Università degli studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

La teoria dei multiinsiemi: un approccio fondazionale

Relatore

Chiarissimo Prof.

Arrigo Bonisoli

Candidato

Luigi Schettini

Anno Accademico 2024/2025

Desidero ringraziare il Professor *Arrigo Bonisoli* per aver seguito questo lavoro con disponibilità e attenzione. Il suo aiuto è stato per me importante non solo nella realizzazione della tesi, ma anche per le nozioni trasmesse durante il corso di logica, che si sono rivelate molto utili nella lettura dei testi e degli articoli matematici presenti nella bibliografia di questo elaborato e hanno decisamente agevolato lo sviluppo delle mie ricerche.

Un grazie sincero va anche a tutti i docenti universitari che hanno contribuito alla mia formazione matematica (e, indirettamente, anche filosofica!) e alla mia famiglia, che mi è stata vicina con costanza lungo tutto questo percorso.

Indice

Introduzione

Quando si pensa alla matematica moderna, la teoria degli insiemi è quasi inevitabilmente uno dei primi punti di riferimento. Nel tempo, essa è diventata il linguaggio di base con cui descrivere e organizzare una quantità enorme di strutture matematiche. Proprio per questo la sua forza è anche la sua semplicità: un elemento o appartiene a un insieme, oppure no. Tuttavia, questa stessa semplicità lascia fuori un aspetto non trascurabile: se uno stesso elemento compare più volte all'interno di una collezione, la teoria classica degli insiemi non è in grado di registrarlo; tutto viene ridotto alla sola appartenenza, senza tenere traccia del numero delle occorrenze.

In numerosi contesti matematici e teorici risulta invece naturale e d'obbligo considerare collezioni nelle quali gli elementi possono comparire più volte. Questo ha portato, nel corso degli anni, allo sviluppo della teoria dei multiinsiemi, che può essere interpretata come una generalizzazione naturale della nozione di insieme nella quale è possibile tenere conto della *molteplicità* (Def. **2.1**) degli elementi.

Il problema della formalizzazione dei multiinsiemi ha dato origine a diverse prospettive teoriche. A questo proposito, Wayne D. Blizard osserva:

> "There are two possible approaches to the formalization of multiset theory. The first is to develop first-order theories using the classical predicate calculus (with or without equality) […]. The second is to tamper with the underlying logic."
>
> (Blizard, W. D., "The Development of Multiset Theory", *Modern Logic*, vol. 1, 1991)

Questa osservazione mette in evidenza due possibili strategie per la costruzione di una teoria formale dei multiinsiemi. Da un lato, è possibile sviluppare teorie del primo ordine all'interno del quadro della logica classica, introducendo opportuni simboli e assiomi per descrivere la molteplicità degli elementi; dall'altro lato, si potrebbe invece modificare direttamente la struttura logica di base, introducendo nuove forme di logica adatte a trattare collezioni con elementi ripetuti.[1] Nel presente lavoro verrà adottata la prima prospettiva; in particolare, la teoria dei multiinsiemi verrà considerata nel quadro della logica del primo ordine, prendendo come riferimento principale l'assiomatica proposta da Blizard nel 1989. Tale impostazione rappresenta uno dei tentativi più sistematici di formalizzare la nozione di multiinsieme attraverso strumenti logici standard, mantenendo una continuità con il linguaggio e i metodi tradizionali della matematica (la sua consistenza relativa con gli assiomi di ZFC ne rappresenta un'ulteriore prova).

Nel corso degli anni la teoria dei multiinsiemi è stata sviluppata e utilizzata in numerosi ambiti della matematica e dell'informatica teorica, tra cui la combinatoria, la teoria delle categorie e in diversi modelli computazionali. Il presente elaborato non approfondirà, tuttavia, le applicazioni dei multiinsiemi a questi rami; l'attenzione sarà rivolta principalmente agli aspetti logici e fondazionali della teoria dei multiinsiemi, con particolare riferimento al linguaggio formale utilizzato, alle proprietà principali dei multiinsiemi e alle questioni concettuali e filosofiche che possono emergere nello studio di queste strutture.

Un aspetto particolarmente delicato riguarda infatti il problema dell'identità e della distinguibilità delle occorrenze di uno stesso elemento all'interno di un multiinsieme. Nella formulazione classica della teoria dei multiinsiemi le occorrenze di uno stesso elemento sono generalmente considerate indistinguibili. Questa scelta, se da un lato semplifica la descrizione delle collezioni con molteplicità, dall'altro solleva alcune questioni concettuali relative alla natura degli oggetti che costituiscono un multiinsieme e al modo in cui tali oggetti vengono rappresentati all'interno della teoria.

A partire da queste considerazioni, oltre a discutere il linguaggio e l'assiomatica della teoria proposta da Blizard, verrà introdotta una forma embrionale e primitiva di una struttura generativa dei multiinsiemi nella quale la pluralità delle *manifestazioni* di un *oggetto* verrà predefinita: essa è di natura primaria se intesa come concetto generico, ma la molteplicità di ciascun elemento non viene assunta come nozione primitiva; quest'ultima difatti emergerà da una dinamica discreta interna che genera le occorrenze

[1] Si veda in merito la costruzione della logica BCK proposta da M. Bunder nel 1985 come approccio fondazionale per la teoria dei multiinsiemi (articolo non pubblicato).

degli elementi. Questa prospettiva consente di interpretare i multiinsiemi come il risultato di un processo strutturale sottostante, offrendo una possibile alternativa alla formulazione tradizionale basata sulla molteplicità come proprietà primitiva. Inoltre, questa struttura ci sarà di aiuto anche per discutere in modo più approfondito alcune questioni legate alla natura della distinguibilità degli elementi. Il lavoro è organizzato come segue.

Nel Capitolo **1** verrà brevemente introdotto il quadro logico generale entro cui si colloca la teoria dei multiinsiemi. In particolare, vengono richiamate alcune nozioni fondamentali della logica del primo ordine e della teoria dei modelli, utili per comprendere il linguaggio formale utilizzato nella costruzione delle teorie matematiche. Successivamente viene presentato il linguaggio utilizzato nell'assiomatica dei multiinsiemi proposta da Blizard.

Il Capitolo **2** è dedicato allo studio della teoria dei multiinsiemi. In questa parte dell'elaborato verranno analizzati più nel dettaglio i lavori di diversi matematici su tale teoria, saranno discusse diverse proprietà che caratterizzano i multiinsiemi e verranno presentati gli strumenti matematici necessari per la formalizzazione di tali strutture. Inoltre, verrà proposta la struttura generativa dei multiinsiemi già anticipata che costituisce uno degli elementi di ricerca centrali del presente lavoro.

Infine, nel Capitolo **3** verranno discusse alcune implicazioni concettuali e filosofiche legate alla nozione di molteplicità e alla natura degli elementi all'interno dei multiinsiemi. In particolare, verrà analizzato il problema dell'identità delle occorrenze e verranno considerate alcune possibili interpretazioni strutturali di tali oggetti nel contesto della filosofia della matematica in relazione alla struttura introdotta nel Capitolo **2**. Questa parte del lavoro comprende un'impostazione interpretativa originale in cui vengono presentate diverse idee in forma autoriale.

Riassumendo, l'obiettivo di questo lavoro è quello di contribuire allo studio dei multiinsiemi nel suo quadro più astratto, mettendo in evidenza il ruolo critico del linguaggio logico e delle strutture matematiche nella loro formalizzazione, nonché alcune questioni concettuali e aspetti filosofici che emergono naturalmente nello sviluppo di questa teoria.

Capitolo 1

Linguaggio e logica preliminare

Affrontare lo studio di una teoria particolare come quella dei multiinsiemi ci impone indirettamente di chiarire il linguaggio entro cui essa viene trattata. Nella formalizzazione di una teoria, infatti, entrano in gioco concetti primitivi che vanno oltre la semplice analisi degli oggetti di studio più importanti: i simboli, le regole e i criteri di descrizione ed interpretazione sono alla base di ogni tentativo di costruzione di una teoria assiomatica. Per questo motivo, prima di procedere con l'analisi della teoria dei multiinsiemi, risulta opportuno richiamare alcuni strumenti di logica e teoria dei modelli.

Come accennato nell'introduzione, in molti contesti matematici e computazionali risulta piuttosto naturale considerare collezioni nelle quali gli elementi possono comparire più volte. In tali contesti, la semplice nozione di appartenenza e la presenza immutata di altri operatori logici tipici delle teoriche classiche risultano talvolta strumenti insufficienti e limitanti per descrivere adeguatamente le strutture multiinsiemistiche. Anche se tuttora la situazione è rimasta invariata per quanto concerne il campo logico, è naturale supporre che un semplice adattamento della terminologia di base ad una collezione più estensiva e generica, senza ampliare o modificare il linguaggio, può risultare in una scelta piuttosto restrittiva per una teoria vasta come quella dei multiinsiemi.

Già nella seconda metà del Novecento diversi autori hanno osservato come l'assenza di una terminologia e di una notazione standard per trattare collezioni con elementi ripetuti abbia rappresentato un ostacolo nello sviluppo di strumenti matematici adeguati.

A questo proposito, Donald E. Knuth osserva:

> "Although multisets appear frequently in mathematics, they often must be treated rather clumsily because there is currently no standard way to treat sets with repeated elements. Several mathematicians have voiced their belief that the lack of adequate terminology and notation for this common concept has been a definite handicap to the development of mathematics."
>
> (Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*, Volume 2, Seminumerical Algorithms, Second edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981)

L'osservazione di Knuth fa emergere un punto interessante: nonostante collezioni di questo tipo compaiano da molto tempo in vari contesti della matematica e dell'informatica, per lungo tempo non sono state studiate in maniera esplicita; al contrario, sono state spesso assorbite dentro rappresentazioni alternative o formalismi non del tutto soddisfacenti sul piano teorico. La mancanza di una terminologia condivisa e di una formalizzazione standard ha decisamente contribuito a tenerle in secondo piano nella teoria matematica generale, anche se la loro presenza nelle applicazioni è tutt'altro che marginale. Aggiungiamo, inoltre, che questa pluralità di applicazioni unita all'assenza di una formalizzazione standard ha comportato uno sviluppo di diversi approcci teorici, ciascuno caratterizzato da specifiche scelte formali che realizzassero i differenti obiettivi ad essi predisposti.

Il presente capitolo non si propone di analizzare in dettaglio tali teorie, ma di fornire un breve inquadramento logico su cui la teoria dei multiinsiemi si può effettivamente appoggiare. In particolare, nella Sezione **1.1** verranno introdotte alcune nozioni basilari di logica del primo ordine e di teoria dei modelli, utili per la comprensione degli articoli principali sulla teoria dei multiinsiemi. Successivamente, nella Sezione **1.2** verrà presentato il linguaggio formale utilizzato nell'assiomatica dei multiinsiemi proposta da Blizard (quest'ultima sarà ulteriormente approfondita nella Sezione **2.3.1**). Si presume nei prossimi paragrafi che il lettore abbia una anticipata conoscenza di logica proposizionale e regole d'inferenza.

1.1 Nozioni elementari di logica e teoria dei modelli

Tutto ciò che è inerente a questo elaborato verrà trattato nello specchio del linguaggio del primo ordine, ovvero la logica dei predicati in cui i quantificatori sono associati esclusivamente agli elementi degli insiemi e alle variabili individuali che la compongono. Essa può anche essere trattata come un'estensione della logica proposizionale e delle regole di inferenza che la definiscono, in quanto aggiunge ad essa quantificatori, predicati e relazioni sui simboli.

Definizione 1.1 – Un ***linguaggio*** L è una collezione di simboli.

Come ci ricordano C. C. Chang e H. J. Keisler, i simboli che caratterizzano un linguaggio sono catalogabili in tre tipologie diverse di simboli *non logici*: simboli di *relazione*, simboli di *funzione* e simboli di *costante*.

Definizione 1.2 – Un linguaggio L' è un ***espansione*** di L, $L \subset L'$, se esso contiene tutti i simboli di L più altri simboli addizionali.

Sappiamo che nella logica proposizionale, ogni frase S può ricevere due possibili valori, identificabili in vero o falso. Nel linguaggio del primo ordine, invece, le cose si complicano: ogni simbolo di relazione n-aria ha come interpretazioni previste tutte le relazioni n-arie tra gli oggetti; ogni simbolo di funzione m-aria ha come interpretazioni previste tutte le funzioni m-arie tra oggetti; e, infine, ogni simbolo di costante ha come interpretazioni previste oggetti fissi o costanti. Definendo, dunque, una funzione di interpretazione $\mathcal{F}$ che ponga una corrispondenza appropriata tra relazioni, funzioni e costanti su un insieme non vuoto A, abbiamo che:

Definizione 1.3 – Un ***modello*** di L è una coppia $\langle A, \mathcal{F} \rangle = \mathfrak{A}$.

Nella logica proposizionale, invece, un modello non è altro che un qualsiasi sottoinsieme S di un insieme di frasi $\mathcal{S}$.

Per formalizzare un linguaggio L abbiamo bisogno, invece, dei simboli logici: parentesi, variabili, connettivi, quantificatori e se necessario il simbolo di identità (*first order logic with identity*). Nessuno di questi, banalmente, deve essere presente in L.

Definizione 1.4 – Si definiscono ***termini*** tutte e solo le seguenti stringhe di simboli: variabili; costanti; se F è un simbolo di funzione m-aria e $t_1, \dots, t_m$ sono termini allora $F(t_1, \dots, t_m)$ è un termine; un'applicazione finita delle precedenti tre caratterizzazioni.

Definizione 1.5 – Le ***formule atomiche*** di L sono le stringhe della forma seguente:

i) $t_1 \equiv t_2$ dove t_1 e t_2 sono termini di L
ii) $P(t_1, \dots, t_n)$, dove P è un simbolo di relazione n-aria e $t_1, \dots, t_n$ sono termini.

Definizione 1.6 – Si definiscono ***formule*** di L le seguenti:

i) Le formule atomiche
ii) Se φ e ψ sono formule allora $\varphi \wedge \psi$ e $\neg\varphi$ sono formule
iii) Se v è una variabile e φ una formula, allora $(\forall v)\varphi$ è una formula
iv) Una qualsiasi applicazione finita dei punti i)-iii)

Definizione 1.7 – Si definisce ***formula ben formata*** (abbreviato con *fbf* o *wff*) una sequenza di simboli di L che rappresenti una formula sintatticamente corretta.

Nel linguaggio del primo ordine, se A e B sono *wff*, allora lo sono anche $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ e sia x una variabile, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$

Definizione 1.8 – Una variabile x si dice ***vincolata*** in una *wff* φ se è presente in φ collegata ad un quantificatore, altrimenti si dice ***libera***. Una *wff* φ è una ***frase*** di L se non ci sono simboli variabili liberi in φ

La formalizzazione di L procede, dunque, tramite *assiomi logici* e *regole di inferenza*. Tre gruppi caratterizzano gli assiomi logici: assiomi proposizionali, assiomi quantificatori e assiomi di identità; mentre le regole di inferenza sono due: Modus Ponens e regola della generalizzazione.

Definizione 1.9 – Una ***teoria*** di un linguaggio L è una collezione di frasi di L che sono conseguenza logica di un insieme di assiomi.

Se T è una teoria, indichiamo con $T \vdash \varphi$ per affermare che la frase φ è dimostrabile in T a partire dai suoi assiomi.

Sia ora Σ un insieme di frasi.

Definizione 1.10 – Σ è ***consistente*** se non esiste alcuna formula φ tale che $\Sigma \vdash \varphi \wedge \Sigma \vdash \neg\varphi$

Definizione 1.11 – Si dice che A è un ***modello*** di Σ, indicato con $A \vDash \Sigma$ se e solo se ogni frase $\varphi \in \Sigma$ è vera in A. Σ si dice ***soddisfacibile*** se e solo se possiede almeno un modello.

Teorema 1.1 (*Teorema di Completezza Esteso*) – *Σ è soddisfacibile se e solo se è consistente.*

Si osservi che la Definizione **1.11** è prerogativa della logica proposizionale, per assumere invece che una frase σ sia vera in un modello $\mathfrak{A}$ (in simboli $\mathfrak{A} \vDash \sigma$) nella logica dei predicati, il procedimento è molto più lungo: si rimanda il lettore interessato alla costruzione proposta nell'opera *Model Theory* di Chang e Keisler[2].

1.2 Il linguaggio dei multiinsiemi

In questa sezione analizzeremo il linguaggio che verrà utilizzato per la teoria dei multiinsiemi nel Capitolo **2**. In particolare, proponiamo una panoramica del linguaggio introdotto da Blizard nella costruzione della sua teoria assiomatica nel 1989[3] mettendo in evidenza anche alcune distinzioni rispetto alle scelte formali che verranno adottate nel presente elaborato. Come anticipato, un'analisi più approfondita dei lavori dello stesso Blizard, nonché dello sviluppo completo dell'assiomatica, sarà invece presentata nel capitolo successivo (Sezione **2.3.1**).

Il linguaggio proposto da Blizard per la teoria dei multiinsiemi si discosta in modo significativo dalle consuetudini tipiche della teoria degli insiemi. Egli, infatti, non solo si allontana dalle interpretazioni precedentemente proposte da autori quali R. R. Yager o da altre prospettive sui multiinsiemi, come quelle di E. W. Chapin, ma introduce anche alcune scelte notazionali che differiscono dalle abitudini più diffuse nella

[2] Chang, C. C., Keisler, H. J., *Model Theory*, Third Edition, North Holland, Amsterdam, pp. 26-32, 1990.
[3] Blizard, W. D., "Multiset Theory", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 30, 1989.

letteratura matematica, come ad esempio l'uso sistematico di lettere minuscole per indicare i multiinsiemi.

Blizard avvia la costruzione della propria teoria introducendo una serie di proprietà sui multiinsiemi assunte a priori.

i) Un multiinsieme è una collezione di elementi in cui gli elementi possono comparire più di una volta;
ii) Le occorrenze di un elemento in un multiinsieme sono indistinguibili;
iii) Ogni occorrenza di un elemento in un multiinsieme contribuisce alla cardinalità del multiinsieme;
iv) Il numero delle occorrenze di un elemento è un intero positivo finito;
v) Il numero di elementi distinguibili in un multiinsieme può essere infinito;
vi) Un multiinsieme è completamente determinato se conosciamo quali elementi vi appartengono e il numero di volte in cui ciascun elemento vi appartiene.

Sulla prima, terza, quinta e sesta proprietà non abbiamo particolari riflessioni da avanzare. Diversa è invece la situazione per ciò che riguarda la seconda e la quarta proprietà.

La questione dell'indistinguibilità delle occorrenze di un elemento rappresenta infatti un punto particolarmente delicato dal punto di vista teorico; tale problema verrà dunque discusso più approfonditamente nel Capitolo **2** e nel Capitolo **3**. Anticipiamo, tuttavia, come questo tema sia stato affrontato più volte da autori quali A. F. Parker-Rhodes e N. J. Wildberger che possiedono una prospettiva del tutto differente rispetto all'interpretazione tradizionale dell'indistinguibilità. In particolare, Wildberger sottolinea l'importanza di distinguere tra *oggetto* ed *elemento* di un multiinsieme. Il primo rappresenta l'entità singola a cui le occorrenze sono associate, mentre il secondo costituisce semplicemente una rappresentazione dell'oggetto all'interno di uno specifico multiinsieme. Secondo questa prospettiva, l'indistinguibilità totale delle occorrenze può comportare una perdita di informazione che risulterebbe teoricamente limitante. Di conseguenza, nella sezione **2.4**, che vedrà protagonista la costruzione di una struttura generativa, verrà proposta un'alternativa alla proprietà ii) che riproponga un'impostazione più fedele alla visione di Wildberger piuttosto che alla proposta originaria di Blizard. Sulla quarta proprietà, invece, discuteremo più nel dettaglio nel Capitolo **2**.

