



UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Studio della cooperazione in popolazioni strutturate mediante la teoria dei giochi evolutiva

Relatore

Chiarissimo Prof.
Matteo Cavaliere

Candidato

Roberto Demaio

14/04/2026

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Introduzione	3
Prologo	5
Simbologia	8
1 Teoria dei Giochi	9
1.1 Definizioni di base	9
1.2 Giochi sequenziali	12
1.3 Il gioco del NIM e il teorema di Sprague–Grundy	13
1.4 Giochi simultanei	16
1.5 Un esempio notevole: il p-beauty contest e la razionalità	18
1.6 Analisi delle risposte migliori (best response)	19
1.7 Alcuni esempi notevoli e ulteriori definizioni	21
1.8 Equilibrio perfetto nei sottogiochi (SPE) e Insiemi informativi (Information sets)	23
1.9 Equilibri misti	25
1.10 Giochi ripetuti	28
2 Teoria evolutiva	32
2.1 Impostazione generale	32
2.2 Equilibrio di Nash e strategia evolutivamente stabile (ESS)	34
2.3 Dinamica del replicatore (<i>replicator dynamics</i>)	35
2.4 Esempi notevoli	38
2.5 Dilemma del Prigioniero ripetuto in chiave evolutiva	42
3 Un modello per lo studio della cooperazione in una popolazione fissata	45
3.1 Introduzione e ricerche precedenti nel merito	45
3.2 Descrizione teorica del modello	51
3.3 Descrizione tecnica e implementazione del codice	57
4 Risultati e analisi	65
4.1 Sviluppo analitico e calcolo del numero medio di cooperatori nel caso ad un compartimento	66
4.2 Primo scenario: $b/c = 1.5$	70
4.3 Secondo scenario: $b/c = 20$	75

4.4	Confronto tra i due scenari	80
5	Discussione e applicazioni	82
5.1	Interpretazione generale dei risultati	82
5.2	Ruolo del numero di compartimenti e della località delle interazioni	83
5.3	Ruolo della probabilità di migrazione w	83
5.4	Ruolo della topologia e ipotesi interpretative	84
5.5	Confronto tra i casi $\frac{b}{c} = 1.5$ e $\frac{b}{c} = 20$	85
5.6	Limiti del modello	86
5.7	Applicazioni e sistemi biologici utili come campione	86
5.8	Sviluppi futuri	87
5.9	Dati ottenuti per le analisi nel caso $b/c = 1.5$	89
5.10	Dati ottenuti per le analisi nel caso $b/c = 20$	91
5.11	Codice per la costruzione grafo, <i>update step</i> e stampa dei risultati	92
5.12	Codice per il calcolo diretto della distribuzione stazionaria e numero medio di cooperatori nel lungo periodo	98
	Bibliografia	105

Introduzione

Questo elaborato contiene una trattazione di alcuni elementi fondamentali della Teoria dei Giochi e della sua estensione evolutiva, con l'obiettivo di introdurre strumenti concettuali e computazionali utili a descrivere l'emergere (o la scomparsa) di comportamenti cooperativi in popolazioni di agenti in interazione. Dopo un breve Prologo di inquadramento storico, verrà presentata una pagina di Simbologia nella quale sono raccolte le notazioni impiegate nel seguito, sia per gli aspetti più propriamente matematici (insiemi, relazioni, funzioni) sia per quelli modellistici (strategie, payoff, parametri e variabili di stato). Successivamente, verranno richiamate le nozioni di base della Teoria dei Giochi in forma non evolutiva: si introdurranno i concetti di giocatore, strategia e funzione di payoff, distinguendo tra diverse tipologie di giochi e discutendo i principali criteri di soluzione. In tale contesto verrà dato spazio al concetto di equilibrio - con particolare attenzione all'equilibrio di Nash e ai metodi più comuni per la sua determinazione - e verranno inoltre richiamate la nozione di razionalità sottesa ai modelli classici e l'uso di strategie miste, che completano il quadro teorico necessario per la parte successiva.

Nel capitolo dedicato alla Teoria Evolutiva dei Giochi si passerà a un'impostazione dinamica, nella quale la distribuzione delle strategie in una popolazione varia nel tempo in funzione dei risultati ottenuti nelle interazioni. Verranno discusse le basi di tale approccio e la nozione di stabilità evolutiva, introducendo il concetto di strategia evolutivamente stabile (Evolutionarily Stable Strategy, ESS) e chiarendone i rapporti con l'equilibrio di Nash, nonché alcune classificazioni e criteri di stabilità che risultano utili nel seguito. Tale inquadramento permetterà di motivare il passaggio dal problema "statico" della scelta razionale al problema "dinamico" dell'evoluzione delle strategie, ponendo l'attenzione sul tema, classico, dell'origine della cooperazione.

Infine verrà presentato il modello proposto, il quale descriverà la dinamica evolutiva di una popolazione di N giocatori, nei quali l'aggiornamento della strategia avviene per imitazione. L'elemento centrale dell'impostazione consisterà nell'introduzione di compartimenti e di ipotesi sulla loro struttura e sulle interazioni ammissibili, con lo scopo di studiare come vincoli locali e organizzazione spaziale possano modificare in modo significativo l'esito evolutivo. Il capitolo successivo, inoltre, riporterà integralmente il codice di implementazione con lo scopo di discuterne gli accorgimenti principali. Seguirà quindi una sezione dedicata ai risultati numerici e alla loro interpretazione, con partico-

lare attenzione ai regimi nei quali la cooperazione può risultare favorita anche in un gioco in cui, a livello puramente strategico, essa risulta dominata. In conclusione verranno riassunti i punti principali emersi dallo studio e verranno discusse alcune possibili applicazioni, anche in riferimento a sistemi biologici (ad esempio comunità microbiche) e a prospettive di interesse biotecnologico.

Prologo

Sebbene la Teoria dei Giochi sia stata formalizzata soprattutto nel Novecento, quando la matematica e l'economia iniziarono a condividere linguaggi e strumenti più raffinati per trattare scelte strategiche, l'idea di analizzare "giochi" in senso lato è presente da tempo nella storia del pensiero. Già nel 1564, per esempio, il medico e matematico Girolamo Cardano redige un trattato sui giochi d'azzardo, pubblicato però postumo, mentre poco meno di un secolo dopo, nella seconda metà del Seicento, Blaise Pascal e Christiaan Huygens contribuiscono allo sviluppo del concetto di valore atteso ragionando sulla struttura e sull'analisi di giochi simili. Nel 1713 viene analizzato un gioco di carte in una lettera attribuita a un giacobita chiamato Charles Waldegrave, mentre nel 1838 il matematico ed economista francese Antoine Augustin Cournot pone alcune basi per la formalizzazione del concetto di "equilibrio" nel contesto della concorrenza economica. Negli anni Venti del Novecento, il matematico Émile Borel pubblica una serie di lavori sui "giochi di strategia", mentre nel 1928 John von Neumann pubblica *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, articolo che segna una tappa decisiva nella nascita della Teoria dei Giochi moderna. Bastarono poi pochi decenni per ottenere scenari e risultati che aprivano – e aprono tuttora – a una quantità significativa di applicazioni: nel 1950 compaiono le prime formulazioni del noto "dilemma del prigioniero" – che verrà dettagliato con precisione in seguito – studiato da Merrill M. Flood e Melvin Dresher nell'ambito delle attività della RAND Corporation, anche con riferimento a possibili applicazioni in contesti strategici. Più o meno contemporaneamente, John Nash propone un criterio generale di mutua coesistenza delle strategie dei giocatori, introducendo l'omonimo equilibrio, e dimostra che ogni gioco non cooperativo finito ammette tale equilibrio in strategie miste. Ulteriori sviluppi hanno poi riguardato concetti quali gioco in forma estesa, giochi ripetuti e valore di Shapley e, fino ad oggi, hanno contribuito a rendere la disciplina centrale in una parte rilevante della teoria economica.

La Teoria dei Giochi si basa su idee intuitive ma, come si vedrà in seguito, che possono portare a risultati e processi tutt'altro che attesi: una situazione competitiva può essere descritta tramite un insieme di giocatori, un insieme di azioni disponibili e un insieme di regole che associano alle scelte effettuate un risultato misurabile per ciascun partecipante. Ciò che rende questi modelli distintivi non è necessariamente la presenza di una "gara" in senso sportivo, ma la struttura di dipendenza reciproca secondo cui ogni attore sceglie tenendo conto, più o meno esplicitamente, delle scelte altrui. L'evoluzione della

disciplina procede in due direzioni complementari. Da un lato si arricchisce l'apparato matematico necessario a trattare casi via via più complessi, riguardanti per esempio decisioni ripetute, accordi, minacce credibili, informazione imperfetta e vincoli di comunicazione. Dall'altro, si emancipa progressivamente dalla sua origine economica e diventa un quadro concettuale generale per interpretare sistemi nei quali "agenti" differenti, con obiettivi diversi, interagiscono in modo strutturato. Questa generalità spiega perché la disciplina si sia affermata come strumento interdisciplinare: una stessa formalizzazione può essere applicata, con opportuni adattamenti, a mercati e contratti, a scenari geopolitici, a dinamiche sociali, a problemi di progettazione di reti e protocolli, fino a fenomeni biologici nei quali gli agenti non sono individui completamente razionali ma organismi, cellule o geni. Nel passaggio alle scienze sociali, la disciplina viene impiegata per modellare scenari come negoziazioni, coalizioni, processi decisionali collettivi e comportamenti in presenza di regole istituzionali. In questi contesti, come si discuterà in seguito, emergono fattori che non possono essere compresi con la sola ottimizzazione individuale – come fiducia, reputazione, senso di giustizia e influenza della comunicazione – e, soprattutto, parlare di chi "vince" risulterebbe riduttivo, poiché l'interesse della disciplina è rivolto ai meccanismi che rendono possibile la stabilità di un comportamento e alle condizioni che rendono fragile o robusto un equilibrio. Un ulteriore ampliamento si realizza quando la Teoria dei Giochi entra in dialogo con la biologia e con processi come la selezione naturale. In questi casi, pur senza assumere capacità di calcolo o consapevolezza delle regole, si osserva che numerosi fenomeni biologici possono essere interpretati come interazioni tra strategie: comportamenti di competizione e cooperazione, segnali, aggressività, difesa, condivisione di risorse, parassitismo. È qui che la nozione di strategia diventa una descrizione del comportamento che si manifesta ed eventualmente si diffonde nel tempo, mentre la dinamica non è più quella di una scelta razionale istantanea, ma quella dell'evoluzione delle frequenze di comportamenti in una popolazione. Nasce così la Teoria Evolutiva dei Giochi, che conserva la struttura di base dell'interazione (azioni e risultati), ma sostituisce alla razionalità individuale una dinamica di aggiornamento, spesso interpretata come imitazione, apprendimento o selezione. L'importanza di questo passaggio sta nel fatto che problemi classici, come l'origine della cooperazione, possono essere studiati non soltanto come esiti di un ragionamento perfettamente razionale, ma anche come proprietà emergenti di processi ripetuti nel tempo, in cui contano informazione, meccanismi di trasmissione, variabilità e soprattutto, come si discuterà in questo elaborato, struttura della popolazione.

