fosse un limite, io stessa ho realizzato di averli guidati troppo: per l'ora e mezza successiva il gruppo si è vincolato alle mie parole, che essendo orali e non scritte, sono state rielaborate più volte, probabilmente sulla base delle loro preconcezioni. Questo li ha portati a contraddizioni che loro stessi sembravano percepire, ma che venivano presto ignorate pur di rimanere vicino all'interpretazione che avevano da-

to alla mia spiegazione, ovvero nel tentativo di rientrare in un contratto didattico. Possiamo allora affermare che è proprio da questa rottura del contratto didattico che nasce lo smarrimento degli studenti, i quali, per quanto emerso, non sono abituati ad esplorare davvero liberamente un concetto senza attese o istruzioni esplicite da parte dell'insegnante. Il successo di questo approccio è comprovato dal fatto che alla fine dell'esperienza gli studenti hanno avuto la soddisfazione di aver completato con successo un'attività per la quale, inizialmente, non si sentivano all'altezza.

Un altro lato dell'attività che è stato poco apprezzato consiste nella condizione per cui una sola persona non poteva avere sia i controller che il visore, ma dovevano averli persone diverse all'interno del gruppo. Dagli studenti questo è stato percepito come una limitazione, in quanto coordinarsi tra chi indossa il visore e chi ha i controller in mano è oggettivamente a tratti frustrante. In realtà questa nostra richiesta nasceva dalla volontà di stimolare gli studenti a discutere di quanto stavano osservando, a creare ponti tra reale e virtuale e quindi a stimolare lo scambio di idee. Siamo infatti volutamente nel contesto del laboratorio di matematica, dove i significati si costruiscono grazie agli strumenti, ma soprattutto grazie alle interazioni tra le persone. In ogni caso, per superare questo ostacolo, ogni gruppo è riuscito a sviluppare soluzioni diverse, come per esempio usare lo scotch di carta che avevano a disposizione per creare un punto di riferimento condiviso tra reale e virtuale.

Una difficoltà che invece non avevamo previsto riguarda l'essere consci che se nei limiti era sempre presente $f(x)$ questo era perché si faceva riferimento sempre alla stessa funzione e quindi i limiti dati erano da rappresentare con un unico grafico. Quasi tutti i gruppi, pur essendo partiti disegnando tanti rami quanti erano i limiti, alla fine si sono resi conto che la funzione era sempre la stessa e hanno disegnato un unico grafico (come per esempio quello della figura 3.2); solo il gruppo C ha mantenuto tante tracce diverse e ha consegnato il disegno della Figura 3.1, dal quale emerge che avevano comunque intuito correttamente l'idea di limite di una funzione.

Infine tutti gli studenti, sia di quarta che di quinta, sono rimasti perplessi davanti all'ultimo limite, dove compariva la dicitura “non esiste”. Tutti i grafici prodotti dai gruppi, infatti, non rappresentavano nulla nel semipiano $x > 6$: alcuni gruppi hanno affermato che non sapendo cosa metterci l'avevano lasciato vuoto, altri hanno dichiarato che il fatto che non esistesse il limite della funzione a $+\infty$ implicava che la funzione stessa non esistesse per valori di x maggiori di 6. Con una breve discussione matematica finale (Bartolini Bussi et al., 1995), gli studenti