La teoria di Blizard è sviluppata seguendo le regole della logica del primo ordine: oltre ai consueti connettivi logici, il linguaggio introduce alcuni simboli come $=_M$, che denota un'uguaglianza tra multiinsiemi, e $=_N$, che denota invece un uguaglianza tra numeri. Il linguaggio L utilizzato conta due tipi (*two sorts*) di simboli variabili. Vengono indicati con $x, y, z, \dots$ i multiinsiemi e gli elementi di un multiinsieme, appartenenti all'universo M, mentre con $\dot{k}, \dot{l}, \dot{m}, \dot{n}, \dots$ le molteplicità degli elementi, appartenenti all'universo N. Nel presente lavoro, a partire dai capitoli successivi, si preferirà tuttavia adottare una notazione leggermente differente rispetto a quella proposta da Blizard. Nei prossimi capitoli verrà infatti introdotta una distinzione esplicita tra l'universo dei multiinsiemi e quello dei loro elementi, indicando generalmente i multiinsiemi con lettere maiuscole, come avviene nella notazione tradizionale della teoria degli insiemi. Questa scelta, adottata anche da diversi autori contemporanei (tra cui lo stesso Wildberger), consente di mantenere una maggiore continuità con le convenzioni più diffuse nella letteratura matematica.

I simboli non logici di L sono $\{e, \hat{}, S, +, \cdot, 0\}$, dove e rappresenta il simbolo di relazione ternaria definito su $M \times M \times N$, che associa ad ogni elemento di un multiinsieme la sua molteplicità, ^ è una funzione unaria definita su $N \to M$, S è una funzione unaria definita su $N \to N$ e 0 è il simbolo di costante numerica.

Le formule atomiche di L sono della forma $s =_N t$, $u =_M v$ e $e(u, v, t)$, dove s e t sono termini numerici di L. Le *wff* di L sono le seguenti:

i) Tutte le formule atomiche.
ii) Se φ e ψ sono *wff* allora lo sono anche $\neg\varphi$, $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$.
iii) Per ogni x e $\dot{n}$, sono *wff* le seguenti: $\exists x\varphi$, $\exists \dot{n}\varphi$, $\forall x\varphi$, $\forall \dot{n}\varphi$.

A partire dalla relazione ternaria e e dai connettivi logici, si possono introdurre nel linguaggio la relazioni $\in$, oltre che le seguenti $\in^m$, $\in_+$ (si veda in merito la sezione **2.2**), In particolare, l'espressione $u \in v$ nella notazione di Blizard, corrispondente alla forma $a \in A$ nella notazione classica, costituisce anch'essa una formula ben formata del linguaggio L.

Capitolo 2

La teoria dei multiinsiemi

L'idea che una collezione di elementi possa contenere ripetizioni degli stessi risale alle origini della nozione di numero: la quantità di segni ripetuti e identici (le cosiddette "stanghette") costituiva direttamente il numero associato. Come anticipato nell'introduzione è noto che i primi sviluppi della teoria classica degli insiemi siano dovuti a Georg Cantor: già nella sua definizione originaria di insieme viene infatti esplicitato che gli elementi di quest'ultimo devono essere ben definiti e tra loro distinti. In continuità con questa impostazione, l'assiomatica di Zermelo-Fraenkel, su cui si fonda gran parte della matematica contemporanea, esclude la possibilità di considerare ripetizioni di elementi indistinguibili all'interno di un insieme: la struttura del linguaggio di ZF unita alla natura puramente binaria della relazione di appartenenza rende difatti insiemi come $\{a\}$ e $\{a, a\}$ del tutto equivalenti.

Ciononostante, abbiamo discusso più volte del fatto che numerosi contesti scientifici e matematici richiedano naturalmente di tener conto di eventuali ripetizioni: in ambito algebrico si pensi, ad esempio, alle molteplicità di una radice di un'equazione; nel calcolo combinatorio, alla fattorizzazione in numeri primi; in fisica, a esperimenti che restituiscono più volte il medesimo valore; in chimica, al numero di atomi in una formula; fino ad arrivare ad esempi di uso quotidiano, come il numero di banconote dello stesso taglio contenute in un portafoglio. In molti casi, tuttavia, occorre semplificare: è spesso sufficiente selezionare un solo rappresentante (come avviene, ad esempio, nello studio delle classi di una relazione di equivalenza o nella definizione di invarianti algebrici e geometrici) al fine di ottenere una classificazione rigorosa dell'oggetto in esame.

2.1 Un breve inquadramento storico

Nel periodo pre-cantoriano sono pochi i matematici che hanno tentato di utilizzare in maniera esplicita strutture riconducibili ai multiinsiemi; nella maggior parte dei casi l'attenzione si è concentrata sul concetto di permutazione. Il primo contributo significativo è attribuibile al matematico indiano Bhāskarāchārya, che intorno al 1150 propose una descrizione delle permutazioni di collezioni con elementi ripetuti. Ricerche analoghe sulle permutazioni si ritrovano anche negli studi nella seconda metà del XVII secolo nei lavori di Kircher, Prestet e del matematico John Wallis. È inoltre possibile rintracciare, nel tardo Rinascimento, alcuni lavori dell'italiano Mario Nizolio nei quali compare una prima, embrionale formulazione del concetto di "moltitudine".

Il primo matematico ad introdurre in modo preciso una nozione riconducibile a quella di multiinsieme è Richard Dedekind, nella sua opera *Was sind und was sollen die Zahlen?* (lett. 'Cosa sono e cosa dovrebbero essere i numeri?') del 1888. Come osserva Blizard nel suo *survey* alla letteratura dei multiinsiemi[4], l'idea di Dedekind consisteva nello stabilire la frequenza con cui un elemento potesse comparire in un sistema, interpretandola attraverso la correlazione sussistente tra codominio e preimmagine di una funzione. Il concetto di una funzione di supporto, che ricorre anche nelle definizioni moderne di multiinsieme, diverrà uno dei principali oggetti di studio a partire dal Novecento. Non è raro, inoltre, trovare collegamenti tra la teoria dei multiinsiemi e la logica fuzzy, in particolare per quanto riguarda l'interpretazione quantitativa dell'appartenenza.

Il primo tentativo di analizzare sistematicamente la teoria dei multiinsiemi come effettiva estensione della teoria degli insiemi di Cantor risale al 1971, con i lavori di V. Cerf et al., successivamente ampliati da J. L. Peterson nel 1976 e da R. R. Yager nel 1986 con l'articolo "On the Theory of Bags", pubblicato su *International Journal of*

[4] Blizard, W. D., "The Development of Multiset Theory", Modern Logic, vol. 1, 1991

General Systems. Il termine originariamente introdotto da Peter Deutsch per indicare tali strutture fu infatti *bags* (lett. "borse"), oggi considerato obsoleto. Gli studi di Yager, in particolare quelli relativi alle funzioni di conteggio impiegate per rappresentare la molteplicità degli elementi, risultano tra i contributi più rilevanti in questo ambito.

Parallelamente, i lavori di Donald E. Knuth raccolti nell'opera in più volumi – tuttora incompleta – *The Art of Computer Programming* (a partire dal 1968), hanno avuto un ruolo determinante nello sviluppo di nuovi approcci alla teoria dei multiinsiemi, introducendo metodologie di tipo informatico e algoritmico per l'analisi quantitativa. Inoltre, per merito di N. G. De Bruijn e dello stesso Knuth si è infine affermato il termine *multiset* (lett. "multiinsieme") che a partire dal nuovo millennio sarà l'unico termine utilizzato in ambito matematico per designare tali strutture, salvo sporadiche eccezioni.

Per quanto concerne il nostro campo di interesse, ovvero una teoria formale dei multiinsiemi, tra i contributi di maggiore rilevanza si collocano quelli di W. D. Blizard. L'articolo che ha riscontrato più fascino e che ha esercitato maggiore influenza, sia per importanza teorica sia per il numero di sviluppi successivi che ha generato, è intitolato "Multiset Theory" pubblicato nel 1989 sul *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Come anticipato nel Capitolo **1**, in tale lavoro Blizard introduce una prima assiomatizzazione di una teoria *two-sorted*, nella quale multiinsiemi e molteplicità dei loro elementi – nozione che verrà precisata nei paragrafi successivi – sono trattati come oggetti distinti.

L'obiettivo non è soltanto quello di fornire un quadro assiomatico in cui la teoria dei multiinsiemi possa essere sviluppata in modo sistematico, ma soprattutto quello di costruire un modello in grado di stabilire una relativa consistenza con ZFC: in particolare, il modello proposto non solo doveva essere una conseguenza logica degli assiomi definiti sui multiinsiemi, ma doveva anche consentire una dimostrazione degli assiomi della teoria standard degli insiemi. Il risultato ottenuto si è rivelato fondamentale: le numerose direzioni di ricerca che esso ha aperto hanno condotto a sviluppi successivi di grande interesse. Tra questi si annoverano, ad esempio, i risultati di Hoang-Vu Dang nel 2014, che ha dimostrato possibile estrapolare una teoria *single-sorted* basata sull'adozione dell'*assioma di antifondazione* al posto dell'*assioma di fondazione*, nonché le diverse proposte di teorie dei multiinsiemi generalizzate sviluppate, per esempio, da A. Alexandru e G. Ciobanu (2015), oppure P. A. Felisiak et al. (2020).

Spingendosi ulteriormente sul piano dell'astrazione e considerando gli studi di logica e filosofia specificamente dedicati alla questione, la letteratura disponibile si presenta decisamente più contenuta rispetto alla vasta produzione tecnica sui multiinsiemi. In tale ambito si possono citare i due articoli del 1982 di R. K. Meyer e M. A. McRobbie, 'Multisets and relevant implications' (I e II)[5], nonché alcune riflessioni di N. J. Wildberger sui concetti di equivalenza e uguaglianza già in precedenza introdotti da A. F. Parker-Rhodes nella sua opera *The Theory of Indistinguishables* del 1981; oltre a questi contributi, tuttavia, i riferimenti filosofici diretti appaiono piuttosto limitati nel panorama pubblicato. Ciononostante, i concetti di pluralità, diversità e uguaglianza saranno il fulcro del capitolo successivo e verranno trattati con la giusta importanza.

C'è da precisare, infine, che nonostante l'ampia presenza di strutture multiinsiemistiche in numerosi ambiti della matematica e delle sue applicazioni, non esiste ancora un quadro assiomatico universalmente accettato e stabilizzato che svolga, per i multiinsiemi, un ruolo analogo a quello svolto da ZF per gli insiemi. Di conseguenza, la formalizzazione della nozione varia sensibilmente a seconda del contesto: molti autori introducono definizioni e assiomi con lo scopo di risolvere un problema specifico (combinatorio, logico o informatico) più che per fondare una teoria generale. Ne deriva una letteratura frammentata, nella quale coesistono approcci differenti – spesso equivalenti sul piano intuitivo, ma non sempre compatibili sul piano assiomatico – e in cui la scelta delle primitive e delle regole di formazione rispecchia gli obiettivi dell'indagine.

Alla luce di quanto discusso, il presente capitolo è dedicato a ricostruire l'evoluzione storica e concettuale della nozione di multiinsieme, ponendo particolare attenzione alle motivazioni che ne hanno reso necessaria l'introduzione all'interno della matematica moderna. Nel prossimo paragrafo verrà analizzato il contributo di Dedekind, in cui emerge in forma embrionale il problema della molteplicità degli elementi; successivamente, verranno presentate le principali definizioni e proprietà dei

---

[5] Si veda in merito il confronto tra i sistemi R e RM della logica rilevante sui concetti di insieme e multiinsieme sviluppati da Meyer e McRobbie

multiinsiemi, fino a giungere a una panoramica degli sviluppi più recenti e delle limitazioni delle teorie attualmente esistenti. Tale percorso costituirà il quadro di riferimento indispensabile per l'impostazione di una struttura che verrà proposta nella sezione conclusiva.

2.1.1 L'intuizione di Dedekind

Prima di passare all'analisi strutturale della teoria dei multiinsiemi e delle sue proprietà fondamentali, è opportuno premettere un breve inquadramento dell'idea che ne ha favorito lo sviluppo, soffermandoci sull'accenno, ancora embrionale, proposto da Dedekind. In chiusura dell'opera menzionata nel paragrafo precedente, egli formula infatti un'osservazione significativa a partire dal seguente teorema.

Teorema 2.1 – *Sia* $|\Sigma| = n$ *e sia* φ *una funzione non iniettiva definita su* Σ*. Allora* $|\varphi(\Sigma)| < n$.

Dedekind osserva che, data una funzione φ, l'immagine $\varphi(\Sigma)$ può essere interpretata come una collezione nella quale ciascun elemento è dotato di una molteplicità, definita come il numero delle sue preimmagini. In tal modo l'informazione "quante volte" un valore compare nell'immagine viene preservata in modo naturale, e la cardinalità complessiva della collezione immagine rispecchia quella del dominio: $|\varphi(\Sigma)| = |\Sigma|$ diventa un'affermazione lecita se si tratta $\varphi(\Sigma)$ come multiinsieme definito dalle molteplicità delle sue preimmagini. Tuttavia, egli conclude esplicitamente di non proseguire oltre in questa direzione, lasciando l'idea allo stato embrionale.

È interessante notare che Dedekind introduca questa nozione soltanto come osservazione conclusiva e scelga esplicitamente di non svilupparla ulteriormente. La ragione più immediata è interna alla struttura dell'opera: l'obiettivo principale non era quello di costruire una teoria generale dell'insiemistica, ma di fondare i numeri naturali e la nozione di cardinalità attraverso il concetto di sistema e di applicazione.

Vi è però anche una motivazione più ampia, legata al paradigma insiemistico che si affermerà di lì a poco. Come affermato più volte, la teoria degli insiemi classica nella forma cantorianamente intesa e, successivamente, nella formalizzazione assiomatica di

Zermelo-Fraenkel, assume un'impostazione piuttosto riduttiva per l'idea estensiva di Dedekind: un insieme è determinato unicamente dai suoi elementi e la relazione di appartenenza registra soltanto la presenza o assenza di un elemento. In un quadro di questo tipo, la nozione di frequenza non trova una collocazione naturale e tende a essere assorbita da rappresentazioni equivalenti (ad esempio tramite famiglie indicizzate o funzioni di conteggio), senza diventare un oggetto teorico autonomo.

In questo senso, l'accenno dedekindiano può essere letto come un "seme" concettuale che resta a lungo marginale non perché privo di significato, ma perché non allineato con le priorità fondazionali della teoria degli insiemi standard. Sarà solo più tardi, quando in vari contesti matematici e logici diventerà essenziale distinguere tra semplice appartenenza e molteplicità di occorrenze, che tale intuizione verrà ripresa e trasformata in definizioni e assiomatiche esplicite.

2.2 Definizioni e proprietà della teoria dei multiinsiemi

Dare una definizione matematica del concetto di multiinsieme non è un lavoro semplice in quanto esso, come già menzionato, può sussistere in ZF come sua estensione semplicemente attraverso una funzione di molteplicità; potrebbe essere costruito come famiglia indicizzata di insiemi; come quoziente di sequenze; attraverso una relazione di appartenenza di grado diverso da uno o, come suggerirebbe Weierstrass, come struttura unica per la rappresentazione di un qualsiasi numero reale. Alla luce di ciò, risulta dunque più semplice definire il concetto di molteplicità ancor prima di quello di multiinsieme.

Definizione 2.1 – Si definisce ***molteplicità*** di un elemento il suo numero di ripetizioni all'interno di una collezione di elementi. Si indica con $m_A(x)$, dove A è la collezione e x un suo qualsiasi elemento.

Nel primo dei casi elencati sarebbe sufficiente definire ***multiinsieme*** una qualsiasi coppia $\langle U, m\rangle$ in cui U rappresenti il *ground-set*, ovvero l'insieme di base della teoria standard con tutti e solo elementi distinti, mentre m definisca la funzione di molteplicità sugli elementi di U, $m: U \to \mathbb{N}$, che associ ad ogni elemento di U la sua molteplicità. In questo modo, un insieme ordinario A non è altro che un multiinsieme definito dalla funzione caratteristica $\langle A, \chi_A \rangle$. Ma come suggeriscono Knuth e Blizard, questa formulazione non possiede alcun valore pratico per le strutture matematiche né ci fornisce alcun vantaggio sul concetto di estensionalità: in molte applicazioni è preferibile trattare i multiinsiemi direttamente come oggetti primitivi dotati di operazioni proprie.

Tale formalizzazione, tuttavia, non è affatto errata; al contrario, è oggi ampiamente utilizzata nella letteratura, soprattutto quando si tratta di derivare in modo sistematico le proprietà e le operazioni fondamentali della teoria[6]. Tuttavia, ai fini della presente trattazione, è opportuno introdurre anche una definizione più generale del concetto di multiinsieme, già in precedenza vista nella Sezione **1.2**. Adotteremo quindi un'impostazione più flessibile, che non solo consente di inquadrare in modo unitario le principali varianti presenti in letteratura, ma offre anche alcuni vantaggi dal punto di vista concettuale, in particolare rispetto alle questioni filosofiche che verranno discusse in seguito. Proponiamo dunque una definizione simile all'idea sviluppata da Wildberger.

Definizione 2.2 – Si definisce ***insieme*** una collezione non ordinata A di elementi x tali che $\forall x, m_A(x) \in \{0,1\}$. Si definisce ***insieme ordinato*** se la sequenza senza ripetizioni è, invece, ordinata. Si definisce ***multiinsieme*** una collezione non ordinata B di elementi x tali che, fissato un insieme ordinato di valori K, $\forall x, m_B(x) \in K$. Si definisce ***lista*** un multiinsieme ordinato.

Tornando alla nozione di molteplicità, è opportuno precisare che l'insieme dei valori che essa può assumere dipende dal tipo di modello che si intende costruire e studiare. Ad esempio, nel quadro considerato da Blizard la molteplicità è assunta come un intero positivo e finito; in diverse generalizzazioni, invece, si ammettono anche molteplicità negative, infinite o persino a valori reali. Nel presente elaborato adotteremo, salvo eccezioni quando indicato, una nozione più ampia, consentendo alla molteplicità di assumere valori interi arbitrari, includendo anche il caso infinito.

[6] La funzione di molteplicità come definizione per i multiinsiemi è utilizzata da una gran fetta di matematici moderni, si vedano in merito gli articoli, citati in bibliografia, di R. R. Yager, S. P. Jena et al., A. Syropoulos

Per definire il contenuto di un insieme, ci ricorda A. Syropoulos, esistono tre metodi: tramite una lista $A = \{a_1, \dots, a_n\}$; tramite proprietà definita sugli elementi dell'insieme, $A = \{x|\ P(x)\}$; tramite funzione caratteristica $\chi_A(x)$.

Utilizzeremo, invece, le notazioni suggerite da Wildberger per le liste e i multiinsiemi: gli elementi di una lista verranno indicati con il primo dei metodi sopracitati, mentre gli elementi di un multiinsieme verranno inseriti tra parentesi quadre spaziate dal vuoto o da un underscore. Talvolta ci sarà di aiuto utilizzare la notazione di Blizard, specialmente per quando introdurremo il concetto di funzione.

Esempio 2.1 – $A = \{a, a, 5,3, a\}$ è una lista, $B = [1\ 3\ 3\ 4\ 1] = [3\_3\_1\_1\_4]$ è un multiinsieme. $B = [1,3,4]_{2,2,1}$ è, invece, la notazione di Blizard per i multiinsiemi che prevede le molteplicità inserite al pedice.

È anche possibile utilizzare un'ulteriore notazione per i multiinsiemi, ovvero quella in forma di combinazione lineare: essa diventa molto utile nel caso in cui la molteplicità degli elementi non è sempre un naturale. Per esempio, $B = 2[1] + 2[3] + [4]$ nell'esempio precedente.