In questo senso, quindi, si colloca anche lo spunto che motiva l'impostazione generale del presente lavoro. È ragionevole ritenere che la Teoria dei Giochi, pur essendo nata come strumento per l'analisi di decisioni economiche e strategiche, stia assumendo un ruolo sempre più pervasivo in una società nella quale le interazioni sono più frequenti, più rapide e più interconnesse. La globalizzazione, lo sviluppo delle reti digitali e la crescente integrazione tra sistemi economici e sociali rendono più comune trovarsi in contesti dove le scelte indi-

viduali producono effetti indiretti su molti altri attori, e dove le conseguenze dipendono da una pluralità di decisioni simultanee o sequenziali. In tali scenari aumenta la competizione, ma aumentano anche le occasioni di coordinamento e di cooperazione. Per questi motivi, quindi, la disciplina difficilmente può essere considerata soltanto una materia “da studiare” in senso tradizionale, in quanto fornisce strumenti concettuali utili a interpretare dinamiche lavorative, comunicative e interpersonali. Non si tratta di trasformare ogni interazione umana in un problema matematico, né di attribuire ai modelli una pretesa di spiegazione totale; l’idea è piuttosto che il linguaggio della disciplina offra una “grammatica” per riconoscere strutture ricorrenti, ad esempio quando un vantaggio individuale immediato può peggiorare l’esito collettivo, quando la cooperazione richiede condizioni di stabilità, o quando informazione e struttura delle relazioni incidono sugli esiti più delle preferenze dichiarate. In questa prospettiva, conoscere la Teoria dei Giochi significa disporre di strumenti per leggere e, in parte, progettare interazioni, non soltanto per calcolarne un risultato.

Le pagine che seguono sono pensate come un percorso che parte dalle nozioni fondamentali e conduce a un problema specifico affrontato tramite un modello computazionale. Dopo aver richiamato i concetti generali e l’estensione evolutiva, l’attenzione si sposterà su una dinamica di popolazione in cui le strategie si aggiornano per imitazione e in cui la struttura a compartimenti può modificare in modo sostanziale il comportamento collettivo. L’obiettivo è mostrare come scelte di modellazione “strutturali” (chi interagisce con chi, vincoli locali, meccanismi di aggiornamento) possano incidere sull’emergere della cooperazione anche in contesti in cui, sul piano strategico, essa sarebbe sfavorita.

Simbologia

In questa sezione verranno esplicitati i significati dei simboli che saranno utilizzati all'interno dell'elaborato.

\emptyset = insieme vuoto

\mathbb{N} = insieme dei numeri naturali

\in = appartiene a

\notin = non appartiene a

$|A|$ = cardinalità di A

\cup = unione

\cap = intersezione

\subset = sottoinsieme proprio

\subseteq = sottoinsieme

$-$ = differenza (sia per numeri che per insiemi)

$[a, b]$ = intervallo chiuso tra a e b

$[a, b)$ = intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra

$(a, b]$ = intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

(a, b) = intervallo aperto tra a e b

\oplus = XOR, cioè operatore “o esclusivo” bit a bit

Capitolo 1

Teoria dei Giochi

1.1 Definizioni di base

L'idea che motiva l'introduzione di questa disciplina e del seguente linguaggio è l'interdipendenza: il comportamento di un individuo può modificare il risultato ottenuto da un altro, in senso positivo o negativo, e dunque le conseguenze di una scelta non dipendono soltanto da ciò che si fa, ma anche da ciò che fanno gli altri. La Teoria dei Giochi è perciò lo studio di tale fenomeno in un contesto strategico, che permette di analizzare la decisione ottimale al variare di quella altrui. Per chiarire cosa significhi “contesto strategico” è utile pensare a casi meno complessi nei quali l'azione che sembra naturalmente migliore non lo è più nel momento in cui diventa prevedibile. Nello sport, per esempio, una scelta tecnica che può apparire inizialmente più vantaggiosa può diventare un punto debole se adottata in modo sistematico, in quanto l'avversario può anticiparla e prepararsi. In situazioni di questo tipo, quindi, il punto cruciale non è soltanto cosa convenga fare in assoluto, ma anche cosa convenga evitare di fare con regolarità, perché la prevedibilità è sfruttabile dall'altro giocatore. Questo conduce naturalmente all'idea che, in alcuni contesti, una buona strategia debba incorporare una componente di casualità, proprio per ridurre la possibilità di essere capita dall'avversario. La domanda diventa allora non se randomizzare, ma con quali probabilità. Un esempio classico, che verrà analizzato approfonditamente in questo elaborato, è il Dilemma del Prigioniero: due soggetti, interrogati separatamente, scelgono se confessare o meno; la struttura degli incentivi è tale per cui, qualunque cosa faccia l'altro, a ciascuno conviene confessare, e dunque l'esito finale è la confessione di entrambi. Tuttavia, se entrambi tacciono, l'esito complessivo sarebbe migliore per entrambi rispetto al caso in cui entrambi confessano. L'importanza dell'esempio non sta tanto nella storia, quanto nel meccanismo: una scelta individualmente dominante può condurre a un risultato collettivamente inefficiente.

Gli esempi strategici non riguardano soltanto decisioni “umane” in senso tradizionale, ma anche scelte operate da entità istituzionali o tecniche. In particolare, in reti e sistemi distribuiti, ad esempio nello scambio di traffico tra

fornitori di servizi Internet tramite punti di interconnessione, ciascun attore può essere incentivato a minimizzare il proprio costo locale, anche quando ciò peggiora l'esito complessivo o trasferisce costi sull'altra parte; in tali contesti la Teoria dei Giochi è utile non solo per descrivere l'interazione, ma anche per ragionare su regole e protocolli che risultino robusti rispetto a comportamenti opportunistici. Altri casi mettono in luce l'importanza delle aspettative reciproche e del ragionamento sulle mosse future: quando le scelte sono interdipendenti, la "mossa migliore" dipende da ciò che si ritiene faranno gli altri, e spesso anche da ciò che si ritiene che gli altri ritengano, e così via. Esistono inoltre situazioni in cui il punto centrale è decidere chi cede per primo, con costi che crescono nel tempo e rischi legati all'attesa; esempi di questo tipo mostrano che la struttura strategica dipende essenzialmente da chi sono gli agenti, quali azioni sono disponibili e come dalle scelte congiunte derivino esiti e payoff. Il Capitolo I prende avvio da queste intuizioni e introduce gli elementi formali necessari per definire giochi strategici, strategie, payoff e profili di strategie, in vista degli strumenti che verranno poi utilizzati nei capitoli successivi.

Definizione 1.1. Si chiama *gioco* ogni scenario nel quale le strategie dei partecipanti, detti giocatori, agenti o attori, interagiscono, nel senso che l'esito per ciascun partecipante dipende dalle scelte congiunte di tutti i giocatori.

Definizione 1.2. Si chiamano *strategie* le scelte disponibili ai giocatori. In senso generale, una *strategia* è un piano d'azione completo e contingente che specifica quale azione il giocatore sceglie in ciascuna possibile situazione che può presentarsi durante lo svolgimento del gioco. In un gioco a due agenti A e B , si denoterà con S_A l'insieme delle strategie disponibili al giocatore A e con $s_A \in S_A$ una strategia scelta da A .

Osservazione 1.3. Le strategie possono essere discrete, ad esempio

$$S_A = \{\text{strategia 1, strategia 2, } \dots \},$$

oppure continue, ad esempio

$$S_A = [0, 10], \quad S_A = [0, +\infty), \quad \text{oppure} \quad S_A = \mathbb{R}_+.$$

Inoltre, si dicono *simmetriche* se tutti i giocatori hanno lo stesso insieme di strategie, e *asimmetriche* altrimenti.

Definizione 1.4. Si chiama *profilo di strategie* la lista delle strategie scelte da tutti i giocatori:

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n).$$

L'esito per un giocatore dipende quindi dalla propria strategia e dal profilo scelto dagli altri. Per compattezza, si scriverà

$$s = (s_i, s_{-i}),$$

dove s_{-i} denota il profilo delle strategie scelte da tutti i giocatori diversi dal giocatore i .

Definizione 1.5. Si definisce *payoff*, o utilità, il numero che un giocatore associa a un esito concepibile del gioco, cioè a un profilo di strategie. Il payoff intende riassumere “tutto ciò che conta” per il giocatore nel contesto considerato e, quanto più è alto il suo valore, tanto più l’esito ha realizzato gli obiettivi del partecipante.

Definizione 1.6. Se un giocatore affronta una prospettiva aleatoria di esiti, il payoff associato a tale prospettiva è il *payoff atteso*, calcolato come la media dei payoff dei possibili esiti, ciascuno pesato con la probabilità con cui può verificarsi.

Esempio 1.7. Se per un giocatore l’esito A ha payoff 0 e probabilità 0.75, mentre l’esito B ha payoff 100 e probabilità 0.25, il payoff atteso è

$$0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 100 = 25.$$

Definizione 1.8. Si chiama *razionalità* la capacità di possedere un ordinamento coerente degli esiti tramite payoff e di scegliere la strategia che massimizza il proprio guadagno.

Definizione 1.9. Si dice che un profilo di strategie è un *equilibrio* quando ciascun giocatore sta utilizzando una strategia che costituisce una migliore risposta alle strategie degli altri partecipanti.

Definizione 1.10. Si chiamano *giochi a somma zero* quelli nei quali la somma dei guadagni, cioè dei payoff, dei giocatori è sempre pari a zero. Tipicamente, quindi, la vincita di un giocatore coincide con la perdita degli altri.

Definizione 1.11. Si chiamano *giochi a somma costante* quelli nei quali la somma dei payoff dei giocatori è sempre costante, non necessariamente uguale a zero.

Definizione 1.12. Un gioco si dice *simultaneo* quando i giocatori compiono le proprie mosse senza conoscere le scelte correnti degli altri, mentre si dice *sequenziale* quando le mosse avvengono in ordine temporale e almeno alcuni giocatori possono reagire osservando scelte precedenti.

Osservazione 1.13. Nei giochi sequenziali la scelta presente è guidata dal calcolo delle conseguenze future. Nei giochi simultanei, invece, il problema principale è formarsi un’aspettativa su ciò che gli altri faranno nello stesso momento, tenendo conto che anche gli altri stanno ragionando simmetricamente.