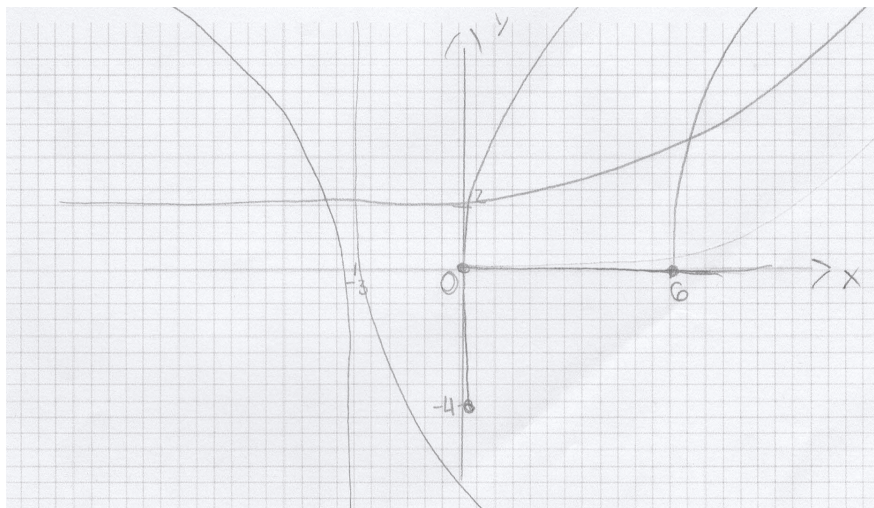


Figura 3.1: Grafico del gruppo C

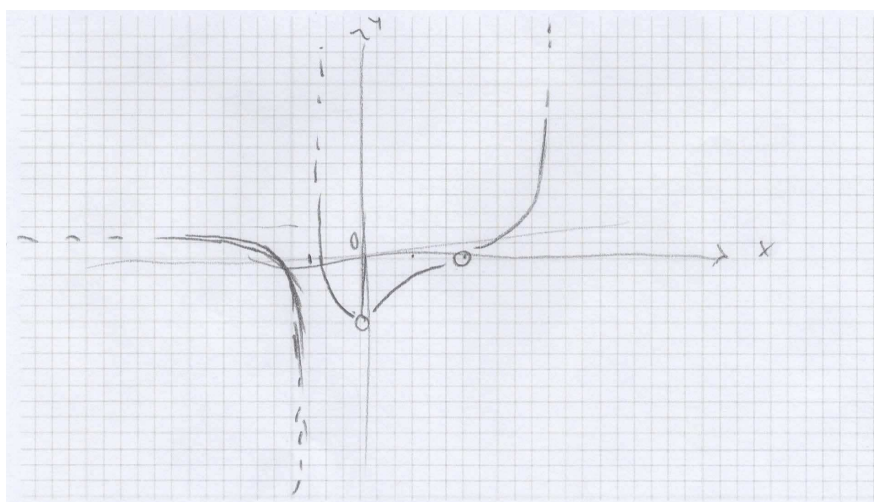


Figura 3.2: Grafico di un gruppo di studenti di quarta

hanno concordato che la funzione non doveva per forza fermarsi nel semipiano $x < 6$, ma che a un certo punto doveva comunque fermarsi o interrompendosi, o grazie a un asintoto verticale. Chiedendo loro se esistesse qualche altro caso di indecisione che poteva giustificare la non-esistenza del limite, una studentessa ha proposto una funzione che si diramava, ma i compagni le hanno subito fatto notare che in quel caso non sarebbe stata una funzione. Riproponendo allora la domanda, un'altra studentessa ha proposto il seno e il coseno come funzioni il cui limite per x che tende a infinito non esiste, in quanto, pur essendo limitate tra -1 e 1, continuano a oscillare tra i due valori e quindi non possiamo attribuire loro un valore univoco quando x tende a $+\infty$.

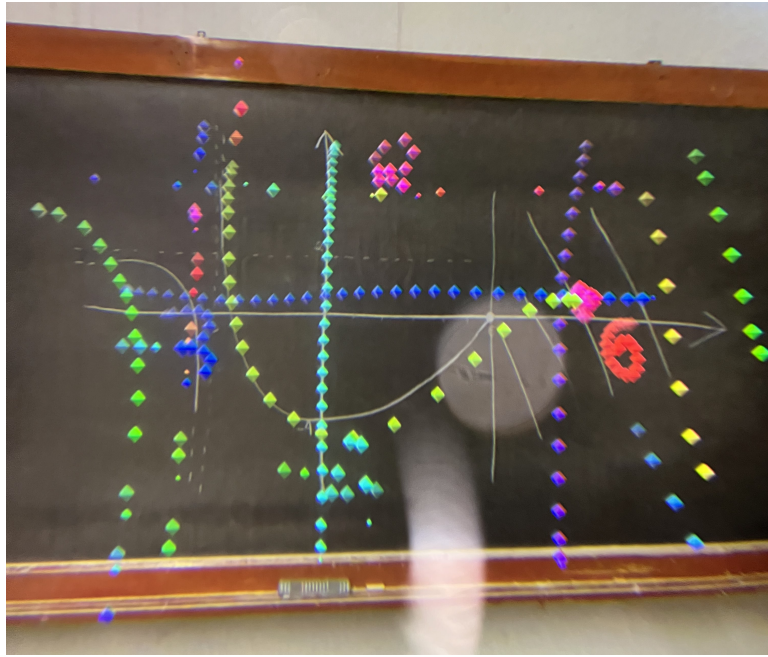


Figura 3.3: Grafico virtuale e reale di un gruppo

3.1.3 Feedback a posteriori degli studenti

Gli studenti sono stati da subito entusiasti di utilizzare un visore, nonostante le forti perplessità sorte dal dover fare un'attività basandosi solamente sulla loro intuizione, un'attività che quindi non era basata su conoscenze già acquisite ma che mirava a fare scoprire direttamente a loro cosa fossero i limiti. Il laboratorio in generale ha riscontrato un ottimo successo tra gli studenti, che sul Padlet, alla richiesta "Raccontaci com'è andata e cosa ti porti a casa da questa giornata", hanno risposto:

"È stato molto interessante, la realtà aumentata non l'avevo mai provata ma sapevo il concetto generale. È stato molto divertente usarla per provare a risolvere dei problemi"

"Nonostante non conoscessi i limiti mi ha dato la possibilità di arrivare in un modo diverso e più divertente a capirli senza che nessuno mi dicesse prima come fare."

"è stato molto divertente lavorare con i visori e fare qualcosa di diverso dal solito. avrei inserito altre attività da fare con i visori, soprattutto per chi conosceva già i limiti"

L'entusiasmo è sicuramente dettato in parte dall'aver avuto l'occasione di utilizzare un visore (probabilmente per la prima volta), ma i commenti evidenziano come l'attività stessa sia rimasta centrale e come sia stato assolutamente apprezzato il

contesto di problem solving in cui erano stati posti. In particolare, dal secondo commento emerge nuovamente come gli studenti non siano abituati a una didattica laboratoriale, ma la apprezzino molto quando viene proposta.

Le risposte estremamente positive e l'attiva partecipazione riscontrata in aula restituiscono una valutazione complessiva molto positiva.

3.1.4 Apporto dell'AR

La domanda sorge spontanea: era davvero necessaria la realtà aumentata per fare questa attività? Sicuramente non era indispensabile, la stessa attività si poteva fare anche su un foglio di carta. La realtà aumentata però permette agli studenti di utilizzare spazi molto più ampi per disegnare le funzioni e, grazie a questo, concetti come quello di infinito non sono più limitati al foglio, ma possono davvero essere lontani (quasi) quanto vogliamo. Inoltre, il fatto di avere molto più spazio a disposizione, spinge gli studenti a muoversi nello spazio con tutto il corpo, con tutti i benefici dell'embodied learning che ne conseguono, studiati nel Paragrafo 2.2. Infine, la realtà aumentata permette di osservare la tridimensionalità dello spazio anche quando si lavora sul piano. Gli studenti, infatti, disegnano davanti a loro un piano cartesiano che, inevitabilmente, non è mai costituito da rette, ma da linee un po' concave che sembrano rette solo se guardate dal punto di vista di chi le ha disegnate. Gli alunni osservano però il grafico da tutte le direzioni e questa concavità ricorda loro che, anche se in quel momento non la usiamo (consideriamo la linea concava come se fosse una retta), una terza dimensione è sempre presente esattamente come nel nostro vissuto, ampliando così la loro concept image di piano cartesiano e di sistema di riferimento in generale.