Definizione 2.3 – Se $U = \emptyset$ o contiene un solo oggetto con molteplicità maggiore o uguale ad uno, allora U si definisce ***semplice***.

Definizione 2.4 – Due multiinsiemi U e V si dicono ***simili*** se $\forall z(z \in U \leftrightarrow z \in V)$.

Definizione 2.5 – Un multiinsieme si definisce ***regolare*** se tutti gli oggetti vi appartengono con la stessa molteplicità.

Esempio 2.2 – $A = [a\ a\ a\ a]$ è semplice, $B = [z\ z\ x\ x]$ e $C = [z\ z\ z\ z\ x]$ sono simili, $D = [a\ a\ b\ b\ c\ c]$ è regolare.

Definizione 2.6 – Un multiinsieme si definisce ***puro*** se vi appartiene almeno un elemento con molteplicità maggiore di uno.

Definizione 2.7 – Si definisce ***cardinalità*** di un multiinsieme A la sommatoria delle molteplicità di tutti gli elementi in A: $|A| = \sum_x m_A(x)$.

Dunque, la cardinalità di un multiinsieme, proprio come in un insieme standard, rappresenta la quantità totale di elementi che esso possiede. La cardinalità del multiinsieme vuoto è zero.

Nella teoria classica degli insiemi, la relazione di appartenenza è binaria: per un elemento a e un insieme A si scrive $a \in A$ per indicare semplicemente che a appartiene ad A (oppure $a \notin A$ in caso contrario). In un contesto multiinsiemistico, tale relazione può essere raffinata introducendo la nozione di molteplicità: inseriamo nel linguaggio L la notazione $\in^m$ per rappresentare la relazione ternaria e, scrivendo $a \in^m A$ per esprimere che a appartiene ad A con molteplicità m. In particolare, è talvolta utile distinguere l'appartenenza "positiva", cioè il fatto che a compaia almeno una volta in A; seguendo la notazione di D. Singh e J. N. Singh, indicheremo questa caratteristica con $a \in_+ A$.

Definizione 2.8 – Due multiinsiemi A e B si dicono ***uguali*** se $\forall x, m_A(x) = m_B(x)$. Altrimenti si dicono ***distinti***.

Due multiinsiemi A, B uguali si indicano con $A = B$, mentre nel caso siano distinti abbiamo $A \neq B$.

Introduciamo ora il concetto, per certi aspetti delicato, di *multisottoinsieme*, che per comodità indicheremo d'ora in avanti con il termine inglese *msubset*. Nella letteratura più diffusa[7], la nozione viene formulata seguendo l'impostazione di Blizard, in cui il confronto tra due multiinsiemi avviene tramite un ordine sulle molteplicità (ossia, in forma equivalente, richiedendo che ogni elemento compaia nel primo con molteplicità non superiore a quella con cui compare nel secondo). Tuttavia, per chiarezza e precisione, è opportuno segnalare l'esistenza di ulteriori varianti definitorie presenti in letteratura. Tra queste, merita particolare attenzione l'approccio di Wildberger, che propone un quadro concettuale più ricco rispetto a quello standard, distinguendo in modo più fine tra identità, uguaglianza e indistinguibilità. Poiché le considerazioni filosofiche sviluppate nel capitolo successivo si collocano naturalmente in una prospettiva vicina a tale impostazione, riterremo opportuno tenerne conto come alternativa concettualmente rilevante.

Definizione 2.9 – Sia A un multiinsieme. Si definisce ***supporto***, o dominio, di A l'insieme S contenente elementi x tali che $\forall x, m_A(x) \neq 0$. Si indica spesso con A^*, con $supp(\cdot)$ o con $Dom(\cdot)$.

[7] Si osservino, per esempio, le definizioni equivalenti di msubset nei paper di A. Syropoulos, D. Singh e L. Costa.

In questo modo, abbiamo definito il supporto di un multiinsieme come coincidente con il suo *ground-set*, o *root set*, ovvero l'insieme degli elementi distinti di un multiinsieme privato delle ripetizioni, la cui cardinalità coincide con il numero di elementi distinti.

La prima definizione di msubset che presentiamo ci viene proposta da Meyer e McRobbie.

Definizione 2.10 (*Meyer & McRobbie*) – Siano A e B due multiinsiemi, abbiamo che A è un ***msubset debole (o nel senso di Meyer e McRobbie)*** di B, $A \subseteq_d B$, se $\forall z(z \in A \rightarrow z \in B)$.

Tale relazione non è antisimmetrica e non preserva le proprietà principali sulle cardinalità che un msubset si suppone debba avere: la cardinalità di un msubset essere al più quella del multiinsieme in cui è contenuto. Essa viene intesa in senso puramente estensionale: confronta i multiinsiemi attraverso il loro supporto, ignorando completamente le molteplicità. Di conseguenza, può accadere che due multiinsiemi A e B abbiano lo stesso supporto pur differendo nelle molteplicità, ad esempio se $A = [a]$ e $B = [a\ a]$. In tal caso vale sia $A \subseteq_d B$ sia $B \subseteq_d A$, poiché ogni elemento che compare in uno compare anche nell'altro; tuttavia $A \neq B$ in quanto le occorrenze non coincidono.

Esempio 2.3 – Siano $A = [1\ 4\ 2\ 2]$ e $B = [2\ 1\ 4\ 1\ 2]$, abbiamo che $A \subseteq_d B$ e $B \subseteq_d A$ nel senso di Meyer e McRobbie, ma $A \neq B$.

Definizione 2.11 (*Blizard*) – $\forall U, V$ multiinsiemi, U è un ***msubset forte (o nel senso di Blizard)*** di V, $U \subseteq V$, se:

$$\forall z, \forall n\big(z \in^n U \rightarrow \exists m(n \leq m \wedge z \in^m V)\big).$$

In altre parole, $U \subseteq V$ se $\forall x, m_U(x) \leq m_V(x)$. Banalmente $\forall A, \emptyset \subseteq A$. Tale relazione è riflessiva e transitiva e, se consideriamo gli assiomi della teoria estensiva di Blizard, analizzati nella Sezione **2.3.1**, essa è anche antisimmetrica.

Osservazione 2.1 – $A \subseteq B$ implica $|A| \leq |B|$, ma quest'ultima condizione non è sempre verificata nel caso in cui la definizione di msubset sia nel senso di Meyer e McRobbie.

Proposizione 2.1 – Siano M, N due multiinsiemi tali che $M \subseteq N$ e $M^* = M_+^* = \{x : m_M(x) > 0\}$. Allora $M \subseteq_d N$.

Dim. Supponiamo $M \subseteq N$, per dimostrare che $M \subseteq_d N$ dobbiamo far vedere che $M^* \subseteq N^*$. Se $M = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare. Sia invece $x \in^k M$ con $k \neq 0$, allora $m_M(x) \neq 0$ e per ipotesi $m_M(x) \leq m_N(x)$. Ma dato che $M^* = M_+^*$, è sufficiente considerare per la dimostrazione solo gli $x \in^k M$ con $k > 0$. Dunque, $x \in M^*$, $0 < m_M(x) \leq m_N(x)$ e, quindi, $x \in supp(N)$. La dimostrazione segue per arbitrarietà di x. ■

Osservazione 2.2 – Il viceversa, ovvero che l'inclusione debole implichi l'inclusione forte, è generalmente falso. Inoltre, l'ipotesi del supporto positivo è fondamentale nel caso in cui si considerano anche le molteplicità negative: può capitare, altrimenti, che esistano degli elementi x in M aventi molteplicità negativa, per cui $m_M(x) \leq m_N(x) = 0$ che contraddirebbe la tesi.

Per introdurre la definizione di Wildberger è d'obbligo iniziare a considerare possibile un'estensione matematica del concetto di equivalenza. Nel caso dei multiinsiemi, due oggetti ripetuti vengono definiti indistinguibili, ma per Wildberger essi sono comunque da considerare come entità separate. Per esempio, siano $X = [2\ 1\ 1\ 3\ 4\ 1\ 1\ 2]$ e $Y = [5\ 2\ 1\ 1\ 5]$. Definisco A come struttura avente i primi tre elementi di X; B contiene invece gli ultimi tre elementi di X; C contiene il secondo, il terzo e il quarto elemento di Y; mentre D contiene il terzo, il secondo e il primo elemento di X. È facile notare che $A = B = C = D = [2\ 1\ 1]$. Tuttavia, è anche corretto aggiungere che $A \equiv D$, ovvero che A e D sono ***identici***.

Definizione 2.12 (*Wildberger*) – A si definisce ***msubset totale (o nel senso di Wildberger)*** di X, indicato con $A \sqsubseteq X$, se ogni elemento di A è un elemento di X.

Osservazione 2.3 – $A \sqsubseteq X$ nel senso di Wildberger implica $A \subseteq X$ nel senso di Blizard.

Definizione 2.13 – Sia $L = [a_1, \dots, a_n]$ una lista, diciamo che $L' = \left[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\right]$ è una ***sottolista*** di L se $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$.

Definizione 2.14 – Sia A un msubset di B (in qualsiasi senso) tale che $Dom(A) = Dom(B)$, allora A si definisce ***full msubset*** (lett. 'multisottoinsieme pieno') di B.

2.2.1 Proprietà principali dei multiinsiemi

In questo paragrafo analizziamo come si caratterizzano i multiinsiemi in relazione agli operatori insiemistici principali. Diverse operazioni come unione e addizione insiemistica sono state definite e studiate dal punto di vista algebrico nel corso degli anni. Per semplicità, analizzeremo in questa sezione solo i multiinsiemi aventi molteplicità finite sugli elementi.

Definizione 2.15 – Siano A e B due multiinsiemi, la loro ***unione*** è definita nel modo seguente: $A \cup B \coloneqq \{\langle x, m_{A\cup B}(x)\rangle |\ m_{A\cup B}(x) = \max_{x\in A,B}\big(m_A(x), m_B(x)\big)\}$.

Osservazione 2.4 – La cardinalità dell'unione è: $|A \cup B| = \sum_x \max_x\big(m_A(x), m_B(x)\big)$.

Definizione 2.16 – Siano A e B due multiinsiemi, la loro ***intersezione*** è definita nel modo seguente: $A \cap B \coloneqq \{\langle x, m_{A\cap B}(x)\rangle |\ m_{A\cap B}(x) = \min_{x\in A,B}\big(m_A(x), m_B(x)\big)\}$.

Definizione 2.17 – Siano A e B due multiinsiemi, la loro ***somma*** è definita nel modo seguente: $A + B \coloneqq \{\langle x, m_{A+B}(x)\rangle |\ m_{A+B}(x) = m_A(x) + m_B(x)\}$.

Esempio 2.4 – Siano $A = [1\ 2\ 3\ 1]$ e $B = [1\ 3\ 3\ 1\ 1]$, allora: $A \cup B = [1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 3]$, $A \cap B = [1\ 1\ 3]$, $A + B = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3]$.

Proprietà 2.1 – $A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A + B$. Inoltre, la cardinalità della somma è $|A + B| = |A \cap B| + |A \cup B|$.

È facile verificare che per queste tre operazioni valgono le proprietà standard della teoria classica degli insiemi: la commutatività, l'associativa, la distributiva e l'identità. L'idempotenza, invece, vale per l'unione e per l'intersezione ma non per la somma.

Definizione 2.18 – Siano A e B due multiinsiemi, il loro ***prodotto diretto*** è definito nel modo seguente:

$$A \times B \coloneqq \{\langle [a, b], m_{A\times B}(x)\rangle |\ a \in A, b \in B, m_{A\times B}([a, b]) = m_A(a)m_B(b)\}.$$

Valgono le proprietà distributive e l'identità sul prodotto diretto, ma non valgono generalmente associativa e commutativa.

Definizione 2.19 – Siano A e B due multiinsiemi, la loro ***differenza*** è definita nel modo seguente: $A - B \coloneqq A + (-B)$ dove $-B = \{\langle x, m_{-B}(x)\rangle \mid m_{-B}(x) = -m_B(x)\}$.

Sulla differenza multiinsemistica proponiamo due osservazioni cruciali, che ci permettono di analizzare due differenze fondamentali rispetto alla teoria degli insiemi standard.

Osservazione 2.5 – Dalla teoria degli insiemi classica sappiamo che se A e B sono insiemi tali che $A \subseteq B$, allora $A - B = \emptyset$. Questa relazione non è sempre vera nella teoria generalizzata dei multiinsiemi: in quest'ultima, le molteplicità possono anche essere negative.

Osservazione 2.6 – Nella teoria degli insiemi classica vale la legge: $(A - B) \cap B = \emptyset$. Questa legge è generalmente falsa nella teoria dei multiinsiemi. Infatti, è sufficiente osservare il seguente controesempio: siano $A = [a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ b]$ e $B = [a\ a\ b\ b\ b]$ allora abbiamo che $A - B = [a\ a\ b\ b] \subseteq B$ e dunque l'intersezione non potrà mai essere vuota.

Avendo introdotto la differenza insiemistica nei multiinsiemi e il concetto di molteplicità negativa, è anche possibile introdurre leggi che mettono in relazione i multiinsiemi con gli interi. Le seguenti, infatti valgono per ogni multiinsieme A e per ogni intero n e m.

$$nA + mA = (n + m)A$$

$$n(mA) = (nm)A$$

Tutte queste proprietà, ad eccezione della differenza, si adattano anche al caso di multiinsiemi infiniti, quando per la cardinalità dell'insieme o per la singola molteplicità di un elemento entra il gioco il concetto di numero transfinito.

Definizione 2.20 – Siano Z e A due multiinsiemi, definiamo il ***complementare*** di A in Z come $\overline{A} \coloneqq \{\langle x, m_{\overline{A}}(x)\rangle \mid m_{\overline{A}}(x) = m_Z(x) - m_A(x)\}$. Si può anche indicare con A^C.

Proprietà 2.2 – $(B^C)^C = B$.

Introduciamo ora una nozione piuttosto controversa nella teoria dei multiinsiemi: *l'insieme delle parti*. Molti ricercatori osservano che estendere in modo diretto il concetto di multiinsieme anche all'insieme delle parti non produce, in generale, alcun beneficio applicativo. In particolar modo, Blizard e J. L. Hickman propongono di mantenere l'insieme delle parti come insieme ordinario anche nel contesto multiinsiemistico; tuttavia, una scelta di questo tipo comporta che alcune proprietà fondamentali della teoria classica non si trasferiscano automaticamente e, in particolare, che risultati come il *teorema di Cantor* e il *teorema di Cantor-Bernstein* non valgano generalmente nella forma consueta.

Definizione 2.21 (*Hickman*) – Per ogni multiinsieme N si definisce ***insieme delle parti*** l'insieme $\mathcal{P}(N)$ di tutti i msubset di N.

Osservazione 2.7 – È triviale verificare che l'insieme delle parti nella definizione di Hickman non soddisfi i teoremi classici. Ad esempio, dal multiinsieme $N = [1\ 1\ 1\ 2]$ si ottiene l'insieme $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, [1], [1\ 1], [1\ 1\ 1], [2], [1\ 2], [1\ 1\ 2], [1\ 1\ 1\ 2]\}$. Dunque, il teorema di Cantor secondo cui $|\mathcal{P}(N)| = 2^N > N$ è generalmente falso laddove N sia un multiinsieme.

Nonostante ciò, Blizard mostra anche che è possibile ottenere un'estensione dell'insieme delle parti come multiinsieme tramite tecniche e formule combinatorie che prevedono l'utilizzo del coefficiente binomiale, tuttavia preferisce non utilizzare oltremodo questa definizione in quanto la sua assiomatica è generalmente definita sui multiinsiemi a molteplicità finita e come ricorda egli stesso: *"for certain infinite msets the combinatorial formula generates infinite multiplicities"*[8].

La definizione più semplice e generica è ancora una volta di Wildberger che sceglie di distanziarsi dalla definizione canonica e preferisce fornire una versione estensiva ufficiale anche per l'insieme delle parti, in modo da mantenere saldi tutti i teoremi della teoria standard relativi a tale struttura.

Definizione 2.22 (*Wildberger*) – Si definisce ***multiinsieme delle parti*** $\tilde{\mathcal{P}}(N)$ di un multiinsieme N, il multiinsieme contenente tutti i msubset di N.

Lo stesso Wildberger generalizza i concetti di unione e intersezione in proporzione alla relazione trivalente di *distinzione, uguaglianza* e *identità* che sussiste fra gli elementi di un multiinsieme.

---

[8] W. D. Blizard, *Multiset Theory*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 30, Number 1, pag 45, 1989.

Definizione 2.23 – Siano A e B msubsets di un multiinsieme X, l'***intersezione concreta*** di A e B, denotata con $A \sqcap B$, è il msubset di X che contiene tutti gli elementi di X compresi sia in A che in B.

Proprietà 2.3 – $|A \sqcap B| \leq |A \cap B|$

Definizione 2.24 – Siano A e B msubsets di un multiinsieme X, l'***unione concreta*** di A e B, denotata con $A \sqcup B$, è il msubset di X che contiene tutti gli elementi di X compresi in A, in B o in entrambi.

Proprietà 2.4 – $|A \sqcup B| \geq |A \cup B|$

Da queste definizioni discende direttamente il seguente teorema sui multiinsiemi.

Teorema 2.2 (*Principio dei cassetti*) – *Siano $A_1, A_2, \dots, A_k$ msubsets totali di un multiinsieme X tali che $A_i \sqcap A_j = \emptyset, \forall i, j$. Allora:*

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_k \sqsubseteq X$$

Dim. Si fissi un elemento x ricorrente in X. Tutte le ricorrenze di x come elemento di A_i sono per ipotesi distinte dalle ricorrenze di x in A_j per ogni i e j. Dunque, si verifica facilmente che $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ è un msubset di X nel senso di Wildberger. ■

2.2.2 Funzioni

Per introdurre in modo corretto la nozione di funzione nel contesto multiinsiemistico è opportuno evitare formulazioni che richiedano di distinguere tra occorrenze identiche di uno stesso elemento. In particolare, quando si considerano le ripetizioni come occorrenze indistinguibili (e, nel senso di Wildberger, si separano i livelli di identità/uguaglianza), la definizione di funzione non può essere costruita a partire dalle singole "copie" di un elemento, bensì deve riferirsi agli elementi distinti. Come osservano Blizard e Singh, una funzione definita su un multiinsieme viene quindi introdotta a partire dalla definizione classica di funzione applicata al root set del multiinsieme. Poiché, in questa impostazione, la definizione formale di funzione coincide con quella standard, ci limiteremo a richiamarla implicitamente e ne ometteremo l'enunciato esplicito[9]. Siano A e B due multiinsiemi.

Definizione 2.25 – $f : A \to B$ è una ***funzione*** (su multiinsiemi) se lo è $f : A^* \to B^*$.

Dunque, ogni funzione tra multiinsiemi si può vedere come un insieme di insiemi di coppie ordinate.

Definizione 2.26 – La funzione $f : A \to B$ è ***iniettiva*** se e solo se $f : A^* \to B^*$ è un'iniezione e $\forall z \left(z \in A^* \to m_A(z) \leq m_B\big(f(z)\big)\right)$.

Definizione 2.27 – La funzione $f : A \to B$ è ***suriettiva*** se e solo se $f : A^* \to B^*$ è una suriezione e $\forall z \left(z \in A^* \to m_A(z) \geq m_B\big(f(z)\big)\right)$.

Definizione 2.28 – La funzione $f : A \to B$ è ***biiettiva*** se e solo se $f : A^* \to B^*$ è una biiezione e $\forall z \left(z \in A^* \to m_A(z) = m_B\big(f(z)\big)\right)$.