Definizione 1.14. Si chiamano *giochi a regole fisse* quelli in cui le regole sono date e devono essere seguite sempre da tutti i giocatori, mentre si chiamano giochi a regole manipolabili, o variabili, quelli in cui i giocatori possono influenzare o scegliere le regole in una fase preliminare.

Definizione 1.15. Si dice che un gioco ha *informazione perfetta* quando, ogni volta che un giocatore è chiamato a compiere una scelta, egli conosce tutta la storia delle mosse precedentemente effettuate nel gioco. Se esiste almeno una situazione in cui un giocatore non osserva interamente le mosse precedenti rilevanti, il gioco si dice a *informazione imperfetta*.

Definizione 1.16. Un gioco si dice *one-shot* quando viene giocato una sola volta, mentre si dice *ripetuto* quando viene giocato più volte.

Osservazione 1.17. Nei giochi ripetuti i giocatori possono costruire reputazione e apprendere informazioni sugli avversari; inoltre, possono esistere meccanismi di premio o punizione tra una ripetizione e la successiva.

Definizione 1.18. Si dicono *cooperativi* i giochi nei quali gli accordi tra giocatori sono vincolanti e la loro esecuzione è garantita da qualche meccanismo di enforcement. Si dicono *non cooperativi* i giochi nei quali tale enforcement non è possibile e ciascun individuo deve essere considerato libero di agire nel proprio interesse; in questo caso le azioni sono scelte e implementate individualmente.

1.2 Giochi sequenziali

Un gioco sequenziale è uno scenario strategico in cui esiste un ordine di gioco rigoroso: i giocatori muovono a turno e, quando compiono una scelta, conoscono ciò che i giocatori precedenti hanno già fatto. In tali situazioni la decisione corrente non può essere valutata isolatamente, perché ogni azione modifica il “futuro” del gioco: scegliere oggi significa anche influenzare quali mosse saranno disponibili domani e quali reazioni saranno razionali per gli altri giocatori. Per questo motivo, nei giochi sequenziali i giocatori determinano le mosse presenti sulla base di un calcolo delle conseguenze future, cioè ragionano “in avanti” sugli esiti possibili, ma anche “all’indietro” sulle reazioni prevedibili dei rivali.

Definizione 1.19. Si dice *gioco sequenziale* un gioco nel quale le mosse avvengono in un ordine temporale, e almeno alcuni giocatori possono osservare le mosse effettuate prima di scegliere la propria azione.

Osservazione 1.20. La rappresentazione tipica di un gioco sequenziale è l’*albero di gioco*, o *albero decisionale*, detto anche *forma estesa* del gioco. Esso descrive i giocatori che muovono nei diversi nodi decisionali, le azioni disponibili in ciascun nodo e i payoff associati agli esiti finali, detti nodi terminali.

Definizione 1.21. Un *nodo terminale* è un punto dell’albero in cui il gioco termina e nessun giocatore ha ulteriori mosse disponibili; un *nodo di azione*, o *nodo non terminale*, è invece un nodo in cui un giocatore deve scegliere un’azione tra quelle disponibili.

Osservazione 1.22. Nei giochi finiti, ogni percorso possibile nell’albero conduce a un nodo terminale dopo un numero finito di mosse.

Osservazione 1.23. Quando in un gioco compare incertezza esterna, cioè un evento non controllato da alcun giocatore, come un lancio di moneta, essa può essere modellata introducendo un nodo attribuito a un soggetto fittizio, spesso chiamato *natura*, che sceglie tra i rami secondo probabilità assegnate. In presenza di tali nodi, la valutazione razionale passa attraverso payoff attesi.

Definizione 1.24. Si definisce *metodo di rollback*, o *induzione all'indietro*, la procedura risolutiva per giochi sequenziali finiti che parte dai nodi di azione immediatamente precedenti ai nodi terminali, seleziona in ciascuno le azioni che massimizzano il payoff del giocatore che muove e ripete iterativamente lo stesso ragionamento risalendo l'albero fino al nodo iniziale.

Definizione 1.25. L'insieme delle strategie che risulta dall'applicazione del rollback si chiama *equilibrio di rollback*. Il percorso dell'albero generato da tali strategie si chiama *cammino di equilibrio*, e il nodo terminale corrispondente determina l'*esito di rollback*.

Osservazione 1.26. Nel caso in cui compaiano nodi di incertezza esterna, essi possono essere “riassunti” sostituendo il sottoramo casuale con un unico nodo terminale che assegna a ciascun giocatore il payoff atteso rispetto alle probabilità date; una volta effettuata tale sostituzione, il rollback si applica come nel caso deterministico.

Osservazione 1.27. Il rollback può produrre più di un equilibrio quando, in qualche nodo di azione, il giocatore che muove è indifferente tra due o più azioni perché producono lo stesso payoff. In tal caso, più scelte sono compatibili con l'induzione all'indietro e, se il modello lo consente, anche una randomizzazione tra azioni indifferentemente ottimali può generare esiti di equilibrio differenti.

1.3 Il gioco del NIM e il teorema di Sprague–Grundy

I cosiddetti giochi del NIM e, più in generale, i giochi imparziali a informazione perfetta e durata finita costituiscono una classe di esempi particolarmente rilevante di giochi sequenziali, in quanto permettono di stabilire, in modo quasi “meccanico”, come una regola di gioco si trasformi in un problema di struttura combinatoria. L'obiettivo, quindi, è mostrare come, in alcuni giochi sequenziali, esista una teoria risolutiva completa: dato uno stato iniziale, è possibile stabilire se il primo giocatore dispone o meno di una strategia vincente e, in caso affermativo, come costruirla.

Definizione 1.28. Si dice *imparziale* un gioco a due giocatori in cui l'insieme delle mosse lecite dipende solo dalla posizione corrente e non dall'identità del giocatore che muove, cioè i due giocatori hanno sempre le stesse mosse disponibili in ciascuna posizione. Si assume inoltre, come convenzione standard, la regola di *normal play*: vince il giocatore che effettua l'ultima mossa lecita; equivalentemente, chi si trova in una posizione senza mosse disponibili perde.

Definizione 1.29. In un gioco finito in normal play una posizione si dice *perdente* per il giocatore di turno se tutte le mosse lecite conducono a posizioni vincenti per l'avversario. Una posizione si dice *vincente* se esiste almeno una mossa lecita che conduce a una posizione perdente.

Esempio 1.30. Si consideri una sola pila con n oggetti, e sia consentito rimuovere 1, 2 oppure 3 oggetti a turno. La posizione $n = 0$ è perdente perché non esistono mosse; le posizioni $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ sono vincenti perché permettono di arrivare a 0; la posizione $n = 4$ è perdente perché ogni mossa, cioè togliere 1, 2 o 3, conduce rispettivamente a 3, 2 o 1, che sono vincenti; la posizione $n = 5$ torna vincente perché consente di andare a 4. Si ottiene così una periodicità: risultano perdenti esattamente le posizioni in cui n è multiplo di 4, e la strategia ottimale consiste nel lasciare all'avversario un multiplo di 4.

Definizione 1.31. Si definisce *gioco NIM classico* quello in cui sono presenti k pile, con dimensioni

$$(x_1, \dots, x_k),$$

e ad ogni mossa il giocatore sceglie una pila e ne riduce la dimensione a un valore strettamente minore, lasciando invariate le altre. Il giocatore che non può muovere, cioè quando tutte le pile sono vuote, perde secondo la regola normal play.

Definizione 1.32. Dato un vettore di pile

$$(x_1, \dots, x_k),$$

si definisce *nim-sum* la somma nim

$$x_1 \oplus \dots \oplus x_k,$$

dove \oplus indica lo XOR bit a bit nella rappresentazione binaria.

Teorema 1.33 (Criterio risolutivo del NIM). Nel NIM classico, una posizione

$$(x_1, \dots, x_k)$$

è perdente se e soltanto se la nim-sum

$$x_1 \oplus \dots \oplus x_k$$

è pari a 0. In particolare:

- se il nim-sum è 0, qualunque mossa porta a una posizione con nim-sum diverso da 0;
- se il nim-sum è diverso da 0, esiste almeno una mossa che porta a una posizione con nim-sum pari a 0.

Corollario. Il criterio precedente produce una strategia ottimale molto concreta: quando la posizione è vincente, cioè ha nim-sum non nullo, si cerca una mossa che renda nullo il nim-sum. Tale mossa esiste sempre e si ottiene scegliendo una pila la cui riduzione modifichi il bit più significativo in cui il nim-sum vale 1. Viceversa, se la posizione è perdente, cioè ha nim-sum nullo, non esiste alcuna mossa salvifica: ogni mossa rompe la condizione e offre all'avversario la possibilità di ripristinarla.

Osservazione 1.34. Il NIM non è soltanto un gioco specifico, ma un “gioco universale” per una vasta classe di giochi imparziali: l’idea di Sprague–Grundy è che ogni gioco imparziale finito, visto come grafo di posizioni e mosse, può essere ricondotto a una pila di NIM di dimensione opportuna, nel senso che, rispetto alla possibilità di vincere o perdere, esso si comporta come una pila. Questo permette di risolvere non solo un gioco isolato, ma anche somme di giochi, cioè situazioni in cui più sottogiochi sono indipendenti e a ogni turno si decide in quale sottogioco giocare.

Definizione 1.35. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ di interi non negativi, si definisce

$$\text{mex}(A)$$

(*minimum excluded*) come il più piccolo intero non negativo che non appartiene ad A .

Definizione 1.36. Sia s una posizione di un gioco imparziale finito. Si definisce il **numero di Grundy** $g(s)$ ricorsivamente come

$$g(s) = \text{mex}(\{g(s') : s' \text{ è raggiungibile da } s \text{ con una mossa lecita}\}).$$

In particolare, se s è una posizione terminale, cioè non ammette alcuna mossa possibile, allora l’insieme tra parentesi è vuoto e

$$g(s) = \text{mex}(\emptyset) = 0.$$

Osservazione 1.37. Il numero di Grundy traduce la struttura delle mosse in un singolo intero che, per il gioco considerato, svolge lo stesso ruolo della dimensione di una pila nel NIM. In questa prospettiva:

- le posizioni con $g(s) = 0$ sono perdenti;
- le posizioni con $g(s) \neq 0$ sono vincenti.

Il motivo è parallelo alla definizione ricorsiva vincente/perdente: $g(s) = 0$ significa che da s si possono raggiungere solo posizioni con numero di Grundy diverso da 0; $g(s) \neq 0$ significa che tra le posizioni raggiungibili ne esiste almeno una con numero di Grundy pari a 0.

Definizione 1.38. Siano dati più sottogiochi indipendenti. La loro *somma disgiunta* è il gioco in cui, a ogni turno, il giocatore sceglie uno dei sottogiochi e compie una mossa lecita solo in quello, lasciando invariati gli altri sottogiochi. Il gioco termina quando nessun sottogioco ammette più mosse.