La stessa realtà aumentata e il fatto di avere o il visore o i controller ha poi reso molto più sfidante e cooperativa un'attività che altrimenti sarebbe stata certamente meno piacevole.

3.2 Walking the limit

Un laboratorio che fonde limiti e fisica è invece "Walking the limit". Il software utilizzato è sempre AnReAL, ma in questo caso prevede l'utilizzo dei grafici generati dal programma, oltre al tracciamento dei controller. Questa attività, al contrario della precedente, è una progettazione che non è stata ancora sperimentata.

Questo laboratorio nasce dallo studio dell'articolo di Raviv (2022) sul riconoscere i limiti nell'ambiente che ci circonda, unito all'utilizzo della realtà aumentata. L'autore infatti fa emergere l'importanza che ha per gli studenti cominciare a

studiare il concetto di limite da alcuni esempi intuitivi e presenti nella nostra vita quotidiana e questa attività chiede allo studente di replicare alcuni grafici tramite attività quotidiane, come camminare o correre, rese possibili dall'implementazione della Realtà Aumentata.

L'attività va svolta in gruppo e chiede agli alunni di riprodurre uno dei grafici della Figura 3.4 sui grafici generati da AnReAL. In particolare, uno studente indossa il visore, un altro cammina o corre col controller in mano un altro supervisiona il lavoro. I grafici del software saranno da impostare in modo che traccino, in un primo momento, il movimento rispetto all'asse x e, in un secondo momento, la velocità del movimento sempre rispetto allo stesso asse. Proprio per questo, i grafici forniti agli studenti non riportano etichette.

Nella prima fase dell'attività, gli studenti dovranno allora replicare il primo grafico, per esempio, considerando di avere sulle ascisse il tempo e sulle ordinate la distanza dall'origine rispetto all'asse x . Lo studente con i controller dovrà partire dall'origine del sistema di riferimento (dev'essere lo studente che indossa il visore a dirgli dov'è l'origine) e, camminando o correndo, avvicinarsi sempre di più a un punto, che avrà scelto a priori coi suoi compagni, senza mai superarlo. Lo studente farà tutto questo tracciando il suo moto con i controller.

Nella seconda fase dell'attività, gli studenti dovranno replicare sempre lo stesso grafico, ma considerando di avere sulle ordinate la componente in x della velocità. Lo studente con i controller dovrà partire da fermo e, camminando o correndo, accelerare avvicinandosi sempre di più alla velocità limite, ma senza superarla.

Nel tentativo di replicare questi grafici, gli alunni hanno bisogno di ragionare sul loro significato e quindi di allenare la loro abilità di leggere un grafico (competenza fondamentale per la vita quotidiana, come ribadito spesso già nelle "Indicazioni Nazionali per il curriculum" (MIM, 2026)). Nel primo caso sentiranno di doversi avvicinare sempre di più a un punto, ma questo diventerà fisicamente impossibile. Auspicabilmente questo vincolo dovrebbe tradursi nel desiderio di poter diventare più piccoli per avvicinarsi sempre di più al punto e quindi gettare le basi per comprendere meglio la definizione formale, come suggerito anche da Tall (1986) nell'attività riportata nel Paragrafo 1.4. Nel secondo caso, invece, nascerà la difficoltà di mantenere una velocità quasi costante, ma che cresce sempre più impercettibilmente.

Questa attività permette di fare esperienza diretta del concetto di limite e contemporaneamente sottolinea l'importanza di leggere cosa rappresentano gli assi del riferimento; gli studenti hanno infatti riprodotto due volte lo stesso grafico, ma su riferimenti diversi e infatti per riuscirci hanno dovuto eseguire azioni differenti.