Esempio 2.5 – $f : [x]_3 \to [x]_8$ è iniettiva, $f : [x]_5 \to [y]_3$ è suriettiva, mentre invece $f : [x, y]_{7,2} \to [x, y]_{3,4}$ non è né suriettiva né iniettiva.

Occorre fare alcune osservazioni e precisazioni. Nell'esempio precedente abbiamo mostrato come capire quando una funzione è iniettiva e quando invece è suriettiva, ma non riusciamo a dire con precisione quali elementi tra le copie degli indistinguibili vengono effettivamente utilizzati nella mappatura. Inoltre, avendo definito la biiezione tramite mappatura di elementi aventi la stessa molteplicità nei rispettivi multiinsiemi, è facile intuire che generalmente non è detto che due insiemi con la medesima cardinalità siano in biiezione tra loro.

Esempio 2.6 – $[x, y]_{2,1}$ e $[x\ y\ z]$ sono due multiinsiemi con la stessa cardinalità, ma non esiste alcuna biiezione che possa relazionarli.

Questa costruzione, dunque, motiva di gran lunga la scelta di Hickman e Blizard di definire l'insieme delle parti in modo da rispettare anche il concetto di funzione. Il teorema di Cantor fallisce in entrambi i casi: non c'è alcuna iniezione tra X e $\tilde{\mathcal{P}}(X)$ se X è un multiinsieme avente almeno un elemento con molteplicità strettamente

[9] Si veda in merito la definizione standard di Blizard nel suo articolo 'Multiset Theory', precedentemente citato, alle pagg 45-46.

maggiore di 1. Tuttavia, come già specificato precedentemente, nella teoria strutturata da Blizard è comunque possibile definire il multiinsieme delle parti in cui sussista una relazione di iniezione stretta tra X finito e $\tilde{\mathcal{P}}(X)$. Dunque, Blizard conferma che il teorema di Cantor è dimostrabile solo se consideriamo il concetto di multiinsieme delle parti e solo se la cardinalità di X non è transfinita.

A questo punto mostriamo come anche il *teorema di Cantor-Schröder-Bernstein* fallisce nella teoria dei multiinsiemi.

Teorema 2.3 (*Cantor-Schröder-Bernstein*) – *Per ogni X e Y insiemi per cui esistano un'iniezione $f : X \to Y$ e un'iniezione $g : Y \to X$, esiste una biiezione $h : X \to Y$.*

Hickman ci mostra, attraverso un controesempio, che nella teoria dei multiinsiemi questo teorema non è generalmente vero.

Esempio 2.7 (*Hickman*) – Siano X e Y multiinsiemi tali che $X = [x_1, x_2, x_3, \dots]_{2,4,6,\dots}$ e $Y = [y_0, y_1, y_2, y_3, \dots]_{1,3,5,7,\dots}$, essi ammettono una funzione $f : X^* \to Y^*$ definita da $f(x_n) = y_n$ che rende $f : X \to Y$ iniettiva per definizione. Inoltre, essi ammettono anche una funzione $g : Y^* \to X^*$ definita da $g(y_n) = x_{n+1}$ che rende $g : Y \to X$ anch'essa iniettiva. Tuttavia, non è possibile definire alcuna biiezione tra X e Y in quanto tutte le molteplicità degli elementi di X sono pari, mentre tutte le molteplicità degli elementi di Y sono dispari.

2.2.3 Ordinamento tra multiinsiemi

L'ordinamento di multiinsiemi è un processo che negli anni è stato largamente utilizzato in ambito informatico per dimostrare la terminazione di programmi e per i sistemi di riscrittura di termini. Il primo tentativo di ordinamento risale al 1979 per merito di Z. Manna e N. Dershowitz, anche se precedentemente già Knuth provò a definire operazioni di ordine tra multiinsiemi. Difatti, secondo Knuth è possibile affermare la seguente relazione sui multiinsiemi a valori numerici: un multiinsieme A *domina* un multiinsieme B se hanno lo stesso numero di elementi e per ogni k, il k-

esimo elemento in ordine di grandezza di A è maggiore o uguale del k-esimo elemento in ordine di grandezza di B.

Introduciamo ora l'ordinamento secondo Manna e Dershowitz. Sia S un insieme dotato di ordine parziale stretto, $(S, <)$. Definiamo con $M(S)$ l'insieme di tutti i multiinsiemi finiti M costruiti sugli elementi di S. L'ordine parziale induce un ordinamento "$\ll$" tra multiinsiemi di $M(S)$ definito nel modo seguente:

Definizione 2.29 (*Ordinamento di Dershowitz-Manna*) – Siano M, N due multiinsiemi di $M(S)$. Abbiamo che $M \ll N$ se $\exists X, Y \in M(S)$ tali che:

i) $\emptyset \neq X \subseteq N$
ii) $M = (N - X) + Y$
iii) $\forall y \in Y, \exists x \in X : y < x$

La verifica del fatto che $M \ll N$ dipende da due testimoni X e Y, dove X viene utilizzato per "rimuovere" gli elementi di grandezza maggiore in N, e Y per aggiungere, laddove serva, gli elementi rimanenti per ricostruire M. La terza proprietà è la verifica dell'algoritmo sul fatto che ogni elemento di Y resti più piccolo di almeno un elemento di X.

Esempio 2.8 – Siano $S = \mathbb{N}$, $N = [5\ 3\ 3]$ e $M = [4\ 4\ 3\ 3]$. Scelgo $X = [5]$ in modo da rimuovere da N l'elemento maggiore, e scelgo $Y = [4\ 4]$ in modo da ricompletare M. In questo modo ogni elemento di Y è minore di 5 (maggiorante di X) e le tre condizioni della Definizione **2.25** sono rispettate.

Esempio 2.9 – Sia $S = \mathbb{N}$, per provare che $M \ll N$ con $M = [3\ 4]$ e $N = [3\ 3\ 4\ 0]$, scelgo $X = [3\ 0] \subseteq N$. Scelgo $Y = \emptyset$. In questo modo le tre condizioni sono banalmente rispettate.

2.3 Limiti, proposte e alternative

Come abbiamo visto, la teoria dei multiinsiemi è stata sviluppata secondo impostazioni matematiche anche molto diverse tra loro. Un segnale evidente di tale pluralità è subito dato dalla scelta dell'insieme di valori ammessi per le molteplicità, che varia sensibilmente a seconda degli obiettivi e del contesto applicativo. Se, ad esempio, si mira a un confronto stretto con la teoria standard degli insiemi (e, in particolare, a risultati di consistenza relativa), è naturale lavorare con molteplicità intere non negative; in altre generalizzazioni, come nei cosiddetti *hybrid sets* introdotti da D. Loeb, vengono invece ammesse anche molteplicità negative. Esistono inoltre formulazioni in cui le molteplicità assumono valori reali e, restringendo ulteriormente il codominio all'intervallo $[0,1]$, si ottiene la nozione di *fuzzy multiset*.

Questa variabilità spiega il perché dell'impiego dei multiinsiemi attraversi ambiti di natura differente: oltre all'informatica e alla combinatoria, essi compaiono in modo significativo anche in algebra astratta e in teoria delle categorie. Lo scopo del presente paragrafo è dunque riordinare alcuni tra gli sviluppi moderni più rappresentativi, mettendo in evidenza, per ciascuna impostazione, le scelte definitorie adottate e i limiti o i compromessi che ne conseguono.

Iniziamo discutendo la proposta di G. P. Monro. Nel 1987 Monro pubblica l'articolo "The Concept of Multiset" in cui prende le distanze dalle interpretazioni più diffuse fino a quel momento e sostiene che il multiinsieme, così come viene comunemente introdotto, possa essere letto come una generalizzazione del concetto di relazione di equivalenza. Secondo Monro, molte difficoltà concettuali derivano dal fatto che sotto il termine "multiinsieme" vengono in realtà accorpate due idee distinte, raramente analizzate separatamente: da un lato, una struttura che generalizza gli insiemi (che egli chiama propriamente *multiset*), dall'altro una componente di natura più propriamente numerica, legata al "conteggio" delle occorrenze, che egli propone di distinguere con il nome di *multinumber* (lett. 'multinumero').

Definizione 2.30 (***Monro***) – Un ***multiinsieme*** X è una coppia $\langle X_0, \varrho \rangle$ dove X_0 è un insieme, denominato ***campo***, e ϱ una relazione d'equivalenza su X_0. Gli elementi che in X_0 appartengono alla stessa classe d'equivalenza vengono detti dello ***stesso ordine*** (dall'inglese *sort*), altrimenti si dicono di ***ordine differente***.

Egli analizza questa definizione principalmente in relazione alle proposizioni della teoria delle categorie, introducendo le nozioni di morfismo, monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo per i multiinsiemi. A partire da questa definizione seguirà anche quella di msubset.

Definizione 2.31 (*Monro*) – Sia $X = \langle X_0, \varrho \rangle$. Un ***msubset*** $Y \subseteq X$ è un multiinsieme $Y = \langle Y_0, \hat{\varrho} \rangle$ in cui $Y_0 \subseteq X_0$ e $\hat{\varrho} = \varrho_{|Y_0}$.

Dopo aver mostrato alcune proprietà di teoria delle categorie per i multiinsiemi, che escluderemo da questo elaborato poiché di natura e scopo differenti, egli propone l'altra versione della definizione, che è simile a quella più comunemente usata per i multiinsiemi. Sia $\mathcal{S}$ la collezione di tutti gli *ordini* che si possono riscontrare nei multiinsiemi e $N = (N, +, \cdot)$ un semianello a reticolo ordinato.

Definizione 2.32 (*Monro*) – Un ***multinumero*** è una funzione che va da $\mathcal{S}$ a N.

La collezione di multinumeri, che rappresenta *de facto* un'algebra parzialmente ordinata, si indica con $N^{\mathcal{S}}$. Questa definizione è la più vicina a quella che etichetta ogni elemento di un multiinsieme con la sua molteplicità; ma, a differenza della solita, permette in essa operazioni con maggiore versatilità, oltre che a catalogare con maggiore precisione il ruolo che svolge un multiinsieme rispetto a quello della molteplicità degli elementi.

In questa direzione, una linea di ricerca particolarmente fruttuosa consiste nel reinterpretare i multiinsiemi come oggetti algebrici, così da poter trasferire (o riformulare) strumenti e risultati della matematica strutturale in un contesto in cui la molteplicità è parte integrante dei dati. Questo passaggio non è puramente formale: richiede infatti di chiarire quali nozioni debbano essere preservate (supporto, inclusione, operazioni) e in che modo esse interagiscano con strutture infinite. Le strutture algebriche per lo studio dei multiinsiemi sono state sviluppate in modo significativo da A. Alexandru e G. Ciobanu. In particolare, gli autori propongono un'impostazione ispirata alla teoria di Fraenkel–Mostowski, nella quale anche strutture infinite possono essere trattate come dotate di un supporto finito; in questo quadro essi generalizzano diversi risultati della teoria dei gruppi formulata in ZF, riprendendo e ampliando, al contempo, idee già esplorate da Loeb nel contesto degli *hybrid sets*.

Prima di passare al paragrafo successivo, è importante citare in questa sezione la novità introdotta da Delgado et al. nell'articolo "RL-bags: A conceptual, level-based approach to fuzzy bags" pubblicato nel 2012.

Essi propongono una generalizzazione ai multiinsiemi (e ai multiinsiemi fuzzy) della *rappresentazione su livelli* già introdotta da D. Dubois e H. Prade nel 2008 e riproposta da D. Sánchez et al. nel 2012. Tramite un esempio introduttivo, che mostra i limiti dei multiinsiemi rispetto ai problemi di natura informativa, definiscono quindi un nuovo sistema in cui si possono conservare le proprietà già definite sui multiinsiemi, con lo scopo di arricchirle di proprietà *graduali* in modo da evitare perdite di informazioni.

L'esempio mostrato è il seguente: supponiamo di conoscere il numero di partecipanti ad una riunione A, che prevede difatti la presenza di tre femmine e cinque maschi; e di conoscere il numero di partecipanti ad una riunione B che è composta da quattro femmine e due maschi. Il numero di maschi che partecipa ad entrambe le riunioni è due, mentre solo una femmina sceglie di partecipare ad entrambe le riunioni A e B. Un modo per rappresentare i partecipanti tramite la teoria degli insiemi è, per esempio, il seguente: $A = \{w_1, w_2, w_3, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ e $B = \{w_1, w_4, w_5, w_6, m_1, m_2\}$, da cui $A \cap B = \{w_1, m_1, m_2\}$. Ora, siccome i multiinsiemi conservano solo il numero di occorrenze di un elemento e non la loro effettiva *manifestazione* (tema su cui torneremo più avanti), avremo un problema laddove ci fosse una perdita di informazioni relativa alle persone partecipanti. Se infatti fossimo a conoscenza solo del numero e del sesso delle persone che partecipano relativamente all'incontro A e all'incontro B allora una notazione multiinsiemistica per definirli sarebbe: $A = [w, m]_{3,5}$ e $B = [w, m]_{4,2}$, ma l'intersezione di questi due multiinsiemi è $A \cap B = [w, m]_{3,2}$ che è diversa da quella attesa.

Sia $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ un *insieme finito di livelli*, tale che $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > a_m$ e $a_{m+1} = 0, \forall m \geq 1$. Esso viene utilizzato come proprietà graduata, ovvero non vi è il caso booleano del vero/falso, ma una famiglia di versioni più o meno severe della stessa proprietà: $\alpha = 1$ implica un'interpretazione restrittiva (soddisfa la proprietà al massimo grado), $\alpha = 0$ implica un'interpretazione per nulla restrittiva, mentre $\alpha = 0.5$ indica un grado intermedio di severità.

Definizione 2.33 (*Sánchez et al.*) – Una RL è una coppia (Λ, ρ) dove Λ è l'insieme di livelli, mentre $\rho : \Lambda \to \mathcal{P}(X)$ è la funzione che associa a ciascun livello una sua realizzazione "non-fuzzy".

Dunque, a partire dalla precedente definizione, Delgado et al. costruiscono un sistema alternativo di multiinsiemi, gli RL-bags, con proprietà che possano evitare tali incongruenze. L'idea generale è quella di *settare* un α-cut, cioè una catena discendente di insiemi indicizzati da α e tale che maggiore sia α minore è l'insieme, che rappresenti il concetto fuzzy per mezzo della funzione di appartenenza.

2.3.1 La teoria assiomatica di Blizard (*MST*)

Nel presente sottoparagrafo presenteremo a grandi linee gli assiomi della teoria dei multiinsiemi proposta da Blizard (1989), definita MST (da Multiset Theory), limitandoci agli aspetti strutturali essenziali e omettendo i dettagli tecnici più onerosi. Tale quadro ci sarà utile come termine di confronto in vista della costruzione sviluppata nel Capitolo **2.4**, chiarendo quali scelte primitive siano necessarie per impostare in modo rigoroso una teoria dei multiinsiemi e quali conseguenze esse comportino.

Perché privilegiare proprio l'assiomatica di Blizard, e non altre impostazioni più recenti (ad esempio quelle di Dang o di Felisiak et al.)? La ragione è duplice: da un lato, essa costituisce uno dei primi tentativi organici di assiomatizzazione della teoria; dall'altro, è tra le formulazioni maggiormente *set-theoretic*, nel senso che risulta particolarmente vicina, per impostazione e per stile assiomatico, al quadro di riferimento di ZFC, offrendo quindi un confronto più diretto con gli standard usuali della matematica contemporanea.

Prima di iniziare ricordiamo che la *Multiset Theory* che Blizard sviluppa è una teoria del primo ordine e la prima certificazione che egli effettua è relativa al fatto che l'aritmetica presente nella sua teoria non può essere ignorata: le variabili numeriche, di cui le molteplicità fanno parte, sono dipendenti necessariamente dall'aritmetica di Peano.

Definizione 2.34 – Data una funzione S che manda ogni numero al suo successivo, $S(n) = n + 1$, si definisce ***aritmetica di Peano*** (PA) la teoria del primo ordine avente i seguenti assiomi:

1. $\forall x(S(x) \neq 0)$
2. $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$
3. $\forall x(x + 0 = x)$
4. $\forall x \forall y\big(x + S(y) = S(x + y)\big)$
5. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y(x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$
7. *Schema di assiomi d'induzione*: per ogni formula ben formata $\varphi(x)$ di L, la seguente: $\Big(\varphi(0) \wedge \forall x \Big(\varphi(x) \rightarrow \varphi\big(S(x)\big)\Big)\Big) \rightarrow \forall x, \varphi(x)$ è un assioma di PA.

La costruzione del linguaggio *L* proposta da Blizard e analizzata nel Capitolo **1.2**, volta a adattare l'aritmetica e l'analisi formale alla terminologia e alle esigenze della teoria dei multiinsiemi, costituisce un passaggio semplice ma concettualmente fondamentale. Si ricordi che, inoltre, il linguaggio di Blizard non propone distinzioni tra multiinsiemi ed elementi di un multiinsieme, essendo *two-sorted*: come specificato nel Capitolo **1.2** preferiamo restringere questa scelta semantica ad una reinterpretazione più classica della questione, senza alterare in alcun modo i contenuti degli assiomi. Per esempio, l'assioma **A1** sarà esclusivamente applicato agli elementi di un multiinsieme, mentre l'assioma **A2** riproporrà l'assioma di estensionalità in versione standard.

(A1) – Il primo assioma è *l'**assioma di molteplicità esatta***, che garantisce l'unicità della molteplicità: fissati un elemento e un multiinsieme, la molteplicità del primo è determinata in modo univoco nel secondo.

(A2) – Segue *l'**assioma di estensionalità***, in diretto parallelo con quello della teoria di Zermelo-Fraenkel: due multiinsiemi sono uguali se e solo se in entrambi ogni elemento vi compare con la stessa molteplicità. In questa impostazione l'uguaglianza è dunque trattata in senso pienamente estensionale, senza introdurre ulteriori livelli di distinzione concettuale (come avviene, ad esempio, nell'approccio di Wildberger).

(A3) – Il terzo assioma è l*'**assioma del multiinsieme vuoto***, che postula l'esistenza di un multiinsieme privo di elementi, denotato con $\emptyset$ come nella teoria standard. È utile notare che in altre assiomatizzazioni, ad esempio in quella di Felisiak et al., tale esistenza non viene assunta come assioma: essa può essere ricavata come teorema grazie alla presenza dello schema di assiomi di separazione.

(A4) – L'***assioma di esistenza dei multiinsiemi finiti*** asserisce che per ogni multiinsieme X e per ogni numero n, esiste ed è unico un multiinsieme Y che contiene esattamente n copie di X e nient'altro. Più in generale, per ogni coppia di multiinsiemi distinti $X \neq Y$ e per ogni n, m, esiste ed è unico un multiinsieme Z che contiene esattamente n copie di X e m copie di Y, e nient'altro.

(A5) – L'***assioma dell'insieme potenza*** è un concetto che abbiamo già analizzato e discusso ampiamente nella sezione **2.2.1** di questo capitolo, così come l'idea di Blizard su tale oggetto.

(A6) – Il sesto assioma è l'***assioma di fondazione***: ogni multiinsieme non vuoto Y contiene almeno un elemento X che è minimale rispetto alla relazione di appartenenza $\in$, cioè nessuno elemento di X appartiene ad Y. Questo assioma serve per evitare catene discendenti infinite costruite tramite questa relazione, del tipo: ... $\in X_3 \in X_2 \in X_1 \in Y$. Si evitano inoltre i loop e l'auto-appartenenza.