Teorema 1.39 (Sprague–Grundy). Per giochi imparziali finiti in normal play, il numero di Grundy della somma disgiunta è il nim-sum dei numeri di Grundy nei sottogiochi:

$$g(s_1 + \cdots + s_m) = g(s_1) \oplus \cdots \oplus g(s_m).$$

In particolare, la somma disgiunta è perdente se e soltanto se tale nim-sum è 0, e quindi una strategia ottimale consiste nel muovere in modo da rendere nullo il nim-sum complessivo.

Esempio 1.40. Si supponga di avere una piccola porzione di gioco in cui da una posizione s si possa andare, con una mossa, a tre posizioni s_1, s_2, s_3 con numeri di Grundy rispettivamente 0, 1, 3. Allora l'insieme dei valori raggiungibili è

$$\{0, 1, 3\}$$

e dunque

$$g(s) = \text{mex}(\{0, 1, 3\}) = 2.$$

In altre parole, s “equivale” a una pila di NIM di dimensione 2.

1.4 Giochi simultanei

Nei giochi simultanei ogni giocatore deve scegliere la propria azione senza osservare la scelta corrente degli altri; in particolare, le decisioni possono essere prese “nello stesso momento” oppure in tempi diversi ma senza informazione sulle mosse altrui al momento della scelta. In questo contesto la rappresentazione naturale è la *forma normale*, o *forma strategica*: una tabella le cui intestazioni indicano le azioni disponibili ai giocatori e le cui celle riportano i payoff associati a ciascuna combinazione di azioni. Nei giochi simultanei giocati una sola volta, inoltre, la distinzione tra azione e strategia tende a coincidere, perché ciascun giocatore ha una sola occasione per agire.

Definizione 1.41. Un gioco si dice *simultaneo* se ciascun giocatore deve scegliere la propria azione senza conoscere le scelte correnti degli altri giocatori. Si chiama inoltre *forma normale*, o *forma strategica*, la rappresentazione di un gioco simultaneo mediante una tabella che elenca, per ciascun profilo di strategie, il payoff ottenuto da ogni giocatore. Nel caso di due giocatori la

tabella è una matrice: un giocatore è associato alle righe e l'altro alle colonne, e in ciascuna cella compaiono i payoff dei due giocatori secondo una convenzione fissata.

Definizione 1.42. Una *strategia pura* è una scelta non probabilistica di un'azione. Una *strategia mista* è una scelta probabilistica sulle azioni pure disponibili, ossia una distribuzione di probabilità che assegna a ciascuna azione la probabilità con cui verrà giocata.

Definizione 1.43. Data una strategia, o un profilo di strategie, degli avversari, una *miglior risposta*, o *best response*, per un giocatore è una strategia che massimizza il payoff di quel giocatore contro le strategie fissate degli altri.

Definizione 1.44. Un *equilibrio di Nash* è un profilo di strategie, uno per ciascun giocatore, tale che nessun giocatore può ottenere un payoff più alto passando unilateralmente a un'altra strategia disponibile, mantenendo fisse le strategie degli altri. Equivalentemente, in un equilibrio di Nash la strategia di ogni giocatore è una miglior risposta alle strategie degli altri.

Osservazione 1.45. Un equilibrio di Nash non coincide necessariamente con l'esito migliore per tutti o con un esito socialmente desiderabile: può accadere che esistano profili di strategie che darebbero payoff più alti a entrambi i giocatori, ma che non siano sostenibili perché almeno uno dei giocatori avrebbe incentivo a deviare. Questa possibilità è alla base dell'idea di misurare l'inefficienza degli equilibri confrontandoli con soluzioni ottimali rispetto a una funzione di benessere, ad esempio la somma dei payoff, e porta a concetti quantitativi come il *prezzo dell'anarchia*, o *price of anarchy*, che misura quanto può essere inefficiente il peggior equilibrio rispetto a una soluzione socialmente ottima. In termini generali, esso confronta il valore della funzione di benessere sociale nell'ottimo con il valore assunto nel peggior equilibrio di Nash.

Definizione 1.46. Si dice che una strategia s' di un giocatore è *strettamente dominata* se esiste un'altra strategia s dello stesso giocatore che fornisce un payoff strettamente maggiore di s' , qualunque siano le strategie scelte dagli altri giocatori. Si dice che una strategia s è *strettamente dominante* per un giocatore se fornisce a quel giocatore un payoff strettamente maggiore di qualunque altra sua strategia, qualunque siano le scelte degli altri giocatori. In tal caso, tutte le altre strategie del giocatore risultano dominate dalla strategia dominante.

Osservazione 1.47. Quando un giocatore dispone di una strategia dominante, un'ipotesi naturale di razionalità suggerisce che la sceglierà indipendentemente dalle aspettative sulle mosse altrui. In giochi nei quali ogni giocatore possiede una strategia dominante, l'esito che deriva dalla scelta delle strategie dominanti costituisce un equilibrio di Nash; il Dilemma del Prigioniero, che verrà approfondito più avanti, è un esempio classico in cui l'esito di equilibrio risulta peggiore, per entrambi, di un altro esito che sarebbe preferibile a entrambi ma non è sostenibile senza un meccanismo di coordinamento o vincolo.

Definizione 1.48 (Eliminazione successiva di strategie dominate). Dato un gioco in forma normale con i relativi insiemi di strategie, l'*eliminazione successiva di strategie dominate* è la procedura che consiste nel:

1. individuare una strategia dominata di un giocatore;
2. eliminarla dall'insieme delle strategie disponibili;
3. ripetere il procedimento sul gioco ridotto finché non esistono ulteriori strategie dominate eliminabili.

Osservazione 1.49. Se la procedura di eliminazione successiva termina lasciando un unico profilo di strategie, allora il gioco si dice *risolvibile per dominanza*, o *dominance solvable*, e il profilo residuo costituisce l'unico equilibrio di Nash del gioco. L'intuizione è che l'eliminazione progressiva formalizza una formazione corretta di credenze: un giocatore razionale non sceglie strategie peggiori in ogni circostanza, gli altri lo anticipano e aggiornano le proprie scelte, e così via, riducendo iterativamente il gioco.

Definizione 1.50. Si dice che una strategia s' è *debolmente dominata* da una strategia s se, qualunque siano le strategie scelte dagli altri giocatori, il payoff ottenuto con s è sempre almeno pari a quello ottenuto con s' , e per almeno una scelta degli altri giocatori è strettamente maggiore.

Definizione 1.51. Si dice che una strategia s è *debolmente dominante* se, per qualunque scelta degli altri giocatori, essa non produce mai un payoff peggiore di quello ottenibile con qualunque altra strategia alternativa.

Osservazione 1.52. Nonostante l'eliminazione iterata di strategie dominanti possa sembrare uno strumento naturale anche nel caso debole, eliminare strategie debolmente dominate può far perdere alcuni equilibri di Nash. Il motivo è che la dominanza debole ammette casi di indifferenza: una strategia può essere eliminata perché non è mai migliore di un'altra, ma può comunque comparire in un equilibrio come risposta ottima quando l'avversario gioca in modo tale da rendere il giocatore indifferente tra più scelte.

1.5 Un esempio notevole: il p -beauty contest e la razionalità

Un esempio notevole, utile per chiarire il ruolo delle credenze nei giochi simultanei, è il *p -beauty contest*. In questo gioco ogni giocatore sceglie un numero nell'intervallo $[0, 100]$, si calcola la media m delle scelte e vince, o ottiene il payoff più alto, chi ha scelto il numero più vicino a $p \cdot m$, dove p è un parametro fissato con $0 < p < 1$. L'interesse dell'esempio, come si mostrerà di seguito, risiede nel fatto che "giocare bene" richiede di ragionare sulle scelte altrui, e sulle scelte che gli altri faranno ragionando a loro volta.

Osservazione 1.53 (Equilibrio nel p-beauty contest). Poiché tutti i giocatori sceglieranno un numero in $[0, 100]$, anche la media m apparterrà a tale intervallo, e dunque il target $p \cdot m$ starà in $[0, 100p]$. Ne consegue che scegliere un numero maggiore di $100p$ non può essere una scelta ragionevole, in quanto non potrà mai essere sufficientemente vicino a $p \cdot m$ per nessun possibile valore della media. Eliminando i numeri maggiori di $100p$, si ripete lo stesso ragionamento: se le scelte plausibili stanno in $[0, 100p]$, allora $m \in [0, 100p]$ e dunque $p \cdot m \in [0, 100p^2]$, e così via. Iterando questo ragionamento si ottiene una sequenza di intervalli annidati

$$[0, 100p], \quad [0, 100p^2], \quad [0, 100p^3], \dots$$

che, per $0 < p < 1$, collassano verso 0. Per questo motivo, nel p-beauty contest l'unico equilibrio di Nash è quello in cui tutti i giocatori scelgono 0.

Osservazione 1.54. Nella pratica sperimentale, tuttavia, le scelte osservate raramente si concentrano subito su 0, e ciò motiva modelli di *razionalità limitata*. Un esempio è il modello *level-k*: si assume che i giocatori abbiano livelli cognitivi diversi. Un giocatore di livello $L0$ sceglie in modo non strategico, ad esempio uniformemente a caso in $[0, 100]$, quindi con valore medio 50. Un giocatore di livello $L1$ crede che gli altri siano $L0$ e quindi sceglierà $p \cdot 50$. Un giocatore di livello $L2$ crede che gli altri siano $L1$ e sceglierà $p^2 \cdot 50$, e così via. In questa lettura, è naturale attendersi “picchi” delle risposte in corrispondenza di

$$50, \quad p \cdot 50, \quad p^2 \cdot 50, \dots$$

e il valore 0 emerge come limite solo quando il ragionamento iterato diventa effettivamente profondo oppure quando il gioco viene ripetuto e i giocatori possono apprendere dai risultati precedenti.

1.6 Analisi delle risposte migliori (best response)

Tutti i concetti e i metodi introdotti per i giochi simultanei a due giocatori, come equilibrio di Nash, dominanza, eliminazione iterata e risposte migliori, si estendono senza modifiche sostanziali al caso di $n \geq 3$ giocatori. La differenza principale è di natura rappresentativa: mentre per due giocatori la forma normale è una matrice, per più giocatori la tabella dei payoff diventa un oggetto multidimensionale, e quindi l'analisi si basa più spesso su argomenti di dominanza o su risposte migliori intese come funzione delle strategie altrui, piuttosto che su una lettura diretta della tabella.