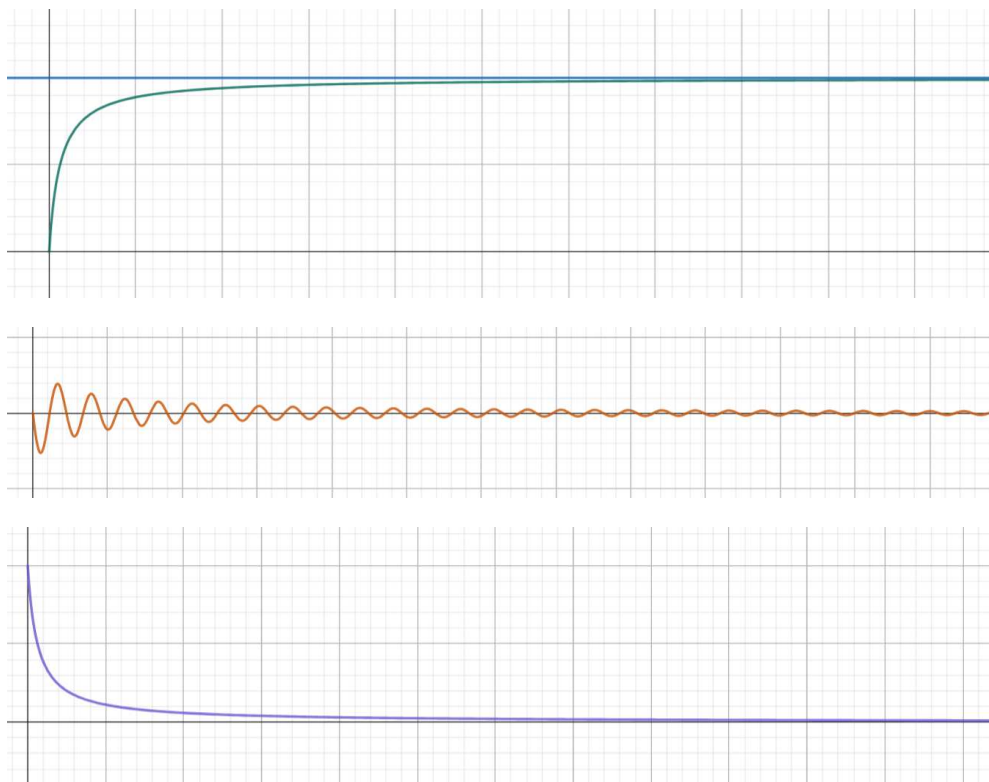


Figura 3.4: Funzioni di walking the limit

3.2.1 Apporto dell'AR

A differenza della prima, questa attività non poteva essere realizzata senza AnReAL. Esistono infatti software che analizzano il moto a posteriori, come per esempio Tracker, ed essi sono estremamente utili in mancanza di visori, ma, nel caso in cui si abbia quest'ultimi a disposizione, il fatto di poter tracciare il proprio moto in tempo reale (e quindi di vedere i propri successi e i propri errori in tempo reale), permette di fare molti più tentativi. Baccaglioni-Frank et al. (2018) evidenziano come avere la possibilità di sbagliare e correggersi sia fondamentale perché gli studenti e gli insegnanti vedano gli errori non come un fallimento ma come un'occasione di apprendimento.

Infine, anche in questo caso, sono rilevanti gli studi sull'embodiment del Paragrafo 2.2, per i quali sentire col proprio corpo il limite, mentre si cammina, è fondamentale.

3.3 Ipotesi di sequenza didattica

Questa sezione è dedicata a un'ipotesi di sequenza didattica che implementa tutto quanto osservato in questa tesi. È destinata a insegnanti che hanno spiegato

il concetto di funzione e si accingono a insegnare il calcolo infinitesimale. Il tempo totale previsto per portare a termine questa sequenza è di 16 ore.

La metodologia di insegnamento maggiormente utilizzata è l'inquiry-based learning, una metodologia di apprendimento attivo in cui lo studente fa esperienza diretta del fenomeno che sta studiando tramite problemi proposti dall'insegnante che deve risolvere e comprendere, lavorando individualmente o in gruppo (Ernst et al., 2017). La sua efficacia è fortemente supportata anche dal documento "Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe" della European Commission. High Level Group on Science Education (2007).

Le attività provano inoltre a essere sempre del tipo low threshold - high ceiling, ovvero accessibili a tutti e in cui tutti si possono bloccare. I laboratori e le discussioni matematiche, infatti, promuovono una partecipazione più ricca rispetto alle lezioni frontali.

I prerequisiti per affrontare questa sequenza didattica consistono nell'aver studiato il concetto di funzione e le funzioni trigonometriche, nonché nell'aver dimestichezza con argomenti come disequazioni, asintoti, grafici.

3.3.1 Sequenza didattica

- Fase 1 - durata: 2 ore

La sequenza didattica comincia con "Walking the Limit", seguita da una discussione guidata dall'insegnante durante la quale dovrebbe emergere l'aver vissuto un "avvicinarsi sempre di più"; contemporaneamente gli studenti dovrebbero concordare che, per quanto fossero precisi, non potevano avvicinarsi quanto volevano all'asintoto e poi far emergere il desiderio di potersi fare sempre più piccoli per poter replicare completamente il grafico. L'insegnante dirà allora che, in matematica, la percezione di andare sempre più vicino che hanno provato corrisponde al concetto "limite"; in particolare dirà che, per esempio, per il primo grafico della Figura 3.4 possiamo affermare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$, per esempio, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ per gli altri due grafici.

Il fatto di far riprodurre i grafici su un riferimento che ha prima lo spostamento e poi la velocità sulle ordinate serve da radice cognitiva, affinché nelle menti degli studenti i limiti non siano legati solo al concetto di vicinanza fisica (come nella prima fase dell'attività), ma anche di vicinanza a un valore (come nella seconda fase dell'attività), attributo fondamentale per l'utilizzo dei limiti in fisica.

- Fase 2 - durata: 2 ore

Per continuare a riflettere sul concetto di limite e poter essere sempre più precisi, in questa lezione si propone “Augmented Mathematics”. Qui, per la prima volta, gli studenti si cimentano nel disegno di un grafico senza conoscere punti specifici per cui passa la funzione, ma solo alcune indicazioni su come si comporta vicino a certi punti e a più e meno infinito. Al termine dell’attività si avvia una discussione matematica durante la quale gli studenti osservano il lavoro degli altri gruppi e si confrontano sul perché hanno disegnato il proprio grafico in un certo modo. Dalla discussione dovrebbe emergere che non esiste un grafico univoco per le informazioni che abbiamo, che un asintoto orizzontale può essere toccato anche infinite volte (come nella seconda casistica di “Walking the Limit”), le varie possibilità per cui un limite può non esistere e naturalmente un’idea di come si disegna correttamente il grafico di una funzione dati alcuni limiti.