(A7) – Il settimo assioma è ***l'assioma di unione***. Per ogni multiinsieme X esiste un multiinsieme $X' = \bigcup X$ che contiene esattamente tutti gli elementi che appartengono ad almeno un elemento di X. Inoltre, per ogni z, la molteplicità con cui z compare in X' è determinata dalle molteplicità massima con cui z compare come elemento negli elementi di X, laddove esista. Se tali molteplicità non sono superiormente limitate, allora la molteplicità che assume z in X' è equivalente alla molteplicità minima di z come elemento di elementi di X. Tale molteplicità esiste per buon ordinamento di PA.

Questo assioma è particolarmente inusuale per l'abitudine che abbiamo di concetto di unione di insiemi standard. Difatti, per multiinsiemi finiti la molteplicità massima di ogni elemento esiste sempre e, dunque, la nozione di insieme unione può sembrare scontata anche nella teoria dei multiinsiemi. Tuttavia, sia ad esempio $Y = \big[[y], [y]_2, [y]_3, \dots\big]$ un multiinsieme infinito con molteplicità massima sugli elementi di elementi di Y non esistente, avremo che $\bigcup Y = \{y\}$: viene dunque utilizzato il multiinsieme con molteplicità minima.

Prima di introdurre altri assiomi, Blizard definisce i numerali di Von Neumann nella teoria dei multiinsiemi cercando, tramite alcune condizioni, di escludere casi particolari e problematici che sorgerebbero altrimenti nella teoria.

Per chiarire il passaggio aritmetico introdotto da Blizard, ricordiamo innanzitutto la costruzione classica dei numeri naturali alla von Neumann (VNN): si pone $0 = \emptyset$ e, ricorsivamente, $n + 1 = n \cup \{n\}$. Ne consegue che $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e, in generale, $n = \{0,1, \dots, n-1\}$; inoltre, ogni numerale è transitivo e la relazione di appartenenza codifica l'ordine, nel senso che $m < n$ se e solo se $m \in n$. In MST Blizard mira a ricostruire internamente questa rappresentazione, isolando tramite opportuni predicati una classe di oggetti che si comportano come numerali: oltre alla transitività, egli impone una condizione di *connessione* e introduce il concetto di elemento limite (Lim), così da escludere configurazioni patologiche che potrebbero comparire nel contesto multiinsiemistico. Il predicato $VNN(u)$ identifica quindi gli oggetti che realizzano il comportamento atteso dei numerali di von Neumann, e l'ottavo assioma che Blizard inserisce in PA stabilisce una corrispondenza $n \mapsto \hat{n}$ tra i numeri dell'aritmetica di Peano e i rispettivi numerali in MST. Tale corrispondenza verrà poi utilizzata per formalizzare in modo controllato le nozioni di finitezza e di cardinalità dei multiinsiemi all'interno della teoria.

(A8) – L'***assioma di unione additiva*** costruisce un multiinsieme (unico per assioma **A2**) $Z' = \biguplus X$ tale che per ogni X esso contiene tutti gli elementi z di elementi di Y di elementi di X. Ergo esso ha gli stessi elementi distinti di $\bigcup X$. La molteplicità di z vale $m_{Z'}(z) = \sum_{Y \in X^*, z \in Y} m_X(z) m_Y(z)$ se z appartiene ad un numero finito di elementi Y di X, vale la regola imposta dall'assioma **A7** altrimenti.

L'assioma **A8** non è indipendente ed è quindi ricavabile da assiomi precedenti in unione con PA; tuttavia, Blizard formula l'unione additiva come assioma per ragioni espositive: pur essendo derivabile dagli altri assiomi (in particolare da quelli aritmetici e di sostituzione), la sua costruzione risulta tecnicamente onerosa. Enunciarla separatamente consente di fissare fin da subito l'operazione e le sue proprietà, evitando di appesantire l'impianto con una dimostrazione lunga e non essenziale ai fini del seguito.

(A9) – Lo ***schema di assiomi di separazione*** non seleziona solo quali elementi prendere come nel caso di ZF, ma anche con quali molteplicità prenderli. Per ogni formula ben formata $\varphi(x,n)$ del linguaggio $\mathcal{L}$ (con x elemento e n numero), che sia *funzionale* rispetto a n, cioè tale che, fissato x, esista al più un valore n per cui $\varphi(x,n)$ valga, e per ogni multiinsieme Z, esiste un multiinsieme Y ottenuto "selezionando" da Z alcune ripetizioni: per ogni x, si ha $x \in^n Y$ se e solo se $x \in_+ Z$ e $\varphi(x,n)$. Inoltre, Y è un multisottoinsieme di Z: la molteplicità di ogni x in Y non supera quella di x in Z, dunque $Y \subseteq_m Z$.

(A10) – Lo ***schema di assiomi di rimpiazzamento*** afferma che per ogni formula ben formata $\varphi(x,y)$ del linguaggio $\mathcal{L}$ che sia *funzionale* in y e per ogni multiinsieme Z, esiste un multiinsieme Z' che rappresenta l'immagine di Z tramite φ. In particolare, un oggetto y appartiene a Z' se e solo se esiste almeno un $x \in Z$ tale che $\varphi(x,y)$ valga; inoltre, la molteplicità con cui y compare in Z' è definita come la minima tra le molteplicità degli $x \in Z$ che vengono mappati in y. La scelta della molteplicità minima è necessaria per garantire che la molteplicità di y in Z' sia ben definita anche quando più elementi distinti di z, con molteplicità diverse, vengono sostituiti dallo stesso y: in assenza di tale regola, y potrebbe ricevere molteplicità incompatibili con l'assioma **A1**.

(A11) – L'***assioma dell'infinito*** asserisce l'esistenza di un multiinsieme Y tale che $\emptyset \in Y$ e, per ogni $x \in Y$, anche il suo *successore* $x \cup \{x\} \in Y$. Come nella teoria standard, questo assioma garantisce l'esistenza di una collezione infinita e permette di ricostruire internamente i naturali (alla von Neumann) come il più piccolo insieme chiuso rispetto al successore.

(A12) – L'ultimo degli assiomi è ***l'assioma della scelta*** (AC), che estende ai multiinsiemi il medesimo concetto presente in ZFC. Sia Y un multiinsieme non vuoto i cui elementi $X \in Y$ siano tutti non vuoti. Supponiamo inoltre che elementi distinti di Y siano disgiunti (nel senso che $X \cap Z = \emptyset$ per $X \neq Z$). Allora esiste un multiinsieme Y' tale che, per ogni $X \in Y$, Y' contenga almeno un elemento $x' \in X$; in altre parole, Y' "sceglie" un elemento da ciascun $X \in Y$. Inoltre, le ricorrenze degli elementi scelti in Y' vengono presi con la stessa molteplicità con cui compaiono i corrispondenti X in

Y (mentre le molteplicità interne degli x' in X non sono rilevanti). Un tale Y' si chiama ***multiinsieme di scelta*** per Y.

In sintesi, l'assiomatica di Blizard fornisce un quadro fondazionale sufficientemente ricco da trattare i multiinsiemi come oggetti primitivi e fondazionali, pur mantenendo un'impostazione chiaramente ispirata alla teoria standard degli insiemi. La scelta di lavorare con una relazione di appartenenza arricchita dalla molteplicità e con schemi di costruzione analoghi a quelli di ZF consente di recuperare, in forma multiinsiemistica, molte delle operazioni e delle strutture familiari (unioni, immagini, finitezza e strumenti aritmetici interni), evitando al contempo di ridurre i multiinsiemi a mere codifiche esterne. Il risultato più rilevante, però, è di natura metateorica: Blizard non si limita a proporre assiomi plausibili e adattabili, ma costruisce un modello in cui la teoria dei multiinsiemi interpreta la teoria standard degli insiemi, mostrando così che l'impianto multiinsiemistico è compatibile, in senso di consistenza relativa, con ZFC, Tale modello interpreta i multiinsiemi come funzioni a valori interi positivi e considera in esso una struttura di L con due domini: l'insieme degli ordinali finiti (l'insieme dove variano i simboli numerici) e una classe gerarchica di funzioni (dove variano i simboli multiinsiemistici).

In questo modo l'assiomatica assume un ruolo esemplare: non tanto come unico standard possibile, quanto come riferimento privilegiato per confrontare altre formalizzazioni e per motivare, nel seguito, le scelte che adotteremo nella nostra costruzione.

2.3.2 Multiinsiemi *fuzzy*

In questa breve sezione mostriamo come l'estensione ai multiinsiemi della teoria introdotta da L. Zadeh nel 1965, la teoria degli insiemi *fuzzy* (lett. "sfocati"), abbia conosciuto un notevole sviluppo soprattutto a partire dalla fine degli anni Ottanta. Come osserva Syropoulos, l'idea di insieme fuzzy nasce principalmente dall'esigenza di formalizzare una nozione di appartenenza *parziale* a un insieme, offrendo così uno strumento adatto alla modellizzazione di oggetti e fenomeni empirici. Oggi la teoria fuzzy costituisce un ambito ampio e maturo, con applicazioni consolidate in particolare nell'informatica e nell'analisi dei dati (ad esempio in statistica e in ambito decisionale, specie nei casi di *pattern recognition* e *decision problem analysis*).

Definizione 2.35 – Sia X un insieme. Ogni funzione $A : X \to I = [0,1]$ è detta ***sottoinsieme fuzzy*** di X.

Il primo a mettere in evidenza tale estensione nel contesto della teoria dei multiinsiemi è stato Yager, nel 1986. Successivamente, l'impostazione da lui proposta è stata ripresa e approfondita da diversi autori, tra cui L. Baowen, S. Miyamoto e lo stesso Blizard, che hanno ottenuto ulteriori risultati e sviluppi in questa direzione.

Definizione 2.36 – Un ***multiinsieme fuzzy*** A è definito come il prodotto $X \times I$ rappresentato dalla molteplicità degli elementi in I definita da $m_A(x,u) : X \times I \to \mathbb{N}$.

Quest'ultima funzione, dunque, rappresenta il conteggio dell'elemento $x \in X$ con u come suo grado di appartenenza.

Esempio 2.10 – $A = [(x_1, 0.2)_2\ (x_1, 0.3)_3\ (x_2, 0.1)_4\ (x_2, 0.2)_5]$ è un esempio di multiinsieme fuzzy con le molteplicità segnate al pedice.

È anche possibile ottenere *una sequenza graduata* che inserisca un ordine di grandezza decrescente sugli elementi di I a cui si aggiungono degli zero per gli elementi di X in molteplicità inferiore. Per chiarire meglio, osserviamo il seguente esempio

Esempio 2.11 – Sia $A = [(a, 0.2)\ (b, 0.5)\ (b, 0.1)\ (a, 0.2)\ (a, 0.3)\ (d, 0.7)]$, allora la sua sequenza gradata è $A = [\{0.3,0.2,0.2]/a\ , \{0.5,0.1,0\}/b\ , \{0.7,0,0\}/d]$

Questo tipo di ricostruzione è, difatti, molto utile nei campi dell'analisi statistica e nelle catalogazioni di oggetti, oltre che nel caso della *flexible querying* (lett. "interrogazione flessibile") per la gestione di informazioni vaghe ed imprecise.

Definizione 2.37 – Siano $A = \langle X \times I, m_A \rangle$ e $B = \langle X \times I, m_B \rangle$ due multiinsiemi fuzzy, allora la ***somma*** è definita da $A + B = C = \langle X \times I, m_C \rangle$ dove, per ogni $(x,u) \in X \times I$, $m_C(x,u) = m_A(x,u) + m_B(x,u)$.

Il concetto di cardinalità, invece, si scinde in due tipologie diverse per i multiinsiemi fuzzy: una considera gli elementi $u \in I$, l'altra è tipicamente simile alla definizione di cardinalità già data per i multiinsiemi generici.

Definizione 2.38 – Sia A un multiinsieme fuzzy definito su $X \times I$, allora la ***cardinalità*** di A è definita come:

$$|A| = \sum_{x \in X} \sum_{u \in I} u \cdot m_A(x, u)$$

Definizione 2.39 – Sia A un multiinsieme fuzzy definito su $X \times I$, allora la ***cardinalità assoluta*** di A è definita come:

$$\left||A|\right| = \sum_{x \in X} \sum_{u \in I} m_A(x, u)$$

Proposizione 2.2 – *La cardinalità di un multiinsieme fuzzy è sempre minore o uguale della sua cardinalità assoluta.*

Dim. Banale. ■

Osservazione 2.8 – È interessante notare che nella costruzione proposta da Yager per i multiinsiemi fuzzy, la molteplicità degli elementi non è necessariamente unica: ci sono divergenze assiomatiche, dunque, tra la teoria proposta da Blizard per le strutture fuzzy nell'articolo "Real valued multisets and fuzzy sets" del 1989 e la teoria edificata da Yager nel 1986.

2.4 Un nuovo approccio al concetto di multiinsieme. Sistema di Manifestazioni (SdM)

Un multiinsieme è una struttura estremamente versatile, non solo per la varietà di impieghi a cui si presta, ma anche per la pluralità di concezioni astratte che i matematici possono attribuirgli. Consideriamo, ad esempio, il multiinsieme $E = [a\, a\, a\, b\, b]$: c'è chi vi riconosce due oggetti ripetuti, rispettivamente, tre e due volte; e c'è chi, invece, vi vede cinque elementi distinti che ne costituiscono la totalità e, dunque, la "cardinalità" nel senso del numero complessivo di occorrenze. Vi è inoltre chi cerca di definire su E relazioni che omettano l'indistinguibilità delle copie e chi, al contrario, intende preservarla.

Alla luce di quanto argomentato finora, abbozzeremo un'idea di struttura che caratterizzi in modo univoco i multiinsiemi, utilizzando una linea di pensiero più vicina a Wildberger circa la natura trivalente di uguaglianza, e avvalendoci dell'assiomatica di Blizard per la teoria dei multiinsiemi. Introduciamo pertanto nel linguaggio L le seguenti relazioni che agiscono sugli elementi del multiinsieme: $\sim, \equiv, \neq$. Essi saranno costruiti su simboli logici già presenti in L, dunque non andranno ad intaccare l'assoluta stabilità dell'assiomatica di MST. Mostreremo, ad esempio, che nel caso del multiinsieme $E = [a\ a\ a\ b\ b]$ la scrittura $a \sim a$ indica che i due termini rappresentano lo stesso *oggetto* (qui: a), ma non la stessa *manifestazione*; per esempio, quando il primo membro è la prima occorrenza di a in E e il secondo membro è la seconda (o la terza) occorrenza. Viceversa, $a \equiv a$ indicherà che si tratta della medesima manifestazione dell'oggetto a. Infine, per $a \neq b$ intendiamo che a e b sono oggetti distinti.

Prima di procedere, è utile una breve digressione sulla differenza di linguaggio e di impostazione che si riscontra tra Wildberger e Blizard. Consideriamo, ad esempio, l'assioma di estensionalità in Blizard: non disponendo di un linguaggio che assuma l'identità tra multiinsiemi, l'assioma viene presentato in forma generale e debole, formulato in termini di uguaglianza. Tuttavia, riteniamo che l'intuizione identitaria di Wildberger, applicata ai multiinsiemi, vada attribuita innanzitutto agli elementi che li compongono: risulterebbe più naturale, dunque, stabilire una connessione prioritaria tra oggetti e manifestazioni, piuttosto che riferirla direttamente all'intero apparato multiinsiemistico. L'attenzione principale va invece posta sul concetto di molteplicità: nell'assiomatica di Blizard esso è espresso tramite una relazione binaria di appartenenza con molteplicità, che può comportare una perdita di distinguibilità. Per questa ragione, adotteremo la relazione $\in^m$ solo quando necessario, ossia per indicare esplicitamente la molteplicità di un oggetto all'interno di un multiinsieme, evitando per quanto possibile tale collasso informativo. In generale, pur non esplicitando Blizard queste distinzioni nel proprio linguaggio, riteniamo che esse restino compatibili e operativamente utili anche nella struttura che costruiremo.

Per semplicità, assumiamo che l'insieme K dei valori delle molteplicità coincida con l'insieme degli interi positivi; resta comunque possibile estendere la teoria anche al caso di interi negativi.

Definiamo la seguente struttura, $\mathcal{M} = (S, E^*, \varphi)$, lo ***spazio delle manifestazioni***, dove S è l'***insieme generatore*** (o ***core set***) di cardinalità finita o infinita a seconda dello studio che si vuole effettuare, E^* è definito ***supporto delle manifestazioni*** e svolge la stessa funzione del supporto del multiinsieme, con la differenza che è esso a definire gli *oggetti* degli elementi del multiinsieme e non il viceversa, $\varphi : S \to E^*$ è una mappa, detta ***mappa delle manifestazioni***, per cui $\varphi(s) = x \in E^*$. Costruiamo a posteriori $g : E^* \times \mathbb{N}^+ \to \{0,1\}$ come la ***funzione di selezione*** che agisce sulla molteplicità degli elementi, non dissimile da un ciclo *for* algoritmico.

Definizione 2.40 – Gli elementi di S vengono definiti ***sostanze***, gli elementi di E^* si chiamano ***oggetti***.

La costruzione di un multiinsieme E per la struttura procede nei seguenti step. Il primo passo è quello di definire un sottoinsieme $S_0 \subseteq S$ su cui poi si strutturerà E. S_0 deve rispettare due condizioni principali: la prima è che $\varphi_{|S_0}$ sia iniettiva, la seconda è che sia un insieme "attivo", cioè un insieme i cui elementi siano abilitati a generare manifestazioni e, quindi, molteplicità, tramite la mappa φ. Se prendiamo, dunque, una funzione di attivazione $\alpha: S \to \{0,1\}$ tale che $\alpha(s) = 0$ se s non è attivo, $\alpha(s) = 1$ viceversa, è possibile definire S_0 come l'insieme che non contenga elementi $s = \alpha^{-1}(0)$. Successivamente si costruisce un *bound* massimo sulle molteplicità di ogni oggetto in E^*, che può essere finito o infinito per le occorrenze generabili. Possiamo farlo tramite una semplice funzione $n: E^* \to \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ tale per cui $n(x) = n_x$ assegni ad ogni $x \in E^*$ la massima molteplicità che esso può raggiungere. Definiamo ora lo ***spazio delle occorrenze potenziali*** come $\Omega = \{(x, i) : x \in E^*, i = 0, \dots, n_x\}$[10]: l'ordine di generazione è nell'indice i. A questo punto, si genera la funzione di assegnazione g: $g : E^* \times \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\} \to \{0,1\}$ con il vincolo $g(x, i) = 0$ se $i > n_x$. L'interpretazione di questa funzione è che $g(x, i) = 1$ implichi che al passo i, l'oggetto x generi l'i-esima occorrenza (x, i).

Ricordando che da $\forall s \in S_0$ abbiamo $\varphi(s) = x \in E^*$, definisco l'insieme delle coppie $A_x^g \coloneqq \{(x, i) : x \in E^*,\ i = 0, \dots, n_x, g(x, i) = 1\} \in Set(\Omega)$, dove $Set(\Omega)$ rappresenta

[10] La struttura Ω qui costruita non è necessariamente un insieme: difatti, può rappresentare anche un multiinsieme, uno spazio di vettori, etc.

la notazione utilizzata da Blizard per l'imposizione formale di un insieme: è in questo punto che ci servono le proprietà insiemistiche di Ω[11]. Definiamo ora:

$$\hat{E}(S_0, g) \coloneqq \bigcup_{x \in \varphi(S_0)} A_x^g$$

A questo punto si sviluppa l'ultimo passaggio per il collasso degli elementi di $\hat{E}(S_0, g)$ al sistema multiinsiemistico tramite un'azione di "proiezione" $\pi : Set(\Omega) \to MSet(E^*)$, dove $MSet(E^*)$ rappresenta l'insieme di tutti i multiinsiemi costruibili a partire dagli oggetti di E^*, tale che $\pi(x, i) = x$ con la condizione che $\forall x \in E^*, \exists!\, m_x \in K$ tale per cui tale molteplicità sia assegnata all'oggetto x (nel suo multiinsieme generato). Si conclude il procedimento attraverso la costruzione del multiinsieme.