Esempio 1.55. Nel gioco “street-garden” in versione simultanea, ciascuno di tre giocatori decide se contribuire o non contribuire alla realizzazione di un bene comune, il giardino, e la qualità del risultato dipende dal numero esatto di contribuenti: tre contributi producono l’esito migliore, due un esito intermedio, uno un esito minimo, zero nessun giardino. Le preferenze dei giocatori sono tali per cui, a parità di qualità del giardino ottenuto dagli altri, ciascuno preferisce non sostenere il costo del contributo. In questo caso, per ciascun giocatore *non contribuire* risulta una strategia dominante, e dunque l’unico equilibrio di Nash in strategie pure è quello in cui nessuno contribuisce, con un esito complessivo inefficiente, cioè il giardino non viene realizzato, rispetto a scenari in cui tutti contribuirebbero. L’inefficienza dell’equilibrio, quindi, può non dipendere dal numero di giocatori ed emergere in modo ancora più netto quando il bene pubblico coinvolge più agenti.

Definizione 1.56. L’*analisi delle risposte migliori*, o *best response analysis*, è un metodo sistematico per individuare equilibri di Nash in strategie pure: per ciascun giocatore si determina quali strategie massimizzano il payoff, dato ogni possibile profilo di strategie degli altri, e un profilo

$$s^*$$

è un equilibrio di Nash se e soltanto se, per ogni giocatore i , la strategia

$$s_i^*$$

è una best response a

$$s_{-i}^*.$$

Osservazione 1.57. L’analisi delle risposte migliori può produrre più di un equilibrio in strategie pure quando, per alcuni profili degli avversari, un giocatore è indifferente tra più strategie, cioè ha più risposte migliori. D’altra parte, può accadere che l’analisi non individui alcun equilibrio in strategie pure: in tal caso, si dice che nel gioco non esistono equilibri puri.

Osservazione 1.58 (Dipendenza da payoff ordinali). Nel caso di strategie pure, sia le risposte migliori sia l’esistenza e la localizzazione degli equilibri di Nash dipendono solo dall’ordinamento delle preferenze dei giocatori sui diversi esiti, cioè dai *payoff ordinali*, e non dai valori numerici specifici con cui tali preferenze sono rappresentate. Due tabelle di payoff diverse, quindi, possono generare gli stessi equilibri puri se inducono le stesse classifiche degli esiti per ciascun giocatore.

Definizione 1.59. Si dice *a somma costante* un gioco nel quale la somma dei payoff dei giocatori è la stessa in ogni esito, cioè in ogni cella della tabella.

Osservazione 1.60. I giochi a somma costante sono, dal punto di vista strategico, equivalenti a giochi a somma zero: sottraendo a ciascun giocatore una costante opportuna, cioè normalizzando i payoff, si ottiene un gioco in cui la somma dei payoff è sempre zero senza modificare l’insieme delle risposte migliori, e quindi senza modificare gli equilibri in strategie pure. Per questo motivo, nello studio di questi giochi si lavora spesso direttamente con la rappresentazione a somma zero.

Definizione 1.61 (Metodo minimax, von Neumann). Nei giochi a somma zero, il *metodo minimax* individua strategie robuste assumendo che l'avversario reagisca sempre nel modo per noi più sfavorevole. In forma operativa: per ciascuna strategia di un giocatore si calcola il payoff minimo che può ottenere, cioè il peggior caso, e si sceglie la strategia che massimizza questo minimo. Una strategia ottenuta in questo modo si chiama *strategia minimax*.

Osservazione 1.62. Nei giochi a somma zero, quando esiste un equilibrio in strategie pure, esso coincide con una coppia di strategie minimax: ciascun giocatore sceglie una strategia che massimizza il proprio payoff nel peggiore dei casi, e nessuno ha incentivo a deviare unilateralmente. Nei casi in cui il minimax non seleziona un profilo puro unico, ad esempio perché più strategie realizzano lo stesso massimo dei minimi, possono esistere più equilibri in strategie pure.

1.7 Alcuni esempi notevoli e ulteriori definizioni

È utile, nell'analisi dei giochi simultanei, riconoscere alcune "famiglie" standard, perché ciascuna mette in evidenza un problema strategico tipico: coordinamento, conflitto di preferenze pur con desiderio di coordinarsi, rischio e credibilità. In particolare, la presenza di equilibri multipli in strategie pure non è un dettaglio tecnico: quando esistono più equilibri, il problema diventa spiegare, o prevedere, come i giocatori possano convergere su uno di essi, e quali meccanismi, come comunicazione, convenzioni o punti focali, rendano tale convergenza plausibile.

Definizione 1.63. Si parla di *gioco di coordinamento* quando i giocatori hanno un interesse comune a scegliere lo stesso, o più in generale a rendere compatibili le proprie azioni, ma agiscono indipendentemente e non possono imporre un accordo vincolante. Nel caso di *puro coordinamento*, entrambi i giocatori ottengono un payoff positivo se coordinano le azioni, ad esempio scegliendo lo stesso luogo d'incontro, e payoff nullo se falliscono la coordinazione; tipicamente esistono più equilibri di Nash in strategie pure, corrispondenti alle diverse modalità di coordinazione possibili.

Osservazione 1.64. Quando emergono più equilibri di coordinamento, non esiste in generale una ragione puramente matematica per selezionarne uno; la selezione dipende dalla convergenza delle aspettative, che può avvenire tramite comunicazione o tramite un *punto focale*, o *focal point*, ossia un elemento

saliente comune ai giocatori, storico, culturale o tecnologico, che rende un equilibrio più naturale di un altro. In assenza di una convergenza genuina delle aspettative, i giocatori possono fallire il coordinamento e ottenere esiti peggiori, anche se gli equilibri esistono e sono noti.

Definizione 1.65. Un gioco si dice di *assurance* quando esistono almeno due equilibri in strategie pure, uno dei quali è migliore per entrambi, cioè l'equilibrio preferito, ma richiede che ciascun giocatore abbia sufficiente certezza che anche l'altro adotterà l'azione appropriata. In tali giochi, un esito meno efficiente può risultare più sicuro individualmente perché riduce il rischio di ottenere un payoff molto basso in caso di mancata coordinazione.

Esempio 1.66. Lo *Stag Hunt* è un gioco in cui ciascun giocatore può scegliere un'azione di tipo cooperativo, *Team* oppure *stag*, cioè andare a caccia del cervo, oppure un'azione individuale, *Individual* oppure *rabbit*, cioè cacciare il coniglio. L'esito

(Team, Team)

dà il payoff più alto a entrambi, ma richiede fiducia reciproca: se un giocatore sceglie Team mentre l'altro sceglie Individual, il primo può ottenere un payoff molto basso; viceversa, scegliendo Individual si ottiene un payoff più sicuro, anche se inferiore rispetto al massimo raggiungibile con Team. Il gioco presenta due equilibri di Nash in strategie pure:

(Team, Team) e (Individual, Individual).

Una versione più rischiosa si ottiene rendendo più severa la perdita in caso di mancata coordinazione sul Team: gli equilibri restano gli stessi, ma diventa più difficile sostenere l'equilibrio cooperativo senza un sufficiente livello di fiducia.

Osservazione 1.67. In molte situazioni reali non è immediato stabilire se un'interazione debba essere modellata come simultanea o sequenziale. L'elemento discriminante non è soltanto l'ordine cronologico con cui le decisioni vengono prese, ma l'ordine con cui le mosse diventano irreversibili e osservabili: se una scelta diventa irreversibile prima dell'altra ma non è osservabile dall'altro giocatore prima che questi muova, allora, dal punto di vista informativo, l'interazione resta un gioco simultaneo; viceversa, se la mossa del primo è osservabile dall'altro prima che il secondo muova, l'interazione assume natura sequenziale e può essere analizzata con rollback.

Definizione 1.68. Si dice che un gioco sequenziale ha *vantaggio del primo giocatore* se ciascun giocatore, nel risultato di rollback, ottiene un esito migliore quando muove per primo rispetto a quando muove per secondo. Analogamente, si dice che un gioco sequenziale ha *vantaggio del secondo giocatore* se ciascun giocatore ottiene un esito migliore quando muove per secondo rispetto a quando muove per primo. Esistono infine giochi nei quali entrambi i giocatori preferiscono lo stesso ordine delle mosse, e quindi, se potessero scegliere l'ordine, convergerebbero sullo stesso assetto.

Osservazione 1.69. Esistono interazioni che contengono componenti sia simultanee sia sequenziali: una prima fase in cui alcune scelte sono effettuate senza osservazione reciproca, e una seconda fase in cui, date le scelte della prima, i giocatori reagiscono osservando ciò che è accaduto. Questi modelli si descrivono naturalmente come *giochi a due stadi*, nei quali la prima fase può essere simultanea e la seconda può essere sequenziale per uno dei giocatori, se solo uno decide, oppure ancora simultanea, se entrambi decidono nuovamente nello stesso momento. L'analisi, come per ogni gioco multi-stadio finito, procede all'indietro: si risolvono prima i sottogiochi del secondo stadio, identificando gli equilibri o le scelte ottimali rilevanti, e si riportano i payoff risultanti al primo stadio, trasformandolo in un gioco più semplice.

Esempio 1.70. Due imprese decidono simultaneamente se sostenere o meno un investimento iniziale. Se nessuna investe, il gioco termina; se una sola investe, essa prende successivamente una decisione di prezzo in modo unilaterale, mentre se entrambe investono la decisione di prezzo diventa un gioco simultaneo tra le due imprese. In questa classe di esempi, il risultato del secondo stadio determina i payoff effettivi del primo e può generare, al primo stadio, un gioco con caratteristiche note, ad esempio un *chicken game*, rendendo evidente come l'architettura a fasi dell'interazione cambi la natura degli incentivi.

1.8 Equilibrio perfetto nei sottogiochi (SPE) e Insiemi informativi (Information sets)

Talvolta, nei giochi sequenziali, non basta trovare un equilibrio di Nash nella forma strategica, in quanto alcune strategie possono “funzionare” solo perché si basano su minacce non credibili fuori dal cammino di equilibrio. Per questo motivo si introduce l'equilibrio perfetto nei sottogiochi e, parallelamente, la nozione di insieme informativo per formalizzare i casi in cui un giocatore non conosce esattamente in quale nodo si trovi.

Definizione 1.71. Un *insieme informativo*, o *information set*, è un insieme di nodi decisionali tra i quali un giocatore non è in grado di distinguere, data l'informazione disponibile nel momento in cui deve muovere. Se un insieme informativo contiene più di un nodo, il gioco è a *informazione imperfetta*, ossia non è a informazione perfetta.

Osservazione 1.72. Se un giocatore non può distinguere tra i nodi di un insieme informativo, allora la sua strategia deve specificare la stessa mossa in ciascuno dei nodi contenuti nell'insieme informativo: la scelta è fatta a livello di informazione, non a livello di singolo nodo.

Osservazione 1.73. Gli insiemi informativi si assumono ben definiti nel senso che:

1. ciascun insieme informativo contiene nodi decisionali di un solo giocatore;
2. tutti i nodi nello stesso insieme informativo presentano lo stesso numero di mosse disponibili e le stesse etichette delle mosse in uscita.