- Fase 3 - durata: 2 ore

Questa lezione è dedicata a ricavare insieme agli studenti la definizione formale di limite, così che sia il risultato di un processo di conquista da parte degli alunni e acquisisca un significato da loro riconosciuto. Quando, o se, ne sorgerà la necessità, l’insegnante potrà introdurre il concetto di intorno o notazioni come $|x - x_0| < \delta$. Una volta formalizzata, attraverso una discussione di classe che parte dalle esperienze svolte, una definizione di limite, si può provare a calcolare alcuni limiti usandola. Per fare questo l’insegnante assegna un limite da risolvere, si stabilisce un δ o un N (dipende se le x tendono rispettivamente a un valore finito o infinito) a piacere e, nel primo caso, si svolge la disequazione $|x - x_0| < \delta$; determinato l’intervallo in cui varia x , ora si può costruire una tabella in cui si inseriscono alcuni valori di x presenti nell’intervallo e si calcolano le y corrispondenti. In questo passaggio è molto d’aiuto GeoGebra, infatti inserendo la funzione nel programma e uno slider che vari nell’intervallo calcolato, si può far scorrere un punto sulla funzione dandogli come ascissa i valori dello slider e per ordinata la funzione calcolata nei valori corrispondenti. Il programma restituirà l’ordinata del punto e gli studenti potranno inserirla nella tabella (GeoGebra rimuove quindi la fatica di dover calcolare questi valori a mano o anche con la calcolatrice, evitando di affaticare ulteriormente gli studenti e lasciandoli concentrati sull’attività). A questo punto sulla tabella si legge o a quale valore tende la funzione, oppure si leggono valori grandissimi (in valore assoluto) nel caso in cui il limite sia infinito. Infine, se si vuole controllare la correttezza dei calcoli nel caso del limite finito, si può risolvere la disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$ (dove ϵ è stato ottenuto come la differenza in valore assoluto della prima e dell’ultima y della tabella divisa per due) e verificare che l’intervallo che si ottiene è lo stesso del δ scelto inizialmente.

Risulterà presto chiaro che devono esistere regole di calcolo più veloci della definizione.

Evidenziamo come GeoGebra dia anche la possibilità di tenere presente che a una funzione corrisponde sempre (o quasi) un grafico e che il grafico ci aiuta ad avere un'idea intuitiva del risultato che dovremmo ottenere, così che mentre si risolve il limite si può attuare una sorta di controllo incrociato.

- Fase 4 - durata: 4 ore

Questa lezione è dedicata a osservare come si comportano, in generale, le funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche e goniometriche e poi a esporre, e se lo si vuole a dimostrare, le regole di calcolo dei limiti, sempre facendo riferimento a funzioni di cui si stanno osservando i grafici. Si comincia quindi a risolvere alcuni limiti più semplici.

Con il pretesto di esercitarsi a calcolare i limiti, in questa lezione l'insegnante propone esercizi che presentano forme di indecisione e di conseguenza introduce le tecniche per risolverle. Subito dopo si parlerà delle tre tipologie di punti di discontinuità e dei limiti notevoli.

Sarà infine interessante ricalcolare i limiti della lezione 3 e constatare che il nuovo metodo è decisamente più veloce.

- Fase 5 - durata: 2 ore

Poichè nella lezione precedente si è parlato punti di discontinuità, in questa lezione è organico dare la definizione di funzione continua.

A questo punto si avranno tutti gli strumenti per imparare a tracciare il grafico probabile di una funzione, studiando il suo dominio, il suo segno e i suoi limiti utili. È probabile che gli studenti abbiano già imparato a disegnare il grafico probabile di una funzione negli anni precedenti, in tal caso sarà interessante osservare con loro come i limiti ci diano nuove informazioni per affinarlo ulteriormente.

- Fase 6 - durata: 2 ore

Questa lezione è a disposizione degli studenti per chiedere all'insegnante chiarimenti su qualsiasi dubbio abbiano riguardo ai limiti, o dell'insegnante se ha notato la formazione di misconcezioni nelle menti degli studenti.

- Fase 7 - durata: 2 ore

La sequenza didattica si conclude con una valutazione sommativa come quella dell'Appendice B, nella quale sono presenti domande di teoria, esercizi e problemi.

In particolare i punti 1, 2 e 3 sono ispirati dagli studi di Epstein (2013) e testano se la concept image degli studenti è corretta, mentre i punti 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 sono di Sasso e Zanone (2020) e testano le abilità computazionali degli studenti.

3.3.2 Proseguimento della sequenza didattica

Lo stesso approccio utilizzato in questa sequenza didattica può essere portato avanti anche per l'argomento che solitamente segue il concetto di limite: il concetto di derivata di una funzione. Come si è visto nel Paragrafo 2.1.1, infatti, è già stato sviluppato un software dedicato alla scoperta della definizione di derivata, il quale può dare agli studenti una base intuitiva solida rispetto a cosa sia la derivata di una funzione, ancora prima di definirla come il limite del suo rapporto incrementale.

Conclusioni

A seguito dello studio della letteratura scientifica sull'insegnamento dei limiti, è emerso come il calcolo infinitesimale, argomento astratto e completamente nuovo per gli studenti, costituisca un tema particolarmente delicato da insegnare, poiché possono sorgere numerosi ostacoli concettuali. Nonostante ciò, dalle sperimentazioni condotte risulta che tali difficoltà possono essere superate adottando strumenti adeguati, capaci al tempo stesso di rendere l'esperienza di apprendimento coinvolgente e interessante.

L'analisi della letteratura ha evidenziato come, da decenni, i ricercatori in didattica della matematica siano alla ricerca di nuovi strumenti per favorire l'apprendimento dei limiti sia dal punto di vista concettuale sia da quello procedurale legato al calcolo e allo studio di funzione. La principale misconcezione riscontrata deriva dalla concept image dinamica di limite, molto comune tra gli studenti, secondo la quale una funzione "si avvicina" al proprio limite. Risulta infatti difficile che gli studenti sviluppino una concept image più vicina alla concept definition quando la definizione formale viene proposta all'inizio delle lezioni sul calcolo infinitesimale, momento in cui non possiedono ancora gli strumenti necessari per comprenderla pienamente, per poi essere abbandonata a favore di un'idea esclusivamente dinamica. In una prospettiva laboratoriale, la sequenza didattica proposta ha quindi stimolato inizialmente l'idea dinamica di limite, quando gli studenti non conoscevano ancora formalmente il concetto, con l'obiettivo di far emergere questa immagine intuitiva e sfruttarla come primo approccio coerente alla definizione matematica. Quest'ultima è stata introdotta successivamente e costruita dagli studenti sotto la guida dell'insegnante. In questo modo, la definizione di limite nasce dalla necessità di formalizzare matematicamente un'idea inizialmente intuitiva legata all'esperienza proposta. Il fatto che siano stati gli studenti stessi a costruire la definizione suggerisce inoltre una comprensione più profonda del significato e una maggiore probabilità di memorizzazione nel lungo termine rispetto a una definizione semplicemente presentata e poi non più utilizzata.