Definizione 2.41 – Definisco sulla struttura $\mathcal{M}$ il multiinsieme $E = E(S_0, g)$, chiamato ***multiinsieme delle manifestazioni (MM)***, un multiinsieme indotto da S_0 e g, con elementi di molteplicità $m_E(x) = m_x$ tale che:

$$E(S_0, g) \coloneqq \pi\left(\hat{E}(S_0, g)\right) \in MSet(E^*)$$

Gli elementi di E vengono definiti ***manifestazioni*** degli $x \in E^*$

Osservazione 2.9 – Si osserva che è possibile invertire l'ordine degli ultimi due passaggi, ovvero quello della costruzione degli A e quello del collasso tramite proiezione, per una maggiore comodità e semplicità di operazioni. Si costruiscono, in questo caso, le strutture $\tilde{A}_{s,x}^g$ come multiinsiemi semplici sugli oggetti x e la definizione del *multiinsieme delle manifestazioni* equivale all'unione additiva multiinsemistica di tali strutture: $E(S_0, g) = \biguplus_{s \in S_0} \tilde{A}_{s,x}^g$. Abbiamo indicato con $\tilde{A}_{s,x}^g$ la struttura qui definita, per distinguerla da quella precedente.

Osservazione 2.10 – Se $x \in E^* - \varphi(S_0)$ allora $m_x = m_E(x) = 0$ per costruzione.

Proprietà 2.5 – La molteplicità degli elementi $z \in E$ è definita, dunque, come segue: $m_{E(S_0,g)}(z) = \left|A_{\varphi^{-1}(z),z}\right|$ (questa relazione è vera anche qualora si invertissero gli step precedenti).

[11] L'eventuale perdita di informazioni dovute al collasso di molteplicità causate dall'imposizione di $Set(\Omega)$ sarà del tutto ininfluente. $Set(A) \coloneqq A = \emptyset \vee \forall x \forall n (x \in^n A \to n = 1)$.

Osservazione 2.11 – La funzione g determina una dinamica potenziale di generazione delle manifestazioni sugli oggetti di E^*. Il sottoinsieme $S_0 \subseteq S$ seleziona invece quali oggetti siano effettivamente coinvolti nella costruzione del multiinsieme. In tal modo il multiinsieme risultante $E(S_0, g)$ dipende simultaneamente dalla dinamica g e dallo stato attivo S_0.

A questo punto è necessario introdurre delle condizioni sulla struttura, in merito alle nuove relazioni preimpostate nel linguaggio, che garantiscano delle proprietà aggiuntive su oggetti e manifestazioni e stabiliscano una efficiente dinamica interna al multiinsieme. L'intento è quello di non ridurre E, dunque, ad una semplice costruzione tramite mappa di proiezione su multiinsiemi che ne proibisca la salvaguardia delle informazioni sugli elementi.

Condizioni *a posteriori*

Condizioni sulla relazione '≡'

i) *Identità multiinsiemistica*

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \equiv x_2 \leftrightarrow \exists x \in E^* \exists i, j \in \mathbb{N}^+ (x_1 = \pi^{-1}(x, i) \wedge x_2 = \pi^{-1}(x, j) \rightarrow (x, i) =_{Set(\Omega)} (x, j))$$

ii) *Identificabilità*

$$(\forall s \in S_0, \exists \varphi(s) \in E^* : \exists x_1 \in E : \varphi(s) \equiv x_1) \wedge (\forall x \in E, \exists!\, y \in E^* : x \equiv y)$$

La prima serve ad indicare che gli elementi sono collassati in un'unica molteplicità nell'attualizzazione di $Set(\Omega)$: non contribuiscono, dunque, ad una distinzione di occorrenze sulle molteplicità nel multiinsieme finale E. Se la manifestazione in E di un oggetto x è unica, e dunque $m_E(x) = 1$, allora vi è l'identità tra l'oggetto x e la sua manifestazione in E (*manifestazione identità*), come da condizione ii).

Condizione sulla relazione '∼'

i) *Equivalenza oggettuale*

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \sim x_2 \leftrightarrow \neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \exists x \in E^* : x \equiv x_1 \wedge x \equiv x_2$$

In poche parole, due elementi di E sono relazionabili da '∼' se la condizione ii) della precedente relazione è verificabile, ma non la i).

Condizione sulla relazione '$\neq$'

i) Diversità

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \sim x_2)$$

Osservazione 2.12 – Alla luce di queste condizioni, è possibile rivedere E, più che come semplice multiinsieme, come *organizzazione* multiinsiemistica dell'intero apparato formato dalla struttura e dagli step costruttivi. Questo accade perché non solo E può contenere più occorrenze di un determinato oggetto, ma perché tali occorrenze possono sia essere distinte ad un livello più fine che ricondotte ad un'essenza di livello superiore.

Esempio 2.12 – Sia $E = [a\ a\ a\ b\ b]$ un multiinsieme, allora identifichiamo con l'oggetto a gli elementi a_1,a_2 e a_3 e con b gli elementi b_1,b_2: in questo modo è possibile riscrivere $E = [a_1\ a_2\ a_3\ b_1\ b_2]$ (notazione utile specificamente per questo esempio). Abbiamo che $\forall i, a_i \equiv a_i$, $\forall i \neq j, a_i \sim a_j$ e $\forall i, j, a_i \neq b_j$.

Osservazione 2.13 – Le condizioni sopra introdotte sono state espresse per elementi di uno stesso multiinsieme. Una formulazione analoga può essere considerata anche nel caso di elementi appartenenti a multiinsiemi distinti.

Proprietà 2.6 (***Proprietà transitiva delle relazioni***) – Per le prime due relazioni vale la proprietà transitiva (tra elementi di un multiinsieme!), cioè $\forall a, b, c \in E$, se $a \equiv b$ (rispettivamente $a \sim b$) e $b \equiv c$ (risp. $b \sim c$) allora $a \equiv c$ (risp. $a \sim c$). Non è detto, invece, che se $a \neq b$ e $b \neq c$ allora $a \neq c$.

Proprietà 2.7 (***Tricotomia delle relazioni***) – Per gli elementi di ogni MM E vale la tricotomia delle relazioni precedenti: $\forall a, b \in E, (a \equiv b) \vee (a \sim b) \vee (a \neq b)$

Proprietà 2.8 (***Identità tra multiinsiemi***) – Siano E e E' due MM, allora:

$$E \equiv E' \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!\, y \in E' : x \equiv y$$

Dim. Banale per condizioni sulla relazione $\equiv$, per la proprietà **2.6** e per l'osservazione **2.13**

Proprietà 2.9 (***Uguaglianza tra multiinsiemi***) – Siano E e E' due MM, allora:

$$E = E' \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists y \in E' : (x \equiv y \vee x \sim y) \wedge \big(m_E(x) = m_{E'}(y)\big)$$

Osservazione 2.14 – La relazione '$\sim$' forma una classe d'equivalenza sugli oggetti di E^*

Esempio 2.13 – Proviamo a fornire un semplice esempio di una struttura $\mathcal{M} = (S, E^*, \varphi)$ costruendoci sopra un multiinsieme E. Sia $S = \{a, b, c, d, f\}$ e $E^* = \{1{,}4{,}5{,}8\}$ tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 4$, $\varphi(c) = 4$, $\varphi(d) = 5$ e $\varphi(f) = 8$. Sia $S_0 = \{a, c, f\}$ e per semplicità supponiamo $\forall w \in E^*, n_w = 3$. Definisco:

$$g(w,i) = \begin{cases} 1 & se\, w > 4 \vee i \in \mathbb{P} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

In tal modo abbiamo che $g(1{,}1) = 0$, $g(1{,}2) = 1$, $g(1{,}3) = 0$, $g(4{,}1) = g(4{,}3) = 0$, $g(4{,}2) = 1$ e $g(5{,}1) = g(5{,}2) = g(5{,}3) = g(8{,}1) = g(8{,}2) = g(8{,}3) = 1$. Si ha che $Z = \cup A_x^g = \{(1{,}2), (4{,}2), (5{,}1), (5{,}2), (5{,}3), (8{,}1), (8{,}2), (8{,}3)\}$ e $\hat{E}(S_0, g) = Z - \{(5{,}1), (5{,}2), (5{,}3)\}$. A questo punto il multiinsieme delle manifestazioni E indotto da S_0 e g è: $E = [1\ 4\ 8\ 8\ 8]$.

Esempio 2.14 – È anche possibile fornire esempi più pratici di SdM: un esempio naturale della struttura proposta può essere ottenuto considerando un insieme di misure sperimentali di una stessa grandezza fisica. In questo caso supponiamo che S rappresenti l'insieme delle grandezze fisiche misurabili di una serie di esperimenti condotti in un laboratorio e $E^* = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{k}{100}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ è l'insieme dei numeri reali approssimati alla seconda cifra dopo la virgola (in questo caso, abbiamo che $|S| < |E^*|$). La mappa $\varphi : S \to E^*$ associa ad ogni grandezza il valore numerico che essa manifesta idealmente. Il multiinsieme E raccoglie invece le singole misurazioni effettuate in laboratorio, che possono produrre più manifestazioni dello stesso valore numerico: è possibile costruire diversi multiinsiemi E indotti da un insieme S_0 e da una selezione g che li cataloghi (quest'ultima associa su E ogni esperimento al suo valore). Per esempio, se $x = 8.87$ appare sei volte come valore finale tra tutti gli esperimenti svolti, questo implica che $n_x = 6$ ma non che $m_x(E) = 6$, questo perché la molteplicità di ogni elemento di E è definita tramite g che agisce su Ω (spazio delle occorrenze potenziali) e dunque $m_x(E) \leq 6$.

Proposizione 2.3 – *La definizione* ***2.41*** *è una buona definizione, ovvero E è naturalmente indotto da* S_0 *e* g.

Dim. Dimostriamo che se $S_0 = S_1 \wedge g = g'$ e $E = E(S_0, g)$, $E' = E(S_1, g')$, allora $E \equiv E'$. Per definizione, $E(S_0, g) = \pi\left(\hat{E}(S_0, g)\right)$, dunque è sufficiente dimostrare che $\hat{E}(S_0, g) = \hat{E}(S_1, g')$, in quanto $E(S_0, g) \coloneqq \pi\left(\hat{E}(S_0, g)\right), \hat{E}(S_0, g) \coloneqq \bigcup_{x \in \varphi(S_0)} A_x^g$. Essendo $A_x^g \coloneqq \{(x, i) \in \Omega : g(x, i) = 1\}$, se $S_0 = S_1$ abbiamo che $\varphi(S_0) = \varphi(S_1)$ e se $g = g'$ allora $\forall x$ abbiamo che $A_x^g = A_x^{g'}$. Dunque, la dimostrazione segue per buona costruzione.

Osservazione 2.15 – Per la precedente proposizione vale anche il viceversa per merito esclusivo delle condizioni a posteriori sul linguaggio: con la perdita di informazioni dovuta all'azione di proiezione di π su $MSet(E^*)$ si rischia altrimenti di avere casi in cui per g diverse si ottengono gli stessi multiinsiemi E. Questo svantaggio viene colmato dalle condizioni a posteriori che vanno a setacciare tutti i passaggi effettuati per la costruzione per proporre la dinamica precedentemente cercata: una dinamica relazionale interna agli elementi del multiinsieme stesso. Ergo, è anche possibile dimostrare che se $E = E(S_0, g) \equiv E(S_1, g') = E'$ allora $S_0 = S_1$ e $g = g'$. Da notare che se si supponesse solo l'uguaglianza $E = E'$ non si potrebbe provare che $g = g'$.

Proposizione 2.4 – *Sia* $S_0 \subseteq S_1$. *Allora* $E(S_0, g) \sqsubseteq E(S_1, g)$.

Come già osservato più volte, Wildberger introduce e definisce l'identità esclusivamente come relazione propria dei multiinsiemi, e non come proprietà riferibile ai singoli elementi che li compongono. Sorge allora un problema: che cosa accade, in SdM, alle operazioni di unione e somma quando due MM distinti possiedono almeno un elemento identico? Se si volesse imporre che le condizioni a posteriori definite esclusivamente per elementi di MM valgano anche per elementi di multiinsiemi ottenuti tramite unione, sarebbe necessario elaborare una nuova definizione capace di preservare la distinguibilità degli elementi non identici. Se invece l'unione tra MM venisse definita come nella Def. **2.15**, si produrrebbe un inevitabile collasso informativo. Per questa ragione, appare più naturale assumere come operazione fondamentale tra due MM la sola unione additiva.

Definizione 2.42 (*Unione additiva*) – Siano $E(S_0, g)$ e $E'(S_1, g')$ due MM. Definiamo l'unione additiva tra MM come:

$$F = E \uplus^M E' \coloneqq (E +^M E') -^M G$$

Dove $+^M$ è la trasformazione che unisce in un blocco tutti gli elementi dei due multiinsiemi, $-^M$ rappresenta l'operazione inversa di $+^M$, e G è il multiinsieme di elementi $x \in E$ tali che $\forall x \in G, \exists!\, y \in E' : x \equiv y$.

Proprietà 2.10 – Se $S_0 \cap S_1 = \emptyset$, allora $G = \emptyset$ e $F = E +^M E'$.

Osservazione 2.16 – L'operazione $+^M$ differisce dalla somma su multiinsiemi definita in Def. **2.17**, in quanto la prima non garantisce solo la conservazione della molteplicità, ma anche del contenuto (gli elementi sono esattamente gli stessi). La si può vedere a tutti gli effetti come un "collage" di elementi di multiinsiemi.

In questo modo vengono indirettamente preservate le condizioni a posteriori (e, soprattutto, le loro proprietà) anche per i multiinsiemi unione. Inoltre, abbiamo che se $F = E \uplus^M E'$ e $F' = E' \uplus^M E$, allora $F \equiv F'$.

Un altro modo per definire l'unione additiva è tramite la costruzione di F multiinsieme delle manifestazioni indotto da $S_0 \cup S_1, g$ e g'. Tuttavia, questo è un processo che rischia di diventare controproducente, poco efficace e agevole nonché difficilmente utilizzabile.

Proposizione 2.5 – Siano E e E_0 due MM e $E_1 = E -^M E_0$. Allora $\forall x \in E_0, \nexists y \in E_1 : y \equiv x$.

Definizione 2.43 – Sia $\bar{s} \in S$ fissato nello spazio (S, E^*, φ). Si definisce ***multiinsieme ciclico (o primitivo)*** quel multiinsieme $E(S_0, g)$ della struttura tale che:

i) $E(S_0, g)$ sia un MM tale che $\bar{s} \in S_0$

ii) $\exists!\, x_1, x_2 \in E : \left(x_1 \sim x_2 \land x_1, x_2 \in \tilde{A}^g_{\varphi(\bar{s})}\right)$

iii) $\forall x \in E^* - \{\varphi(\bar{s})\}, m_E(x) \leq 1$

Definizione 2.44 – Gli x_1 e x_2 che soddisfano la seconda condizione si definiscono ***poli*** (o ***estremi***) del multiinsieme primitivo E, mentre la $\bar{s}$ fissata viene definita ***origine*** della struttura.

Osservazione 2.17 – A causa delle condizioni ii) e iii) un qualsiasi multiinsieme ciclico generato dalla struttura è sempre un multiinsieme semplice.

L'identità matematica definita in questa sezione, che abbiamo visto essere un concetto vicino all'idea di identità di Wildberger, è tuttavia diversa da quella a cui siamo quotidianamente abituati. Per esempio, due radici di un'equazione possono essere distinte o identiche, o ancora meglio, due punti segnati su un cerchio sono identici se e solo se sono coincidenti. È facile allora notare che la definizione matematica di identità a cui siamo abituati si rispecchi di più nella condizione di *Equivalenza Oggettuale* piuttosto che in quella di *Identità* che abbiamo assegnato al nostro SdM; quest'ultima, infatti, è addirittura più forte. Dunque, in merito alle nostre condizioni, nel nostro sistema è persino possibile costruire "due estremi di un cerchio" che possano rispettare la condizione di equivalenza oggettuale ma non di identità. Quello che si genera è, a tutti gli effetti, un ciclo e il multiinsieme ciclico definito in **2.43** è proprio la struttura che ne caratterizza l'esempio maggiore. Vedremo nella sezione **3.3** che questa particolarità della struttura è possibile riscontrarla anche in alcuni modelli già esistenti in letteratura.

Osservazione 2.18 – L'intera struttura è stata costruita utilizzando una notazione di appartenenza molto meno restrittiva di quella utilizzata da Blizard e, in generale, dalla teoria degli insiemi standard: si è infatti supposto in partenza che la relazione $\in$ riesca a identificare e distinguere le diverse occorrenze di un elemento di E. Occorrerebbe, dunque, proporre un'alternativa che tenga conto della distinguibilità tra elementi in equivalenza oggettuale. Questa conferirebbe alla struttura un superamento del limite logico posto dalla terminologia comune.

"È la nuova luce del giorno,

Che giace a nostra priori.

È la vieta oscurità della notte

Che s'appresta all'indomani."

Capitolo 3

La filosofia dei multiinsiemi

Nei capitoli precedenti i multiinsiemi sono stati introdotti e studiati dal punto di vista formale come strutture capaci di rappresentare e registrare la presenza multipla di uno stesso elemento all'interno di una collezione. Tuttavia, l'introduzione della nozione di molteplicità di un elemento in una struttura solleva immediatamente una questione concettuale più profonda, che non può essere affrontata esclusivamente sul piano tecnico: che cosa significa affermare che più occorrenze appartengono allo *stesso* elemento?

Nella teoria degli insiemi tradizionale tale problema rimane del tutto invisibile, poiché l'identità degli elementi è assunta come nozione primitiva: due oggetti sono identici semplicemente quando coincidono; l'uguaglianza costituisce, invece, il fondamento su cui si costruiscono le restanti nozioni teoriche. Nei multiinsiemi, al contrario, la presenza simultanea di più occorrenze, talvolta trattate come indistinguibili, rende meno immediata questa assunzione: il conteggio sembra precedere l'identificazione e, in riferimento a SdM, l'unità dell'elemento non appare più come un dato originario, bensì come il risultato di un processo di riconoscimento. Questa inversione concettuale suggerisce che il passaggio dagli insiemi ai multiinsiemi non rappresenti soltanto un'estensione tecnica, ma implichi una revisione del ruolo stesso dell'identità all'interno della descrizione matematica. In particolare, la distinzione tra livello delle occorrenze e livello degli elementi introduce una stratificazione che invita a interrogarsi sul rapporto tra unità e molteplicità, tra uguaglianza formale e identificazione concettuale. L'elemento del multiinsieme può allora essere interpretato non come entità primitiva, ma come esito di un'operazione che unifica una pluralità originaria.

Alla luce di queste considerazioni, il presente capitolo si propone di chiarire gli aspetti filosofici sia impliciti nella struttura complessa caratterizzante la teoria dei multiinsiemi che nella costruzione sviluppata nella sezione **2.4**. Non cercheremo, pertanto, di fornire una ricostruzione storica sistematica delle principali dottrine filosofiche né di effettuare un'indagine speculativa su concetti troppo astratti. La riflessione filosofica viene difatti introdotta come strumento di chiarificazione teorica, volto a rendere esplicite alcune assunzioni che, pur operando implicitamente nella formalizzazione matematica, meritano di essere analizzate separatamente.

Rispettando queste scelte, il capitolo è articolato in tre momenti principali. Nella prima sezione verrà esaminata la distinzione tra uguaglianza e identità, mostrando come la nozione classica di identità logica risulti insufficiente a descrivere strutture nelle quali la molteplicità delle occorrenze precede l'individuazione degli elementi. Tale analisi condurrà all'idea di *identità emergente*, secondo cui l'unità dell'elemento deriva da un processo di identificazione piuttosto che da una proprietà primitiva.