In caso contrario, il giocatore riuscirebbe a distinguere tra i nodi e l'informazione non sarebbe rappresentata correttamente.

Definizione 1.74. Un nodo x dell'albero dà origine a un *sottogioco* se né x né alcuno dei suoi successori appartiene a un insieme informativo che contenga anche nodi che non sono successori di x . Il sottogioco è costituito dal nodo x e da tutti i suoi successori, con le stesse regole e gli stessi payoff del gioco originale.

Osservazione 1.75. In un gioco a informazione perfetta, cioè con insiemi informativi tutti singoletti, ogni nodo dà origine a un sottogioco. In presenza di informazione imperfetta, invece, alcuni nodi non possono iniziare un sottogioco perché "tagliare" l'albero a partire da quel nodo romperebbe un insieme informativo: esisterebbe una contingenza in cui un giocatore non saprebbe se si trova in un nodo che appartiene o no al sottogioco considerato.

Definizione 1.76. Un *equilibrio perfetto nei sottogiochi*, o *SPE*, è un profilo di strategie tale che, in ogni sottogioco del gioco originale, la restrizione, o continuazione, di tali strategie costituisce un equilibrio di Nash di quel sottogioco. Equivalentemente, uno SPE prescrive un comportamento ottimale in ogni eventualità, sia sul cammino di equilibrio sia fuori da esso.

Osservazione 1.77. In un gioco sequenziale rappresentato in forma strategica, possono esistere equilibri di Nash che prescrivono, in qualche nodo non raggiunto sul cammino di equilibrio, un'azione che non sarebbe ottimale se quel nodo venisse effettivamente raggiunto. In tal caso l'equilibrio si basa su una *minaccia non credibile*: l'avversario crede che il giocatore compirebbe una scelta subottimale, ma quella scelta non è razionale una volta che l'evento si materializza. Per questo motivo si dice che lo SPE è un raffinamento dell'equilibrio di Nash.

Osservazione 1.78. Per alberi finiti con informazione perfetta, lo SPE si ottiene applicando l'induzione all'indietro, o rollback, sull'albero. In questo caso rollback e SPE coincidono: la condizione di equilibrio in ogni sottogioco è esattamente ciò che garantisce che le mosse prescritte restino ottimali ogni volta che un nodo viene raggiunto.

Osservazione 1.79. Quando esistono insiemi informativi non singoletti, prima di applicare ragionamenti all'indietro occorre individuare tutti i sottogiochi ammissibili, cioè quelli che non spezzano insiemi informativi. Una procedura generale è la seguente: si sceglie un sottogioco minimale, cioè che non contiene altri sottogiochi propri, se ne calcola un equilibrio di Nash, eventualmente

anche in strategie miste, lo si sostituisce con un nodo terminale che assegna i payoff di equilibrio, e si itera fino a ridurre il gioco a un problema decisionale nei nodi iniziali. Ogni scelta di equilibrio nei sottogiochi può generare uno SPE diverso nel gioco originale.

Osservazione 1.80. Con più giocatori, soprattutto se il gioco sequenziale viene riscritto in forma strategica, può accadere che il numero di equilibri di Nash cresca molto, includendo profili che prescrivono azioni non ottimali in sottogiochi fuori dal cammino di equilibrio. La condizione di perfezione nei sottogiochi seleziona, tra questi, quelli in cui ogni giocatore si comporta razionalmente in ogni sottogioco, eliminando gli equilibri fondati su minacce non credibili.

Esempio 1.81. In un gioco a più stadi, può succedere che un equilibrio di Nash prescriva a un giocatore, in una contingenza che non si verifica sul cammino di equilibrio, un'azione che gli darebbe un payoff più basso rispetto a un'alternativa disponibile nello stesso sottogioco. Tale profilo può essere un equilibrio di Nash perché nessuno ha incentivo a deviare a monte, credendo nella minaccia; tuttavia non può essere uno SPE, perché appena quel sottogioco venisse effettivamente raggiunto la deviazione sarebbe conveniente. Lo SPE elimina esattamente questo tipo di incoerenze dinamiche.

1.9 Equilibri misti

In alcuni giochi simultanei non esiste alcun equilibrio di Nash in strategie pure e quindi ogni scelta deterministica può essere sfruttata dall'avversario. In questi casi l'idea naturale è evitare schemi prevedibili, consentendo randomizzazione. Gli equilibri misti formalizzano questa possibilità e permettono di descrivere situazioni in cui l'unica stabilità strategica passa attraverso probabilità.

Definizione 1.82. Una *strategia mista* è una distribuzione di probabilità sulle strategie pure disponibili a un giocatore. In particolare, nel caso di due strategie pure

$$\{A, B\},$$

una strategia mista è identificata da un parametro

$$p \in [0, 1]$$

che rappresenta la probabilità di giocare A e $1 - p$ la probabilità di giocare B .

Definizione 1.83. Il *supporto* di una strategia mista è l'insieme delle strategie pure a cui la strategia mista assegna probabilità strettamente positiva.

Definizione 1.84. Il payoff di una strategia mista è il *payoff atteso*, cioè la media dei payoff delle strategie pure pesata con le probabilità con cui tali strategie vengono giocate.

Definizione 1.85. Un *equilibrio di Nash in strategie miste* è un profilo di strategie, una per ciascun giocatore, eventualmente miste, in cui ciascun giocatore sta scegliendo una miglior risposta alla strategia dell'altro; quindi nessuno ha incentivo a deviare unilateralmente.

Teorema 1.86. Se si ammettono strategie miste, ogni gioco finito ammette almeno un equilibrio di Nash.

Osservazione 1.87. In un equilibrio misto, un giocatore randomizza tra strategie pure solo se è indifferente tra esse in termini di payoff atteso. In forma operativa, questo dà una regola di calcolo molto utile nei giochi 2×2 : per trovare la miscela ottimale di un giocatore si impone che essa renda l'avversario indifferente tra le sue due strategie pure. Questo è il *principio di indifferenza dell'avversario*. Nei giochi a somma costante, in particolare a somma zero, gli equilibri misti hanno una lettura immediata: ciascun giocatore cerca una miscela che non sia sfruttabile, nel senso che non lasci all'avversario una risposta pura chiaramente migliore. La miscela di equilibrio è quindi tale da tenere l'avversario in equilibrio tra le sue opzioni, impedendogli di ottenere un vantaggio sistematico.

Esempio 1.88. Nel gioco del punto a tennis non esiste equilibrio puro perché ogni scelta sistematica, come colpire sempre in una direzione o coprire sempre un lato, può essere sfruttata dall'avversario. L'equilibrio emerge quando entrambi i giocatori mescolano: le probabilità di equilibrio sono scelte in modo che ciascuna renda l'altro indifferente tra le proprie alternative, e quindi nessuna deviazione unilaterale aumenti il payoff atteso.

Osservazione 1.89. Anche nei giochi non a somma costante il principio di indifferenza resta uno strumento di calcolo. In questo caso, però, l'equilibrio misto può essere interpretato come un equilibrio di credenze: se ciascun giocatore crede che l'altro stia randomizzando con certe probabilità, allora la propria scelta ottimale, eventualmente ancora una miscela, risulta coerente con tali credenze, e la struttura delle probabilità diventa auto-rinforzante.

Osservazione 1.90. In alcuni giochi non a somma costante coesistono equilibri puri e un equilibrio misto, e l'esito atteso dell'equilibrio misto può risultare inferiore agli esiti degli equilibri puri. Il motivo è che la randomizzazione genera, con probabilità positiva, combinazioni non coordinate che abbassano il payoff atteso rispetto a un coordinamento stabile su un equilibrio puro.

Osservazione 1.91 (Effetti dei payoff sugli equilibri misti). Nei giochi con equilibrio misto, la variazione dei payoff può produrre effetti non immediati sulle probabilità di equilibrio. In particolare, modificare un payoff a favore di un giocatore non implica necessariamente che, in equilibrio, egli utilizzi più spesso l'azione che è stata resa più redditizia: in un'interazione strategica, infatti, anche l'avversario ricalibra la propria miscela, e la nuova combinazione di reazioni può generare risultati controintuitivi.

Osservazione 1.92. Quando uno o entrambi i giocatori dispongono di tre, o più, strategie pure, un equilibrio misto non deve necessariamente assegnare probabilità positive a tutte le strategie. In generale, un equilibrio può avere *supporto pieno*, cioè tutte le strategie sono usate con probabilità strettamente positiva, oppure *supporto ridotto*, cioè alcune strategie sono escluse e ricevono probabilità zero. La condizione caratteristica è la seguente: tutte le strategie usate nel supporto devono dare lo stesso payoff atteso contro la miscela avversaria; tutte le strategie non usate devono dare payoff atteso non superiore, tipicamente inferiore, rispetto al valore dell'equilibrio, altrimenti varrebbe la pena inserirle nel supporto.

Definizione 1.93. Si dice che un equilibrio misto ha *supporto pieno*, per un dato giocatore, se assegna probabilità strettamente positiva a tutte le strategie pure del giocatore. Si dice invece che ha *supporto ridotto* se almeno una strategia pura riceve probabilità zero.

Teorema 1.94 (Algoritmo per il calcolo di un equilibrio di Nash in strategie miste tramite enumerazione dei supporti). Si consideri un gioco finito a due giocatori in forma normale, in cui il giocatore 1 dispone di m strategie pure e il giocatore 2 dispone di n strategie pure. Un algoritmo generale per determinare gli equilibri di Nash in strategie miste è il seguente:

1. Si selezionano due sottoinsiemi non vuoti

$$I \subseteq \{1, \dots, m\} \quad \text{e} \quad J \subseteq \{1, \dots, n\},$$

interpretati come supporti candidati delle strategie miste dei due giocatori. Si pone

$$|I| = g, \quad |J| = h.$$

2. Si determinano due vettori di probabilità

$$x \in \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}^n$$

tali che:

$$x_i > 0 \text{ per ogni } i \in I, \quad x_i = 0 \text{ per ogni } i \notin I, \quad \sum_{i \in I} x_i = 1,$$

$$y_j > 0 \text{ per ogni } j \in J, \quad y_j = 0 \text{ per ogni } j \notin J, \quad \sum_{j \in J} y_j = 1.$$

Inoltre, tutte le strategie pure nel supporto di ciascun giocatore devono fornire lo stesso payoff atteso contro la miscela dell'avversario, cioè:

$$u_1(i, y) = u_1(i', y) \quad \text{per ogni } i, i' \in I,$$

$$u_2(x, j) = u_2(x, j') \quad \text{per ogni } j, j' \in J,$$

dove $u_1(i, y)$ indica il payoff atteso del giocatore 1 quando gioca la strategia pura i contro la strategia mista y del giocatore 2, e analogamente $u_2(x, j)$.