Un ulteriore errore tipico riguarda la convinzione che, quando il limite di una

funzione per x che tende a infinito esiste, la funzione sia monotona nell'intorno di infinito. Durante la sperimentazione questa difficoltà è effettivamente emersa: gli studenti hanno faticato a immaginare funzioni che attraversassero infinite volte il proprio asintoto orizzontale o funzioni il cui limite a più infinito non esistesse a causa di oscillazioni. Per questo motivo, nella sequenza didattica sono state presentate fin dalle prime lezioni funzioni che tendevano a zero intersecando infinite volte le asintote delle x e funzioni prive di limite a più infinito. Come sottolineato dal testo di Emma Castelnuovo e dagli studi di David Tall sulla concept image, arricchire fin da subito l'idea di limite permette infatti di prevenire alcune misconcezioni e di ampliarla progressivamente nel tempo.

All'interno del percorso sono risultati fondamentali anche gli studi più recenti relativi al framework TPACK e all'embodied learning, che hanno evidenziato il ruolo del movimento e dei gesti nei processi di apprendimento. A partire da queste prospettive si è cercato di immaginare attività capaci di coinvolgere l'intero corpo anche nell'esplorazione di un concetto astratto come quello di limite. Il framework TPACK suggerisce infatti che una didattica efficace integri simultaneamente conoscenze disciplinari, pedagogiche e tecnologiche; l'unione con l'embodied learning ha quindi permesso di progettare attività corporee strettamente connesse ai limiti matematici. Questa integrazione è stata resa possibile grazie alla realtà aumentata. Gli studi sull'utilizzo di software di AR nella didattica della matematica e della fisica stanno mostrando risultati promettenti e hanno portato alla progettazione delle attività Augmented Mathematics e Walking the Limit, finalizzate a permettere agli studenti di esplorare il concetto di limite attraverso esperienze immersive. In particolare, la prima attività è stata testata con un gruppo di studenti di quarta e quinta secondaria di secondo grado, ottenendo una risposta estremamente positiva. Inoltre, grazie agli studi sull'embodied learning e alla disponibilità di strumenti tecnologici, sono state associate rappresentazioni grafiche a ogni passaggio logico, offrendo una rappresentazione più tangibile anche dei concetti maggiormente astratti.

La sequenza didattica proposta potrebbe rivelarsi particolarmente efficace per studenti con disturbi specifici dell'apprendimento, che possono beneficiare della presenza di un maggiore supporto grafico. Allo stesso tempo, le stesse tecnologie possono costituire un ostacolo per studenti con disabilità visive; tuttavia, strumenti alternativi permettono di superare tale difficoltà. Orbit Research, ad esempio, ha sviluppato Graphiti – Interactive Tactile Graphics Display, dispositivo che consente alle persone cieche o ipovedenti di percepire tramite il tatto ciò che viene mostrato su un display, rendendo possibile la partecipazione alle attività proposte

alla pari dei compagni vedenti.

Già quarant'anni fa Tall (1986) aveva intuito il potenziale della tecnologia nell'insegnamento dei limiti, nonostante i mezzi disponibili fossero ancora limitati. Oggi è possibile affermare che tale intuizione si è rivelata corretta: la tecnologia risulta particolarmente efficace nel rendere il concetto di limite più interattivo, offrendo rappresentazioni dinamiche altrimenti difficilmente accessibili. Il continuo sviluppo di hardware e software amplia inoltre le possibilità di integrare stabilmente la tecnologia nella pratica didattica.

Giunti alla conclusione di questo lavoro di tesi, si può quindi affermare che la matematica è per tutti: è sufficiente avere un insegnante pronto ad accompagnare gli studenti nella sua scoperta.

Appendice A

Scheda FSL 4 Febbraio 2026

FSL 4 Febbraio 2026 - Augmented Mathematics: esplorare i concetti matematici con la realtà aumentata

Nome del gruppo:

1. Scegliete una persona del gruppo che indossi il visore, una seconda che supervisioni il lavoro del gruppo e una terza (ed eventualmente una quarta) che tenga i controller.

Chi ha i controller provi ad abbozzare il grafico di una funzione $f(x)$ per la quale valgano i seguenti limiti (a sinistra trovate il limite spiegato a parole, a destra la simbologia):

Quando x tende a $-\infty$, il limite della funzione $f(x)$ vale 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

Quando x tende a 1, il limite della funzione $f(x)$ vale 5 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

Quando x tende a $+\infty$, il limite della funzione $f(x)$ vale $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Per il momento non considerate il sistema di riferimento di AnReAL (il software che state usando).

Chi ha il visore controlli se è d'accordo con ciò che viene disegnato dai compagni e dia consigli per migliorare il grafico, il supervisore controlli che tutte le richieste vengano rispettate e prenda appunti per rispondere alle domande che trovate sotto. Quando ne avete bisogno, cambiate i ruoli liberamente.

Quali difficoltà avete incontrato?

.....
.....
.....

Se siete riusciti a risolverle spiegate come, altrimenti spiegate quali ostacoli sono rimasti

.....

Grazie a quali frasi, parole o gesti siete riusciti a migliorare il grafico?

.....

2. Posizionate ora il sistema di riferimento di AnReAL sul banco in modo che il banco e un piano cartesiano coincidano. Riportate con lo scotch di carta il piano cartesiano sul banco e, aiutandovi con i grafici generati da AnReAL, riportate i numeri sugli assi.