Affronteremo, successivamente, il problema filosofico dell'unità e della molteplicità, reinterpretandolo alla luce della struttura dei multiinsiemi. In questo contesto verrà discussa la relazione tra molteplicità originaria e costituzione dell'unità, evidenziando come l'oggetto possa essere concepito come risultato di una sintesi che organizza una pluralità di occorrenze entro una forma unitaria.

Infine, la terza sezione prenderà in esame alcuni modelli concettuali e analogie interpretative già presenti nella letteratura con lo scopo di rendere intuitiva la distinzione tra livelli descrittivi differenti e di mostrare come l'identità possa dipendere dalle regole di identificazione adottate all'interno di un determinato quadro teorico: si proporrà dunque una reinterpretazione di alcune strutture conosciute mediante una visione prettamente multiinsiemistica. Lo scopo di questa breve sezione non sarà quello di introdurre nuove costruzioni teoriche, ma di mostrare come tali strutture possano essere rilette come manifestazioni di differenti livelli di individuazione e identificazione, rendendo esplicita una dinamica tra unità e molteplicità che la formalizzazione multiinsiemistica consente di descrivere con maggiore precisione.

Nel complesso, il capitolo intende mostrare come i multiinsiemi possano non rappresentare soltanto una generalizzazione tecnica della teoria degli insiemi, ma che è anche possibile vederli sotto una luce diversa. Per esempio, l'identità degli elementi può così a tutti gli effetti letta come fenomeno strutturale dipendente dal livello descrittivo adottato, anticipando il ruolo centrale che tale dipendenza assumerà nelle sezioni seguenti.

3.1 Uguaglianza e identità

La nozione di identità è stata soggetto di studio per anni sia nella filosofia classica che in termini matematici. Nella sua concezione più astratta, essa viene generalmente assunta come relazione primitiva, espressa dal simbolo di uguaglianza e regolata dal principio di sostituibilità: se due oggetti sono identici, allora possono essere scambiati in ogni contesto senza alterare il valore di verità delle proposizioni considerate. Tale concezione, apparentemente ovvia, nasconde tuttavia una complessità concettuale che emerge non appena ci si interroga sul rapporto tra identità e individuazione degli oggetti.

Una formulazione classica del problema dell'identità si trova nel principio leibniziano dell'indiscernibilità degli identici (*principium identitatis indiscernibilium*), secondo cui due entità che condividono tutte le stesse proprietà devono essere considerate una sola e medesima cosa. Secondo quest'idea, dunque, l'identità è una relazione che risulta interamente determinata dall'insieme delle proprietà attribuibili agli oggetti. L'individualità coincide perciò con la completa determinazione qualitativa: non possono esistere due oggetti distinti perfettamente indistinguibili sotto ogni aspetto.

All'interno della teoria degli insiemi, tale principio appare perfettamente naturale. Gli elementi di un insieme non possiedono struttura interna che sia in alcun modo rilevante; essi sono individuati unicamente attraverso l'uguaglianza. Di conseguenza, la possibilità di distinguere elementi diversi presuppone sempre l'esistenza di qualche proprietà o relazione che li differenzi. Il conteggio stesso si fonda implicitamente su questa assunzione: enumerare significa contare oggetti già individuati.

Tuttavia, proprio questa identificazione tra identità e indiscernibilità solleva difficoltà non appena si considerano strutture nelle quali la molteplicità non deriva dalla differenza qualitativa tra oggetti, ma dalla coesistenza di più occorrenze formalmente indistinguibili. In tali contesti, il principio leibniziano perde parte della sua evidenza intuitiva, poiché la distinzione numerica non coincide più con una distinzione descrittiva.

Una riflessione più attenta sul tema dell'identità si trova nelle opere di G. Frege, per il quale l'uguaglianza non è un semplice fatto ovvio, ma un vero problema logico. Con la distinzione tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*), Frege fa notare che due espressioni possono riferirsi allo stesso oggetto anche se lo presentano in maniera diversa. Proprio per questo, un'affermazione di identità non è sempre qualcosa di banale: può dirci qualcosa di nuovo, perché mette in luce che due modi diversi di pensare un oggetto rimandano in realtà allo stesso referente. In questo caso, abbiamo già una distinzione importante tra l'identità di un oggetto e il modo in cui quell'oggetto viene individuato. L'identità, quindi, non è sempre qualcosa che si mostra da sé in modo immediato, ma può emergere attraverso un confronto tra rappresentazioni differenti. Da questo punto di vista, essa non sembra essere solo una proprietà dell'oggetto, ma anche il risultato di un lavoro teorico che porta a riconoscere come identiche presentazioni diverse dello stesso ente.

La prospettiva fregeana evidenzia quindi un aspetto cruciale: l'uguaglianza formale non esaurisce il problema dell'identità. Se da un lato la logica richiede una relazione di identità ben definita, dall'altro il processo mediante cui gli oggetti vengono individuati rimane concettualmente distinto dalla semplice applicazione del simbolo "=". Questa tensione diventa particolarmente significativa quando si considerano strutture matematiche nelle quali l'individuazione degli elementi non precede, ma segue la descrizione delle relazioni che li coinvolgono.

Le considerazioni precedenti suggeriscono dunque che l'identità, pur operando come fondamento formale della matematica classica, possa non costituire necessariamente il livello concettuale più originario. La distinzione tra uguaglianza e processo di identificazione consente di considerare strutture nelle quali l'unità dell'elemento non è assunta a priori, ma risulta dalla struttura stessa: essa può emergere a partire da una pluralità inizialmente non del tutto determinata e definisce una nuova corrispondenza che si distacca dalla classica nozione "identificazione → identità/uguaglianza", una situazione che verrà esaminata nel seguito sia attraverso le teorie di Parker-Rhodes che distinguono tra identità e indistinguibilità (si veda in merito la sezione **3.1.1**), sia attraverso una formulazione esplicita sulla struttura dei multiinsiemi definita nel Capitolo **2.4**.

Le difficoltà emerse nel confronto tra la concezione leibniziana dell'identità e l'analisi logica fregeana suggeriscono che l'uguaglianza formale, pur indispensabile alla costruzione matematica, non esaurisce il problema dell'identificazione degli oggetti. In particolare, entrambe le prospettive presuppongono implicitamente che gli elementi su cui opera la relazione di identità siano già determinati come individui. Rimane tuttavia aperta la questione se tale individuazione debba necessariamente precedere la struttura matematica oppure possa dipendere da essa.

Un'ideologia differente si osserva in alcuni approcci contemporanei che attribuiscono un ruolo primario alle relazioni rispetto agli oggetti considerati isolatamente. In tale contesto, l'identità non viene interpretata come proprietà intrinseca di entità già date, ma come risultato delle relazioni che esse intrattengono all'interno di una configurazione strutturale. Tra questi approcci si colloca la proposta, già più volte analizzata, di Wildberger, nella quale l'attenzione è rivolta alla distinguibilità operativa degli oggetti matematici e al ruolo delle relazioni nella loro individuazione.

Secondo questa ideologia, parlare di identità significa specificare le condizioni sotto le quali due entità possono essere trattate come lo stesso oggetto all'interno di una determinata teoria; l'accento si sposta così dalla nozione assoluta di uguaglianza alla descrizione delle relazioni che rendono possibile il riconoscimento degli elementi. L'identità assume quindi un carattere essenzialmente relazionale: ciò che conta non è un'essenza indipendente dell'oggetto, ma la posizione che esso occupa nella struttura considerata e, più specificamente, la sua natura prestabilita. Un simile cambiamento concettuale risulta particolarmente significativo quando si analizzano strutture nelle quali più entità condividono le medesime proprietà descrittive. In tali situazioni, la distinzione numerica non può essere fondata su differenze qualitative, ma dipende esclusivamente dal ruolo strutturale o dalla modalità con cui le entità partecipano alla configurazione complessiva. L'identità appare dunque legata alle regole interne della teoria piuttosto che a caratteristiche intrinseche degli *oggetti*.

Questa osservazione prepara naturalmente il passaggio a contesti nei quali la molteplicità precede l'identificazione. Nei multiinsiemi, infatti, la presenza simultanea di più occorrenze associate a uno stesso elemento rende esplicita una situazione già implicitamente problematica nella matematica classica: come osservato prima, il conteggio può avvenire prima che sia stabilita un'identità pienamente determinata. Le occorrenze contribuiscono alla struttura quantitativa pur non essendo necessariamente distinguibili attraverso proprietà interne.

Da quanto si può enucleare dalla struttura costruita nella sezione **2.4** e da come abbiamo dedotto pochi paragrafi prima, l'uguaglianza tra elementi può essere interpretata come il risultato di un processo di identificazione che opera su una pluralità originaria di occorrenze. L'elemento del multiinsieme non rappresenta quindi un'entità primitiva, ma l'esito di un'operazione che rende equivalenti configurazioni inizialmente distinte sotto un livello descrittivo più fine. Ciò conduce a una concezione dell'identità che può essere definita ***emergente***, nel senso che essa deriva dalla struttura relazionale e dalle regole di identificazione adottate, anziché costituire un presupposto assoluto della teoria.

In tale prospettiva, la distinzione tra uguaglianza formale e processo di identificazione diventa essenziale. L'uguaglianza esprime una relazione definita a livello degli elementi già costituiti e che caratterizzano lo spazio delle manifestazioni, mentre l'identità emerge dal passaggio tra differenti livelli descrittivi della stessa struttura, una struttura che stabilisce le sue stesse condizioni per garantire l'integrità matematica delle *manifestazioni*. Essa è l'esito di una scelta, della stabilità della struttura e delle sue necessità. In generale, la matematica dei multiinsiemi rende esplicita questa peculiarità, mostrando come la nozione di elemento richieda una distinzione tra uguaglianza formale e criteri di identificazione. La natura del passaggio tra molteplicità ad unità verrà analizzata nella sezione **3.2**.

Le considerazioni precedenti indicano dunque che l'identità, lungi dall'essere una nozione puramente primitiva, può essere compresa come fenomeno strutturale dipendente dal quadro relazionale adottato. Tale idea trova una formulazione particolarmente esplicita nella teoria degli indistinguibili proposta da Parker-Rhodes, alla quale sarà dedicato il paragrafo seguente: in essa la separazione tra identità, distinguibilità ed equivalenza viene formalizzata in modo sistematico.

3.1.1 Una parentesi su Parker-Rhodes

Una formulazione esplicita della distinzione tra identità, diversità e indistinguibilità compare nell'opera *The Theory of Indistinguishables* di Parker-Rhodes (1981), un'opera di stampo prettamente fisico, il cui impianto teorico costituisce uno dei riferimenti concettuali alla base di successive riflessioni sulla natura relazionale dell'identità matematica. In particolare, l'attenzione posta da Wildberger sul ruolo delle relazioni e sulla distinguibilità operativa degli oggetti trova una delle sue radici proprio nell'approccio sviluppato da Parker-Rhodes.

La teoria degli indistinguibili nasce dall'osservazione che la matematica classica dispone essenzialmente di due sole relazioni fondamentali tra oggetti: identità e distinzione. Parker-Rhodes propone invece l'introduzione di una terza relazione, destinata a descrivere entità che non possono essere distinte attraverso le proprietà disponibili pur contribuendo separatamente alla struttura complessiva. In questo contesto, l'autore introduce una nozione di equivalenza contestuale, affermando che

> "Two objects, whether material or mathematical, are said to be equivalent if they can constistently be treated in one context as identical, and in another as distinct."
>
> (Parker-Rhodes, A.F., *The Theory of Indistinguishables*, D. Reidel, Dordrecht, 1981, pag. 4)

Questa formulazione evidenzia come l'identità non debba necessariamente essere interpretata come proprietà assoluta degli oggetti, ma possa dipendere dal quadro descrittivo entro cui essi vengono considerati. Due entità possono quindi comportarsi come identiche rispetto a determinate operazioni pur rimanendo distinguibili sotto altri aspetti. L'equivalenza non coincide pertanto con l'identità, ma rappresenta una relazione intermedia che rende esplicita la dipendenza dell'individuazione dal contesto strutturale.

All'interno della teoria, gli indistinguibili (definiti *twins*, 'gemelli') contribuiscono alla cardinalità delle configurazioni senza essere individualmente distinguibili mediante proprietà intrinseche. La distinzione osservabile emerge così solo a un livello descrittivo successivo, suggerendo che le differenze tra oggetti possano dipendere dal modo in cui l'informazione viene organizzata piuttosto che da caratteristiche originarie degli elementi stessi. L'identità appare quindi collegata alle regole attraverso cui una teoria stabilisce quando oggetti diversi debbano essere trattati come uno stesso ente.

Questa impostazione risulta particolarmente rilevante nel contesto dei multiinsiemi, anche se questi ultimi non vengono esplicitamente trattati dall'autore. In tali strutture, infatti, più occorrenze possono contribuire quantitativamente alla stessa configurazione pur non essendo distinguibili attraverso proprietà interne. Anticipando la prossima sezione, possiamo affermare che la distinzione tra uguaglianza e identificazione, già emersa nella discussione precedente, trova adesso una formulazione matematica più stabile: ciò che viene considerato "lo stesso elemento" dipende dalle regole mediante cui una pluralità di occorrenze viene trattata unitariamente a livello oggettuale. Le stesse regole che, d'altronde, vengono in risposta alla domanda più naturale che può sorgere alla luce di quanto argomentato: "Che cosa *preserva* l'identità di un oggetto o di un elemento in un multiinsieme?"

Per riassumere, le ideologie esaminate mostrano come la nozione di identità, pur assumendo un ruolo fondamentale nella matematica classica, non possa essere considerata un presupposto concettuale indiscusso. Il principio leibniziano dell'indiscernibilità evidenzia il legame tra identità e proprietà descrittive, mentre l'analisi fregeana mette in luce la distinzione tra uguaglianza formale e modalità di individuazione degli oggetti. Gli approcci relazionali contemporanei, tra cui la prospettiva di Wildberger e la teoria degli indistinguibili di Parker-Rhodes, rendono esplicita la possibilità che l'identità dipenda dal quadro strutturale entro cui gli oggetti vengono considerati, introducendo relazioni che non si riducono alla semplice alternativa tra identità e distinzione. Nel complesso, queste considerazioni suggeriscono che l'uguaglianza formale non esaurisce il problema dell'identità matematica. L'unità dell'oggetto può infatti risultare legata ai criteri attraverso cui una teoria stabilisce quando una pluralità di entità debba essere trattata come una sola. Nel presente lavoro tale idea è stata assunta come punto di partenza concettuale e riformulata nella nozione di *identità emergente*, intesa come esito di un processo di identificazione dipendente dal livello descrittivo adottato.

3.2 Il problema dell'unità e della molteplicità

Le considerazioni sviluppate nel paragrafo precedente conducono a una questione più generale, che addirittura precede storicamente lo sviluppo dell'identità matematica: il rapporto tra unità e molteplicità. Se in alcune strutture l'identità non può essere assunta come nozione primitiva, ma dipende dal contesto e dai criteri attraverso cui una teoria identifica i propri oggetti, diventa necessario interrogarsi sull'origine stessa dell'unità, magari a partire da una pluralità assunta come iniziale.

Il problema dell'unità e della molteplicità, già al centro della riflessione filosofica classica, può essere riformulato in termini strutturali attraverso la domanda su come una molteplicità di entità o manifestazioni possa essere trattata come un'unica realtà teorica. In ambito matematico, tale questione rimane spesso implicita, poiché gli oggetti vengono introdotti come già individuati; tuttavia, le strutture analizzate nel contesto dei multiinsiemi rendono esplicita la necessità di distinguere tra il livello in cui compare la molteplicità e quello in cui emerge l'unità dell'elemento. In questo modo, l'unità non viene interpretata come proprietà originaria degli oggetti, ma come risultato di un processo di *sintesi* kantiana (nel senso di una sintesi che unifica una molteplicità) che organizza una pluralità di occorrenze entro una descrizione comune. L'oggetto appare quindi come stabilizzazione teorica di una struttura più fine, nella quale la molteplicità costituisce il livello primario della descrizione. La struttura multiinsiemistica definita nella sezione **2.4** rende particolarmente trasparente questo meccanismo, poiché distingue esplicitamente tra le occorrenze che contribuiscono alla struttura e l'elemento unitario attraverso cui esse vengono rappresentate. In essa il passaggio dalla molteplicità all'unità vieni difatti interpretato come un processo di identificazione che unifica una pluralità di manifestazioni sotto un'unica entità teorica, rendendo, dunque, esplicito ciò che nella matematica classica rimane generalmente implicito.

Pertanto, il problema dell'unità e della molteplicità può essere reinterpretato, in termini contemporanei, come una tensione tra due esigenze apparentemente opposte della descrizione matematica. Da un lato, ogni teoria richiede oggetti ben determinati, rispetto ai quali possano essere definite relazioni, operazioni e proprietà; dall'altro, molte delle strutture matematiche osservate sembrano originarsi da configurazioni nelle quali la molteplicità precede qualsiasi individuazione completa degli elementi. Come già anticipato, la matematica classica tende a risolvere questa tensione assumendo implicitamente l'unità come dato iniziale, trattando gli oggetti come già individuati, ancor prima dell'introduzione delle relazioni che li collegano.

Perciò, il fatto che una pluralità di entità possa essere trattata come composta da oggetti distinti e identificabili dipende dai criteri attraverso cui la teoria stabilisce cosa debba contare come un elemento e dalle relazioni che intercorrono fra questi. In altre parole, l'unità dell'oggetto non coincide necessariamente con il punto di partenza della descrizione, ma può risultare dalla modalità con cui una struttura viene osservata, rappresentata, organizzata o addirittura catalogata. Ed ecco che il passaggio accennato nelle righe precedenti e nella sezione **3.1.1** può essere descritto, in termini generali, come la scelta (esplicita o implicita) di un *criterio di identificazione*: una regola che stabilisce quando una pluralità di entità debba essere trattata come una sola unità teorica. In questo senso, l'unità dell'oggetto non coincide con un dato "originario", ma con ciò che una teoria decide di preservare come informazione essenziale, e con ciò che invece viene trascurato nel passaggio a un livello descrittivo più astratto. Comprendere tale passaggio significa chiarire in che modo una teoria matematica stabilisca quando una pluralità di entità debba essere trattata come una sola e, quindi, in che senso l'identità possa essere considerata il risultato di una costruzione piuttosto che un presupposto originario.

Questo criterio, infatti, diventa particolarmente evidente quando si considera il ruolo dei livelli descrittivi, come accade ad esempio in SdM. Una stessa configurazione può infatti essere analizzata secondo gradi differenti di granularità: ciò che a un livello appare come una molteplicità di occorrenze distinte può essere trattato, a un livello più astratto, come manifestazione ripetuta di un unico elemento. Il passaggio tra tali livelli comporta una trasformazione del modo in cui la teoria organizza l'informazione disponibile che, in ambito matematico, rimane spesso tacita, poiché le strutture vengono presentate direttamente nel loro livello più astratto. In particolare, le strutture multiinsiemistiche osservate mostrano come il conteggio e la composizione possano dipendere da una pluralità di contributi che non richiedono necessariamente una distinzione qualitativa tra gli elementi coinvolti. In questo senso, il problema dell'unità e della molteplicità può essere riformulato come il problema del rapporto tra livelli strutturali: da un lato un livello nel quale la molteplicità è, come già analizzato, primaria, che essa sia definita a priori o dalla struttura, dall'altro un livello nel quale emerge l'unità dell'oggetto attraverso un processo di sintesi teorica. In SdM questo concetto è piuttosto chiaro: la molteplicità è intrinseca nella natura dell'*oggetto* unitario e le *manifestazioni* attivate dalla *sostanza* ne sono una semplice e inevitabile conseguenza. Ciò suggerisce, infine, che la relazione tra molteplicità e unità non debba essere interpretata come "opposizione", ma come relazione tra differenti modalità di descrizione della stessa realtà matematica.