3. Le condizioni del punto precedente costituiscono un sistema di equazioni lineari nelle incognite x_i con $i \in I$ e y_j con $j \in J$. Si risolve il sistema e si scartano le soluzioni che non rispettano i vincoli di probabilità, ad esempio perché presentano componenti negative oppure somme diverse da 1.
4. Per ogni soluzione candidata (x, y) ottenuta, si verifica che nessuna strategia pura esclusa dal supporto renda un payoff atteso strettamente maggiore del valore comune delle strategie nel supporto, ossia:

$$u_1(i, y) \leq u_1(i^*, y) \quad \text{per ogni } i \notin I, \text{ per un qualunque } i^* \in I,$$

$$u_2(x, j) \leq u_2(x, j^*) \quad \text{per ogni } j \notin J, \text{ per un qualunque } j^* \in J.$$

Se tali disuguaglianze sono soddisfatte, allora (x, y) è un equilibrio di Nash con supporti I e J .

5. Ripetendo i punti precedenti per tutte le coppie (I, J) di supporti non vuoti, si ottiene l'insieme completo degli equilibri di Nash in strategie miste del gioco.

Osservazione 1.95. Il numero di coppie di supporti da esaminare cresce rapidamente con m e n , poiché è dell'ordine di

$$(2^m - 1)(2^n - 1).$$

Per questo motivo, al crescere del numero di strategie, l'algoritmo è concettualmente generale ma computazionalmente oneroso.

1.10 Giochi ripetuti

Definizione 1.96. Si chiama *gioco ripetuto* un gioco nel quale uno stesso gioco di base, o *stage game*, viene giocato più volte nel tempo, in periodi successivi.

Definizione 1.97. Si chiama *Prisoner's Dilemma* un gioco simultaneo a due giocatori nel quale ciascun giocatore dispone di due strategie, cooperare (C) oppure defezionare (D), e i payoff soddisfano le relazioni

$$T > R > P > S$$

e

$$2R > T + S,$$

dove:

- R è il payoff della cooperazione reciproca (C, C) ;
- T è il payoff del giocatore che defeziona mentre l'altro coopera (D, C) , dove T sta per *Temptation*;
- P è il payoff della defezione reciproca (D, D) , dove P sta per *Punishment*;
- S è il payoff del giocatore che coopera mentre l'altro defeziona (C, D) , il cosiddetto *sucker's payoff*.

Osservazione 1.98. Dalle relazioni precedenti segue che, per ciascun giocatore, la defezione domina strettamente la cooperazione, mentre l'esito (C, C) , pur essendo migliore di (D, D) , non costituisce equilibrio di Nash.

Osservazione 1.99. L'interesse teorico dei giochi ripetuti emerge in modo particolare quando il gioco di base ha struttura di Prisoner's Dilemma. In tal caso, infatti, la defezione è ottimale nel gioco giocato una sola volta, ma la ripetizione può introdurre incentivi alla cooperazione, poiché una deviazione presente può provocare punizioni future e quindi ridurre il vantaggio complessivo della scelta opportunistica.

Definizione 1.100. Nel contesto di un gioco ripetuto, si distingue tra **guadagno immediato da deviazione**, cioè l'incremento di payoff ottenuto nel periodo in cui un giocatore devia unilateralmente dalla cooperazione, e **perdita futura da deviazione**, cioè la riduzione di payoff che tale giocatore subisce nei periodi successivi a causa della rottura della cooperazione e dell'eventuale attivazione di punizioni.

Osservazione 1.101. Se la durata della relazione è sufficientemente lunga, la perdita complessiva dovuta alla cessazione della cooperazione può superare il guadagno ottenuto nel periodo della deviazione. Tuttavia, questo argomento non è sufficiente quando l'orizzonte temporale è finito e noto ai giocatori, poiché in tal caso interviene il ragionamento di induzione all'indietro.

Teorema 1.102 (Defezione in ogni periodo nel Prisoner's Dilemma ripetuto con orizzonte finito). Si consideri un Prisoner's Dilemma ripetuto per un numero finito e noto di periodi. Assumendo razionalità dei giocatori e conoscenza comune della struttura del gioco, l'unico esito ottenuto mediante induzione all'indietro consiste nella defezione in ogni periodo.

Dimostrazione. La dimostrazione segue l'argomento standard di retroinduzione. Nell'ultimo periodo non esistono conseguenze future da considerare, e dunque ciascun giocatore sceglie la defezione, che è la strategia dominante del gioco statico. Ma allora, essendo già determinato l'ultimo periodo, anche il penultimo non può più influenzare il futuro in modo favorevole alla cooperazione; di conseguenza, anche nel penultimo periodo la defezione è ottimale. Ripetendo lo stesso ragionamento a ritroso, si conclude che la defezione è razionale in ogni periodo. \square

Osservazione 1.103. Quando, invece, la durata della relazione non è pre-determinata, oppure quando i giocatori attribuiscono probabilità positiva alla continuazione del gioco, la cooperazione può diventare sostenibile. In questo caso acquistano importanza le *strategie contingenti*, cioè strategie che dipendono dal comportamento osservato nei periodi precedenti.

Definizione 1.104. Si chiama *strategia contingente* una strategia che prescrive l'azione da compiere in un dato periodo sulla base della storia del gioco, cioè delle azioni osservate nei periodi precedenti.

Definizione 1.105. La *grim strategy* è una strategia contingente che prescrive di cooperare finché l'avversario coopera e, alla prima deviazione osservata, di passare alla defezione per tutti i periodi successivi. La strategia *Tit-for-Tat*, invece, prescrive di cooperare nel primo periodo e, in ciascun periodo successivo, di ripetere l'azione scelta dall'avversario nel periodo precedente. In particolare, essa punisce una deviazione con una defezione nel periodo successivo, ma ritorna alla cooperazione non appena l'avversario torna a cooperare.

Definizione 1.106. Sia $r > 0$ il tasso di rendimento. Si definisce il *fattore di sconto* il numero

$$\delta = \frac{1}{1+r}.$$

Esso misura il peso attribuito ai payoff futuri rispetto al payoff presente: quanto più δ è vicino a 1, tanto più il futuro è rilevante nelle decisioni del giocatore.

Definizione 1.107. Se vi è una probabilità p che il gioco prosegua per un ulteriore periodo, il fattore rilevante per la valutazione del futuro diventa

$$p\delta.$$

Ponendo

$$p\delta = \frac{1}{1+\rho},$$

dove ρ è l'*effective rate of return*, tale quantità sintetizza congiuntamente l'effetto del tasso di sconto e della probabilità di continuazione del gioco.

Osservazione 1.108. Il significato economico di questa grandezza è immediato: valori elevati di ρ corrispondono a un futuro relativamente poco importante rispetto al presente, mentre valori piccoli di ρ corrispondono a situazioni in cui i payoff futuri pesano molto. In particolare, ρ cresce quando la probabilità di continuazione p diminuisce oppure quando il tasso r aumenta.

Teorema 1.109. Si consideri un Prisoner's Dilemma ripetuto in cui un giocatore affronta un avversario che adotta Tit-for-Tat. Denotando con H il payoff della deviazione unilaterale, con C il payoff della cooperazione reciproca e con D il payoff della defezione reciproca, la deviazione iniziale è conveniente se e solo se

$$\rho > \frac{C-D}{H-C}.$$

Equivalentemente, la cooperazione è sostenibile quando

$$\rho \leq \frac{C - D}{H - C}.$$

Teorema 1.110. Si consideri un Prisoner's Dilemma ripetuto in cui l'avversario adotta una strategia di tipo grim, ossia una cooperazione iniziale seguita da defezione permanente dopo la prima deviazione osservata. Denotando con H il payoff della deviazione unilaterale, con C il payoff della cooperazione reciproca e con L il payoff del giocatore che coopera mentre l'altro defeziona, la deviazione permanente è conveniente se e solo se

$$\rho > \frac{C - L}{H - C} - 1.$$

Equivalentemente, la cooperazione è sostenibile quando

$$\rho \leq \frac{C - L}{H - C} - 1.$$

Osservazione 1.111. Anche in questo caso la convenienza della deviazione dipende dal confronto tra beneficio immediato e severità della punizione. Una punizione più severa, cioè una differenza $C - L$ più elevata, riduce l'attrattiva della deviazione; al contrario, una punizione debole oppure un guadagno immediato molto alto rendono più difficile sostenere la cooperazione nel lungo periodo.

Il primo capitolo ha introdotto la teoria dei giochi nella sua formulazione classica, nella quale i giocatori vengono descritti come soggetti razionali che scelgono strategie sulla base di un confronto consapevole tra payoff, aspettative e possibili risposte degli avversari. Sebbene, come verrà illustrato a breve, il modello sviluppato nel presente lavoro appartenga invece alla teoria evolutiva dei giochi, risulta fondamentale sottolineare che questa parte preliminare resta essenziale per almeno due ragioni. In primo luogo, fornisce il linguaggio teorico di base dell'intero elaborato in quanto nozioni come strategia, payoff, equilibrio, Prisoner's Dilemma, giochi ripetuti e stabilità nascono infatti nel quadro classico e costituiscono il punto di partenza necessario anche per la loro successiva reinterpretazione in chiave evolutiva. In secondo luogo, inoltre, mostra come la teoria dei giochi evolutiva non nasca come una interpretazione di quella classica: le stesse strutture strategiche vengono studiate non più come esito di un calcolo razionale individuale, bensì come espressione di processi dinamici di diffusione, imitazione e selezione all'interno di una popolazione. In questo senso, il passaggio dal primo al secondo capitolo rappresenta un cambiamento di prospettiva: la teoria evolutiva viene interpretata come un raffinamento della classica in quanto permette inoltre di domandarsi se, e a quali condizioni, quegli stessi esiti possano emergere, persistere o scomparire quando le strategie competono nel tempo in una popolazione strutturata. Per il modello proposto in questa tesi, tale collegamento è particolarmente importante, poiché il problema della cooperazione nasce proprio da una struttura classica, il Prisoner's Dilemma, che viene poi riformulata in un contesto evolutivo.

Capitolo 2

Teoria evolutiva

2.1 Impostazione generale

La teoria evolutiva dei giochi nasce dall'esigenza di studiare situazioni nelle quali il successo di una strategia non dipende soltanto dalle sue proprietà intrinseche, ma anche dalla composizione della popolazione nella quale essa è presente. In questo contesto, infatti, il payoff non viene più interpretato come semplice risultato di una scelta razionale individuale, bensì come misura del successo riproduttivo o, più in generale, della capacità di una strategia di diffondersi nel tempo. L'attenzione si sposta quindi dal comportamento del singolo decisore alla dinamica collettiva delle frequenze strategiche, e la nozione di stabilità assume un significato propriamente evolutivo: una configurazione è stabile se resiste all'invasione di strategie alternative inizialmente rare. Inoltre, nella teoria evolutiva dei giochi non si assume, in linea di principio, che i giocatori siano perfettamente razionali o capaci di calcolare una strategia ottimale. Le strategie sono invece pensate come "incorporate" nel comportamento degli individui e la selezione agisce favorendo quelle che ottengono payoff medi più elevati. In questo senso, le strategie di maggior successo tendono a riprodursi o a diffondersi più rapidamente, mentre quelle meno efficaci tendono a ridursi progressivamente. Il quadro di riferimento non è quindi quello della scelta istantanea, ma quello della dinamica di popolazione.