Consideriamo ora una nuova funzione $g(x)$ per la quale valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -4$$

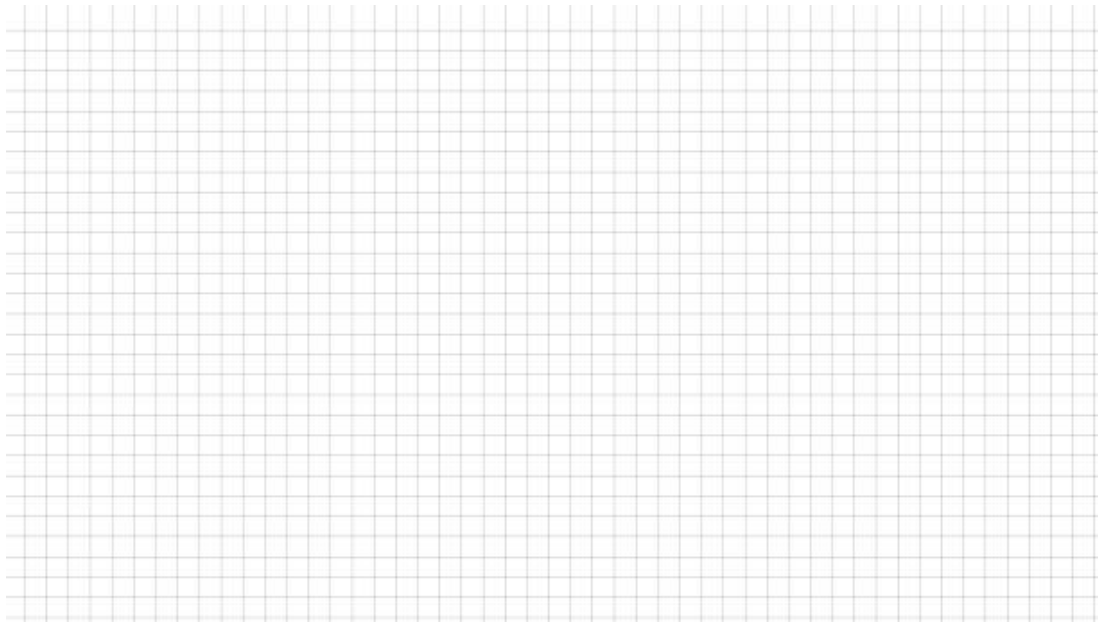
$$\lim_{x \rightarrow 6} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ non esiste}$$

coi controller disegnatte sul banco il grafico di $g(x)$ basandovi sugli assi che avete fissato, in questo caso siate più precisi rispetto a prima.

Il supervisore intanto disegni la funzione su questo foglio e chi ha il visore controlli che i grafici coincidano.

3. Riportate questo grafico sul padlet seguendo le istruzioni che vi sono state fornite, poi osservate il lavoro degli altri gruppi. Ci sono differenze?



Domande probabili:

Perché non vedo la traccia del controller?

Il moto viene tracciato solo quando il menu è chiuso, se è aperto chiudetelo col tasto B o Y. Se il menu è già chiuso, assicuratevi che la parte nera del controller sia rivolta verso il visore, altrimenti questo non riesce a rilevarli.

Come faccio a spostare il sistema di riferimento?

Aprite il menu e posizionate il controller sul sistema di riferimento, l'origine si illuminerà di arancione o di azzurro. Ora, tenendo premuto il grip, potete spostare il sistema di riferimento. Questo vale anche per il menu e per i grafici.

Se non riuscite a raggiungere il sistema di riferimento, resettatelo davanti a voi tenendo premuto il tasto meta.

Come cambio le ordinate del grafico di AnReAL?

Aprite il menu, puntando il controller destro verso il grafico appare un laser. Cliccando col trigger su $x(m)$ apparirà un menu a tendina da cui scegliere un'altra ordinata.

Appendice B

Verifica finale

1. Presa una funzione qualunque $f(x)$, se $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, allora $f(-1)$:
 - A. vale 2
 - B. è vicino a 2
 - C. non abbiamo abbastanza informazioni
 - D. non è definito
2. Una funzione può attraversare un suo asintoto orizzontale?
 - A. No
 - B. Sì
 - C. Solo se la funzione è continua
 - D. Solo se succede un numero finito di volte
3. Quale dei seguenti limiti non esiste?
 - A. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}$
 - B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x)$
 - C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$
 - D. $\lim_{x \rightarrow 5} (-2)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-\sqrt{x^2+1}}$ è uguale a
 - A. 0
 - B. 1
 - C. $+\infty$

D. $-\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2-5}{\ln(x-2)}$ è uguale a

A. 1

B. non esiste

C. $+\infty$

D. $-\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x$ è uguale a

A. e^4

B. e^{-4}

C. $+\infty$

D. $-\infty$

7. Enuncia la definizione di limite, se non la ricordi dai una definizione intuitiva.

8. Calcola il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} \right)$

9. Calcola il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-9}$

10. Il numero di unità da cui è composta una popolazione di batteri dopo un tempo t dall'istante iniziale di osservazione è descritto dalla funzione:

$$N(t) = 400 \left(2 + \frac{3t}{40 + t^2} + \frac{t + 2}{t + 1} \right)$$

Quanti batteri erano presenti nella colonia all'inizio del periodo di osservazione?

Qual è l'evoluzione della popolazione di batteri nel lungo periodo?

11. La lunghezza di un pesce, secondo il modello dovuto a Ludwig von Bertalanffy, è espressa da una funzione della forma:

$$l(t) = a(1 - be^{-0,25t})$$

dove a, b sono costanti reali positive dipendenti dalla specie, t è il tempo (misurato in anni), $l(t)$ è la lunghezza del pesce (in centimetri). Per una certa specie la lunghezza nell'istante iniziale di osservazione è 5 cm e la lunghezza limite cui ogni individuo della specie tende con il raggiungimento della massima età possibile è 20 cm. Determina le costanti a e b .