È opportuno, inoltre, precisare che la distinzione tra occorrenze non viene eliminata nel processo di identificazione. In SdM, essa è espressa attraverso la relazione "$\sim$" definita esclusivamente tra elementi appartenenti a uno stesso multiinsieme. Tale relazione consente di registrare la distinzione tra occorrenze che, pur contribuendo alla costituzione di un medesimo elemento a livello superiore, rimangono differenziate nel livello descrittivo più fine.

Per concludere questa sezione, sottolineiamo ciò che è stato detto finora: l'unità può non rappresentare un punto di partenza ontologico, ma il risultato di una selezione strutturale dell'informazione; ciò che viene riconosciuto come "lo stesso" dipende dal tipo di descrizione che la teoria rende possibile. Le strutture matematiche affini alla costruzione di SdM rendono particolarmente evidente questa dinamica: esse mostrano che la determinazione quantitativa di una configurazione può precedere l'individuazione completa degli elementi che la compongono, suggerendo che il conteggio non richieda necessariamente identità primitive, ma solo regole coerenti di identificazione e di distinzione. Ed è in questo modo che l'unità emerge come stabilizzazione teorica di una pluralità di contributi, piuttosto che come proprietà originaria degli oggetti considerati (in quest'ottica diventa anche possibile chiarire il senso della nozione di identità emergente già anticipata nella sezione **3.1)**. L'uguaglianza matematica opera così su oggetti già costituiti mediante tale processo, rendendo esplicite le condizioni strutturali della loro individuazione.

3.2.1 *Oggetto* e *manifestazioni* da un punto di vista pratico

Nei precedenti paragrafi abbiamo visto come alcune implicazioni filosofiche della teoria dei multiinsiemi possano essere accostate, per analogia concettuale, a determinate posizioni della tradizione filosofica: per esempio, alle riflessioni di Kant, di Leibniz e di Frege. In continuità con questi parallelismi è doveroso considerare anche il punto di vista di Edmund Husserl, che sarà il fulcro di questa sezione e il cui pensiero affronta in maniera esplicita il rapporto tra unità e molteplicità nell'esperienza degli oggetti. Il pensiero di Husserl e della sua *filosofia fenomenologica*, infatti, si pongono preponderanti in questo tema: il concetto di identità stabile che unifica una molteplicità di apparizioni percettive è difatti uno dei punti focali della sua opera *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie* (lett. 'Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica') pubblicata nel 1913. In essa, Husserl ripropone su un piano più pratico (e, per l'appunto, fenomenologico) tutto ciò che abbiamo analizzato nelle sezioni precedenti.

In termini fenomenologici, per Husserl l'oggetto identico non è dato immediatamente come unità originaria, ma si costituisce come unità attraverso una molteplicità di apparizioni prospettiche. Difatti, egli afferma che:

> "The regional idea of the physical thing, its identical X with its determining sense-content, posited as existing, prescribes rules governing the multiplicities of appearances. That means: there are no multiplicities whatever which accidentally come together, which already follows from the fact that, in themselves, purely essentially, they have a relationship to the physical thing, the determined physical thing. […] Something such as a physical thing in space is only intuitable by means of appearances in which it is and must be given in multiple but determined changing 'perspective' modes."
>
> (Husserl, E., *Ideas pertaining to a pure Phenomenology and to a phenomenological Philosphy*, tradotto da F. Kersten, Volume II, The Hague, Martinus Nijhoff, 1983.)

Sostanzialmente, l'identità di un oggetto coincide quindi con la sintesi che unifica una serie potenzialmente infinita di manifestazioni. Per Husserl un qualsiasi oggetto percepito, lo percepiamo attraverso una delle sue molteplici apparizioni: la molteplicità presente nel flusso delle percezioni è strutturata in modo da riferirsi alla medesima unità. In altre parole, il pensiero husserliano afferma che una molteplicità di percezioni stabilisce una singola unità nel flusso percettivo con quest'ultima che afferma in maniera definitiva una identità sull'oggetto (il citato 'Identical X'). In questo senso, la molteplicità delle percezioni non costituisce una semplice successione casuale di immagini, ma una struttura organizzata che rimanda costantemente alla medesima unità intenzionale. Un esempio semplice può essere quello di un bicchiere di vetro: quest'ultimo è un oggetto che può essere osservato da prospettive differenti (dall'alto o dal basso), da distanze diverse o da osservatori distinti, ma ciascuna di queste apparizioni viene ricondotta alla stessa identità dell'oggetto percepito che esso possedeva inizialmente. La molteplicità delle manifestazioni è data, dunque, dalle possibili osservazioni che si possono effettuare su di esso.

Per questo motivo, il fatto che l'unità dell'oggetto non coincida con una singola manifestazione ma con il principio che consente di ricondurre una molteplicità di manifestazioni a una medesima identità è una posizione che presenta una notevole affinità con il problema discusso precedentemente.

> Whereas the physical thing is the intentional unity, the physical thing intended to as identical and unitary in the continuously regular flow of perceptual multiplicities which interpenetrate and change into one another, the perceptual multiplicities themselves always have their determinate descriptional composition essentially coordinated with that unity.
>
> (*Ibidem*)

L'unità in Husserl però, è sintetizzata dalla coscienza delle nostre percezioni e delle nostre esperienze, mentre l'identità non è come nel nostro caso un concetto emergente da un'organizzazione strutturale che ne stabilisce le sue regole e nelle quali regole è volto a reintegrarsi. Volendo fare un parallelo con SdM, abbiamo la struttura matematica da un lato e una coscienza sintetica dall'altro; la prima pone un'identificazione strutturale, l'altra una costituzione fenomenologica; nella prima si sviluppa un concetto di identità emergente mentre nella seconda l'identità è costitutiva.

3.3 Modelli concettuali per SdM

Le analisi sviluppate nei paragrafi precedenti hanno mostrato come la nozione di identità possa essere interpretata come fenomeno dipendente dal livello descrittivo adottato e dalle regole di identificazione che strutturano la molteplicità. Il presente paragrafo non introduce ulteriori assunzioni teoriche, ma si propone di rendere più trasparente tale dinamica attraverso l'esame di alcuni modelli concettuali presenti nella letteratura e reinterpretarli attraverso una chiave di lettura multiinsemistica, evidenziando il ruolo del passaggio tra molteplicità e unità e la dipendenza dell'identità dalle condizioni strutturali adottate, nonché della stratificazione fondamentale del modello in più definizioni: l'insieme delle sostanze, l'insieme degli oggetti e il multiinsieme delle manifestazioni. In questo senso, i modelli discussi fungeranno da strumenti interpretativi, capaci di rendere intuitiva una distinzione che è già stata esplicitata e setacciata nei capitoli precedenti, mostrando come in natura o in letteratura non è affatto raro trovare modelli esemplificativi di SdM.

3.3.1 Modelli ciclici della cosmologia

Un'analogia strutturale molto significativa di SdM, nonché una possibile rilettura (nel senso generico del termine) piuttosto rilevante, può essere osservata nelle teorie cosmologiche dell'*universo oscillante*. In questa prospettiva cosmologica l'universo non viene pensato come processo unico o lineare ma come una successione di cicli distinti, in cui la terminazione di uno rappresenta l'inizio di un altro. Ciò che rende interessanti questi modelli, nel presente contesto, non è tanto la loro specifica validità fisica, quanto la possibilità di leggere la successione dei cicli come una pluralità di configurazioni e, dunque, manifestazioni ricondotte a una continuità strutturale di ordine superiore. In questo senso, il modello oscillante suggerisce che l'unità non debba essere intesa come permanenza di un medesimo stato, ma come ricorrenza di una struttura (ordinata su più strati) attraverso manifestazioni differenti.

Analizziamo ora un caso particolare di queste teorie, senza entrare nei dettagli tecnici e nelle particolari proprietà fisiche e cosmologiche che la costituiscono: la CCC. La CCC (Cosmologia Ciclica Conforme) è un modello teorico proposto da R. Penrose a partire dal 2001 la cui peculiarità rispetto agli altri modelli ciclici risiede nell'idea che l'universo sia in una progressiva ed infinita espansione e che dunque non alterni fasi di estensione e contrazione. Nella CCC l'universo attraversa una serie di cicli infiniti (definiti *eoni* da Penrose) in ognuno dei quali l'universo è caratterizzato da una fase iniziale estremamente densa ed una finale asintoticamente illimitata. Il punto decisivo, sul piano concettuale, è che il passaggio tra un eone e il successivo non viene pensato come semplice ripetizione identica, ma come continuità di una forma globale che si conserva pur attraverso configurazioni cosmiche diverse. Essa può essere reinterpretata in SdM come una configurazione nella quale una pluralità di cicli (o manifestazioni) viene letta attraverso un criterio di identificazione strutturale, rendendo possibile una lettura multiinsiemistica sul rapporto tra le sue occorrenze e l'unità sostanziale (e oggettuale): dall'insieme degli oggetti (che può essere rappresentato dall'insieme degli oggetti teorici identificabili) all'insieme delle manifestazioni (gli eoni) è possibile costruire una infinità di multiinsiemi ciclici su cui l'origine e gli estremi sono ben definiti.

3.3.2 Paradossi dualistici

Nella logica proposizionale e nella teoria degli insiemi non è difficile riscontrare fallacie, antinomie e situazioni paradossali divenuti celebri per l'importanza dei dilemmi filosofici e per le sfide teoriche che essi pongono. Queste situazioni sono state, nel corso degli anni, oggetto di studi da parte di numerosi autori, tutti con l'obiettivo di individuare sistemi capaci di superare o evitare le contraddizioni che si generano dalle assunzioni. Si pensi, ad esempio, al paradosso del barbiere di B. Russell o in egual modo al paradosso di Burali-Forti la cui analisi approfondita ha contribuito al superamento della teoria ingenua di Cantor e allo sviluppo di approcci assiomatici più rigorosi.

In questa sezione analizzeremo, invece, una tipologia di paradossi semantici molto più classica: la classe dei paradossi dualistici. Questa tipologia di paradossi sorge tipicamente da una incompatibilità tra le premesse di un'inferenza logica, nella quale due proprietà vengono assunte come assolute e reciprocamente esclusive. Un esempio particolarmente indicativo è il *Paradosso della lancia e dello scudo*, che pone la seguente domanda: "Cosa accadrebbe se una lancia inarrestabile si scagliasse contro uno scudo impenetrabile?". Una prima risposta logica e intuitiva mostrerebbe che sorge una contraddizione in merito all'inadeguatezza delle premesse: se indichiamo con A l'oggetto *lancia inarrestabile* e con B l'oggetto *scudo impenetrabile* allora la sola esistenza di A negherebbe a priori quella di B: $A \to \neg B$ (e viceversa), poiché non potrebbe sussistere la prima se esistesse la seconda e dunque una qualsiasi conseguenza diventerebbe inevitabilmente contraddittoria.

Tuttavia, questa forma di paradosso presuppone implicitamente che le proprietà coinvolte siano attribuite a oggetti concepiti come unità primitive e rigidamente determinate. Nel contesto della struttura sviluppata in questo lavoro, tale assunzione viene meno. Cosa accadrebbe, dunque, se invece di identificare con A e B i due oggetti distinti, indicassimo con A la proprietà di un oggetto di essere inarrestabile e con B la proprietà di un oggetto di essere impenetrabile? A livello logico non cambierebbe nulla, ma abbiamo visto che nel nostro sistema è possibile identificare ogni elemento in un suo oggetto. In poche parole, un qualsiasi tipo di paradosso dualistico può essere riformulato in modo consistente con SdM per equivalenza oggettuale. In particolare, risulta possibile distinguere tra le diverse manifestazioni di un medesimo oggetto senza rinunciare alla sua unità teorica.

In questa prospettiva, un paradosso dualistico non conduce necessariamente a una contraddizione, ma segnala piuttosto un'incongruenza sotto un punto di vista concettuale ancor più che semantico. Le proprietà in gioco possono infatti essere riferite a differenti manifestazioni dello stesso oggetto, evitando così l'imposizione di condizioni incompatibili su una singola entità considerata in modo rigido. La distinzione tra livello delle occorrenze e livello dell'elemento consente quindi di reinterpretare il conflitto apparente come effetto di una identificazione eccessivamente restrittiva.

Precisiamo che così agendo non stiamo risolvendo il paradosso in senso semantico, ma mostrando che esso dipende da un'ipotesi implicita che identifichi in modo rigido l'unità identitaria di un oggetto e che nel nostro sistema si risolve a livello descrittivo in quanto dipendente dal criterio di identificazione adottato e dalle differenti condizioni sull'identità e sull'equivalenza oggettuale. Si può allora affermare che, all'interno di SdM, i paradossi dualistici non vengono semplicemente risolti nel senso classico del termine, ma dissolti mediante una riformulazione strutturale del problema: la contraddizione non nasce dalla natura degli oggetti, bensì dalla modalità con cui essi vengono individuati. Modificando tale modalità, ovvero distinguendo tra sostanze, manifestazioni e oggetti, il paradosso perde la propria forza, rivelandosi come un limite della rappresentazione piuttosto che come una reale inconsistenza logica.

Conclusioni

Il presente lavoro ha affrontato lo studio dei multiinsiemi con l'obiettivo di condurre un'analisi critica e di ricerca dei principali temi e delle principali caratteristiche inerenti al concetto di multiinsieme, nonché quello di proporre una riformulazione strutturale della sua nozione principale che la immagina non più soltanto come una semplice generalizzazione della teoria classica degli insiemi, ma come una configurazione capace di rendere esplicita una dinamica più profonda tra diversi concetti quali, ad esempio, molteplicità e unità. Nei capitoli iniziali sono state esaminate le principali formalizzazioni della teoria dei multiinsiemi, mettendone in evidenza punti di forza, limiti e presupposti impliciti. Tale analisi ha permesso di individuare la necessità di una formulazione capace di distinguere in modo rigoroso tra livello delle occorrenze e livello degli elementi, evitando di assumere l'identità come dato primitivo.

A partire da queste considerazioni è stata proposta una struttura generativa nella quale la molteplicità non è trattata come semplice funzione di conteggio, ma come esito di una dinamica definita su un livello più fine. In tale quadro, i processi attinenti a SdM consentono di descrivere il multiinsieme come risultato di un processo di organizzazione strutturale, nel quale l'elemento emerge dalla pluralità delle sue manifestazioni. La relazione definita tra le occorrenze, distinta dalla relazione di uguaglianza, rende esplicita la coesistenza di distinzione interna e unità oggettuale, chiarendo formalmente una situazione che nella teoria degli insiemi classica rimane implicita.

Il contributo principale della tesi consiste dunque nell'aver articolato una descrizione dei multiinsiemi in cui la molteplicità precede l'identificazione, e nell'aver mostrato come l'unità dell'elemento possa essere interpretata come risultato di un criterio di identificazione dipendente dal livello strutturale adottato. Tale impostazione non modifica le regole operative della matematica classica, ma ne rende visibili alcuni presupposti, distinguendo tra uguaglianza formale e processo di individuazione. Il capitolo filosofico ha avuto la funzione di esplicitare il significato concettuale di questa costruzione, mettendola in relazione con il problema dell'unità e della molteplicità e con le principali riflessioni sull'identità matematica. In questo contesto, la nozione di identità emergente è stata proposta come interpretazione coerente della dinamica strutturale già formalizzata nei capitoli precedenti: l'identità non è eliminata né sottointesa, ma compresa come fenomeno dipendente dalle regole di organizzazione di una molteplicità definita a priori.

Resta aperta la possibilità di estendere questa impostazione ad altri ambiti della matematica in cui il rapporto tra pluralità e oggetto unitario assume un ruolo centrale. Ulteriori sviluppi potrebbero riguardare l'analisi comparativa con altre teorie scientifiche o l'esplorazione di varianti della struttura generativa proposta. In ogni caso, il percorso sviluppato suggerisce che la teoria dei multiinsiemi possa costituire non soltanto un'estensione tecnica della teoria degli insiemi, ma anche un punto di osservazione privilegiato per interrogare il modo in cui la matematica stabilisce e stabilizza i propri oggetti.

Bibliografia

Alexandru, A., Ciobanu, G., “Generalized Multisets: From ZF to FSM”, *Computing and Informatics*, vol. 34, 2015.

Blizard, W. D., “Multiset Theory”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 30, 1989.

Blizard, W. D., “Real-Valued Multisets and Fuzzy Sets”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 33, 1989.

Blizard, W. D., “The Development of Multiset Theory”, *Modern Logic*, vol. 1, 1991

Chakrabarty, K., Biswas, R., Nanda, S., “Fuzzy Shadows”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 101/3, 1999.

Chakrabarty, K., "On Bags and Fuzzy Bags", *Advances in Soft Computing, Soft Computing Techniques and Applications*, Physica-Verlag, 2000.

Chang, C. C., Keisler, H. J., *Model Theory*, Third Edition, North Holland, Amsterdam, 1990.

Costa, L. da F., “An Introduction to Multisets”, arXiv:2110.12902 [math.GM], 2021.

Dang, H.-V., “A Single-Sorted Theory of Multisets”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 55, 2014.

Dedekind, R., *Essays on the Theory of Numbers*, tradotto da W. W. Beman, Dover, New York, 1963.

Delgado, M., Ruiz, M. D., Sánchez, D., “RL-Bags: A conceptual, level-based approach to fuzzy bags”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 208, 2012.

Dershowitz, H., Manna, Z., “Proving termination with multiset orderings”, *Automata, Languages and Programming* (Sixth Colloquium, Graz), *Lecture Notes in Computer Science 71*, Springer, 1979.

Felisiak, P. A., Qin, K., Li, G., “Generalized Multiset Theory”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 380, 2020.

Frege, G., *The Foundations of Arithmetic*, translated by J. L. Austin, Northwestern University Press, Second Edition, 1980.

Hailperin, T., *Boole's Logic and Probability*, Second Edition, North-Holland, Amsterdam, 1986.

Hickman, J. L., "A note on the concept of multiset," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 22, 1980.

Husserl, E., *Ideas pertaining to a pure Phenomenology and to a phenomenological Philosphy*, tradotto da F. Kersten, Volume II, The Hague: Martinus Nijhoff, 1983.

Jena, S. P., Ghosh, S. K., Tripathy, B. K., “On the theory of bags and lists”, *Information Sciences,* vol. 132, 2001.

Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*, Volume 3, *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*, Volume 2, *Seminumerical Algorithms*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

Lake, J., “Sets, fuzzy sets, multisets and functions”, *Journal of the London Mathematical Society* (2), vol. 12, 1976.

Li, Baowen, “Fuzzy Bags and Applications”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 34, North-Holland, 1990.

Meyer, R. K., McRobbie, M. A., “Multisets and relevant implication I and II”, *Australasian Journal of Philosophy*, vol. 60, 1982.

Monro, G. P., “The concept of multiset”, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 33, 1987.

Parker-Rhodes, A. F., *The Theory of Indistinguishables*, D. Reidel, Dordrecht, 1981.

Singh, D., Ibrahim, A. M., Yohanna, T., Singh, J. N., “A systematization of fundamentals of multisets”, *Lecturas Matemáticas*, vol. 29, 2008.

Syropoulos, A., “Mathematics of Multisets”, in C. S. Calude et al. (Eds.), *Multiset Processing*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2235, pp. 347–358, Springer, 2001.

Wildberger, N. J., “A new look at multisets”, *School of mathematics,* UNSW Sydney 2052, 2003.

Yager, R. R., “On the Theory of Bags”, *International Journal of General Systems*, vol. 13, 1986.