12. Traccia il grafico probabile della seguente funzione:

$$y = \frac{1 - \log_2(x)}{1 + \log_2(x)}$$

13. Traccia il grafico probabile della seguente funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 4}$$

Bibliografia

- Andriano, V., Arzarello, F., Ferrari, G., & Soldano, C. (2025). Limit as a challenge: Understanding the formal definition through an inquiry-game activity. In C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri & V. Randolph (Cur.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Research Reports* (pp. 35–42, Vol. 1). PME.
- Baccaglini-Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2018). *Didattica della Matematica*. Mondadori università.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Vrin.
- Bagossi, S., Boev, Y. K., & Swidan, O. (2023). Meaning-making through questioning in an augmented reality environment. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Cur.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 75–82, Vol. 2).
- Bagossi, S., Swidan, O., & Asbe, O. A. (2024). Feeling the slope: learning the derivative concept with augmented reality. *Proceedings of the 16th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, 5–12.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Centro documentazione educativa.
- Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2017). *Matematica.blu 2.0 - Vol. 5* (2nd). Zanichelli.
- Beyene, A. K. (2023). *Obstacles to students' learning of the limit concept: A comparative study* [Tesi di dottorato, Department of Teaching e Learning, Stockholm University].
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.

- Brousseau, G., & Warfield, V. (2020). Didactic Situations in Mathematics Education. In S. Lerman (Cur.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163–170). Springer International Publishing.
- Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C., & Valenti, D. (1988). *Elementi di Analisi Matematica*. La Nuova Italia.
- Chai, C. S., Koh, J. H. L., & Tsai, C.-C. (2013). A review of technological pedagogical content knowledge. *Journal of Educational Technology & Society*, 16(2), 31–51.
- Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). Springer.
- D’Amore, B., & Fandino, M. I. (2007). *Le Didattiche Disciplinari*. Erickson.
- Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5(3), 281–303.
- Draw & Code. (2023, maggio 26). *How Many People Use Virtual Reality*. <https://drawandcode.com/learning-zone/how-many-people-use-virtual-reality/>
- Epstein, J. (2013). The calculus concept inventory-measurement of the effect of teaching methodology in mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, 60(8), 1018–1026.
- Ernst, D. C., Hodge, A., & Yoshinobu, S. (2017). What Is Inquiry-Based Learning? *Notices of the American Mathematical Society*, 64(6), 570–574.
- European Commission. High Level Group on Science Education. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe* (Vol. 22845). Office for Official Publications of the European Communities.
- Fugate, J. M., Macrine, S. L., & Cipriano, C. (2018). The role of embodied cognition for transforming learning. *International Journal of School & Educational Psychology*, 7(4), 274–288.
- ImparaDigitale. (2023, dicembre 23). *Il PNRR nelle scuole, quanto e come si è speso* [Ultima consultazione: 27 March 2026]. <https://imparadigitale.nova100.ilsole24ore.com/2023/12/23/il-pnrr-nelle-scuole-quanto-e-come-si-e-speso/>
- Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Journal of education*, 193(3), 13–19.
- Macedonia, M. (2019). Embodied learning: Why at school the mind needs the body. *Frontiers in psychology*, 10, 2098.

- MIM. (2023). *Linee guida per le discipline STEM* (rapp. tecn.). Ministero dell'Istruzione e del Merito. <https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/Linee+guida+STEM.pdf/2aa0b11f-7609-66ac-3fd8-2c6a03c80f77>
- MIM. (2026). Indicazioni Nazionali per il curriculum - Scuola dell'infanzia e Scuole del Primo ciclo di istruzione. https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/INDICAZIONI_NAZIONALI_7_7_2025.pdf/63802aed-f9f4-dd6e-f427-c45aa9222f31?version=1.0&t=1751893295452
- Ministero dell'Istruzione. (2022). *Piano Scuola 4.0: Piano per la transizione digitale delle scuole del primo e del secondo ciclo di istruzione* (PNRR N. Decreto Ministeriale n. 161). Ministero dell'Istruzione. https://pnrr.istruzione.it/wp-content/uploads/2022/07/PIANO_SCUOLA_4.0_VERSIONE_GRAFICA.pdf
- MIUR. (2010a). Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali. <https://www.istruzione.it/alternanza/allegati/NORMATIVA%20ASL/INDICAZIONI%20NAZIONALI%20PER%20I%20LICEI.pdf>
- MIUR. (2010b). Istituti Professionali. Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.
- MIUR. (2010c). Istituti Tecnici. Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.
- Orbit Research. (n. d.). *Graphiti: Interactive Tactile Graphics Display*. Orbit Research. <https://www.orbitresearch.com/product/graphiti/>
- Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults* [Tesi di dottorato, University of Leeds].
- Palmiero, M., & Borsellino, M. C. (2014). *Embodied cognition: Comprendere la mente incarnata*. Aras edizioni.
- Raviv, D. (2022). WIP: A Visual Approach to Teaching and Learning the Concept of Limit. *2022 ASEE Annual Conference & Exposition*.
- Rosi, T., Onorato, P., & Oss, S. (2022). Augmented Reality Active Learning (AnReAL) activities for teaching/learning motion concepts. *Journal of Physics: Conference Series*, 2297(1).
- Sabena, C. (2011). Studiare la multimodalità dell'insegnamento-apprendimento: focus sui gesti. *Atti del Convegno in onore di Giorgio T. Bagni*.
- Sasso, L., & Zanone, C. (2020). *Colori della Matematica BLU 5* (2nd). DeAgostini Scuola.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4–14.
- Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics* [Tesi di dottorato, University of Warwick].
- Tall, D. (2006). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions. Limits, Infinity, and Proof. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). Emerald Publishing Limited.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational studies in mathematics* (pp. 151–169, Vol. 12). Springer.
- Unione Matematica Italiana. (2003). Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. *Notiziario della Unione Matematica Italiana*.