Definizione 2.1. Si chiama *gioco evolutivo* un modello nel quale una popolazione è composta da individui associati a differenti strategie o fenotipi, gli incontri tra individui avvengono secondo una certa regola di interazione, il payoff ottenuto nelle interazioni viene interpretato come fitness, e le frequenze delle strategie evolvono nel tempo in funzione del loro successo relativo. Si dice che la fitness di una strategia è *dipendente dalla frequenza* quando il suo valore dipende dalle proporzioni relative delle strategie presenti nella popolazione. In tal caso il vantaggio di una strategia può cambiare al variare della composizione della popolazione.

Osservazione 2.2. La *selezione costante* costituisce un caso particolare della selezione dipendente dalla frequenza. Nel caso costante, una strategia ha fitness sistematicamente maggiore di un'altra indipendentemente dalla composizione della popolazione; nel caso dipendente dalla frequenza, invece, una strategia può essere favorita quando è rara e sfavorita quando è comune, oppure viceversa. È precisamente questa dipendenza dalla composizione della popolazione che rende la teoria evolutiva dei giochi il quadro naturale per lo studio di molti fenomeni biologici e sociali.

Definizione 2.3. Si consideri una popolazione in cui siano presenti due strategie A e B . Il gioco evolutivo associato può essere descritto mediante la matrice dei payoff

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dove a è il payoff di A contro A , b è il payoff di A contro B , c è il payoff di B contro A e d è il payoff di B contro B .

Definizione 2.4. Se x_A e x_B denotano le frequenze di A e B , con

$$x_A + x_B = 1,$$

allora le fitness attese delle due strategie sono date da

$$f_A = ax_A + bx_B, \quad f_B = cx_A + dx_B.$$

Tali espressioni si ottengono assumendo che gli incontri avvengano casualmente e che la probabilità di incontrare un individuo di tipo A o B coincida con la sua frequenza nella popolazione.

Osservazione 2.5. L'idea fondamentale consiste nell'identificare il payoff atteso con la fitness. In tal modo, la dinamica evolutiva non dipende più soltanto dalla struttura statica del gioco, ma anche dal modo in cui le frequenze strategiche retroagiscono sui payoff medi. Questo passaggio permette di collegare direttamente il linguaggio della teoria dei giochi a quello della selezione naturale.

Definizione 2.6. Si parla di *equilibrio evolutivo monomorfico* quando la popolazione converge verso una configurazione in cui sopravvive una sola strategia. Si parla invece di *equilibrio evolutivo polimorfico* quando due o più strategie coesistono stabilmente nella popolazione con frequenze positive.

Osservazione 2.7. L'interpretazione di una configurazione polimorfica in teoria evolutiva dei giochi è diversa da quella di una strategia mista nella teoria dei giochi classica. In quest'ultima un singolo giocatore randomizza tra più azioni; nel contesto evolutivo, invece, ogni individuo utilizza tipicamente una strategia pura, ma la popolazione, nel suo complesso, presenta una miscela di strategie differenti.

2.2 Equilibrio di Nash e strategia evolutivamente stabile (ESS)

Definizione 2.8. Per la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la strategia A è un *equilibrio di Nash* se

$$a \geq c,$$

ed è un *equilibrio di Nash stretto* se

$$a > c.$$

Analogamente, la strategia B è un equilibrio di Nash se

$$d \geq b,$$

ed è un equilibrio di Nash stretto se

$$d > b.$$

Definizione 2.9. Si consideri una popolazione quasi interamente composta da individui che giocano A , nella quale venga introdotta una frazione infinitesima di mutanti che giocano B . La strategia A si dice *evolutiveamente stabile*, o *ESS*, se la selezione si oppone all'invasione di B . Nel caso della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ciò equivale a richiedere che valga almeno una delle seguenti condizioni:

$$a > c,$$

oppure

$$a = c \quad \text{e} \quad b > d.$$

Osservazione 2.10. La prima condizione esprime che la strategia residente ottiene un payoff strettamente maggiore del mutante quando incontra sé stessa; la seconda interviene nel caso di uguaglianza e richiede allora che la strategia residente performi meglio contro il mutante di quanto il mutante performi contro sé stesso.

Osservazione 2.11. Questa caratterizzazione consente di collegare immediatamente la nozione di equilibrio di Nash con quella di stabilità evolutiva. Tuttavia, le due nozioni non coincidono: l'equilibrio di Nash esprime una proprietà statica di miglior risposta, mentre la stabilità evolutiva richiede resistenza all'invasione da parte di mutanti inizialmente rari. Proprio questa seconda esigenza conduce alla definizione di ESS.

Definizione 2.12. Sia

$$\{S_1, \dots, S_n\}$$

l'insieme delle strategie pure e sia

$$E(S_i, S_j)$$

il payoff di S_i contro S_j . La strategia S_k è una **ESS** se, per ogni $i \neq k$, vale almeno una delle due condizioni:

$$E(S_k, S_k) > E(S_i, S_k),$$

oppure

$$E(S_k, S_k) = E(S_i, S_k) \quad \text{e} \quad E(S_k, S_i) > E(S_i, S_i).$$

Se invece vale almeno una tra

$$E(S_k, S_k) > E(S_i, S_k)$$

oppure

$$E(S_k, S_k) = E(S_i, S_k) \quad \text{e} \quad E(S_k, S_i) \geq E(S_i, S_i),$$

la strategia S_k si dice **stabile contro invasione per selezione**, oppure **ESS debole** (*weak ESS*).

Proposizione 2.13. Ogni equilibrio di Nash stretto è una ESS; ogni ESS è una weak ESS; ogni weak ESS è un equilibrio di Nash. Quindi:

$$\text{Nash stretto} \implies \text{ESS} \implies \text{weak ESS} \implies \text{Nash}.$$

Osservazione 2.14. La stabilità evolutiva, quindi, è una nozione più forte del semplice equilibrio di Nash. In particolare, esistono equilibri di Nash che non sono ESS, perché una piccola popolazione di mutanti può comunque invaderli con successo. Per questa ragione, in un contesto evolutivo, la nozione di ESS risulta spesso più adeguata della nozione statica di equilibrio.

2.3 Dinamica del replicatore (*replicator dynamics*)

Definizione 2.15. Sia x_i la frequenza della strategia i , sia f_i la sua fitness attesa e sia

$$\phi = \sum_{i=1}^n x_i f_i$$

la fitness media della popolazione. La **dinamica del replicatore** è il sistema differenziale

$$\dot{x}_i = x_i(f_i - \phi), \quad i = 1, \dots, n.$$

Essa descrive l'evoluzione temporale delle frequenze strategiche quando le strategie con fitness superiore alla media aumentano la propria frequenza, mentre quelle con fitness inferiore alla media la diminuiscono.

Definizione 2.16. Se

$$A = [a_{ij}]$$

è una matrice dei payoff di dimensione $n \times n$, allora la fitness attesa della strategia i è data da

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

mentre la fitness media della popolazione è

$$\phi = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Sostituendo tali espressioni nella dinamica del replicatore si ottiene la forma esplicita del sistema dinamico associato al gioco.

Osservazione 2.17. La dinamica del replicatore è definita sul *simpleso*

$$S_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

L'interno del simpleso è invariante: una traiettoria che parte nell'interno rimane nell'interno per ogni tempo futuro, anche se può convergere al bordo. Anche ogni faccia del simpleso è invariante. In particolare, una strategia assente inizialmente non compare spontaneamente nella dinamica del replicatore puro, che infatti modella selezione senza mutazione.

Osservazione 2.18. I vertici del simpleso, corrispondenti a popolazioni pure, sono sempre punti fissi della dinamica. Inoltre, se una strategia è un equilibrio di Nash stretto oppure una ESS, allora il vertice del simpleso che rappresenta la popolazione interamente composta da quella strategia è asintoticamente stabile.

Proposizione 2.19. Per $n = 2$, ponendo $x = x_A$ e $1 - x = x_B$, la dinamica del replicatore si riduce a

$$\dot{x} = x(1 - x)[f_A(x) - f_B(x)].$$

Nel caso lineare indotto dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$\dot{x} = x(1 - x)[(a - b - c + d)x + b - d].$$

Corollario. Gli equilibri della precedente equazione sono $x = 0$, $x = 1$ e gli eventuali punti interni $x^* \in (0, 1)$ tali che

$$f_A(x^*) = f_B(x^*).$$

In particolare, nel caso non degenerare il punto interno si calcola come

$$x^* = \frac{d - b}{a - b - c + d}.$$

Osservazione 2.20. Nel caso di due strategie la classificazione qualitativa della dinamica è completa. Si hanno cinque possibilità fondamentali: dominanza di A , dominanza di B , bistabilità, coesistenza stabile e neutralità. La classificazione dipende unicamente dal confronto tra gli elementi della matrice dei payoff.

Proposizione 2.21. Per la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

valgono i seguenti casi:

1. Se

$$a > c \quad \text{e} \quad b > d,$$

allora A domina B e la dinamica converge verso $x = 1$.

2. Se

$$a < c \quad \text{e} \quad b < d,$$

allora B domina A e la dinamica converge verso $x = 0$.

3. Se

$$a > c \quad \text{e} \quad b < d,$$

allora si ha **bistabilità**: $x = 0$ e $x = 1$ sono stabili, mentre esiste un equilibrio interno instabile x^* , cioè suscettibile a piccole deviazioni.

4. Se

$$a < c \quad \text{e} \quad b > d,$$

allora si ha **coesistenza stabile**: $x = 0$ e $x = 1$ sono instabili, mentre esiste un equilibrio interno stabile x^* .

5. Se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d,$$

allora le due strategie sono neutrali e ogni punto dell'intervallo è un equilibrio.

Il caso di coesistenza stabile corrisponde a una configurazione polimorfica asintoticamente stabile; il caso di bistabilità, invece, corrisponde alla presenza di due attrattori monomorfici, e l'esito finale dipende dalla condizione iniziale.

2.4 Esempi notevoli

Esempio 2.22. Nel *Chicken game*, due giocatori si sfidano sfrecciando l'uno contro l'altro in un'unica corsia. I giocatori scelgono tra la *strategia Wimp*, che consiste nello sterzare, evitare il pericolo ma risultare meno coraggioso, e la *strategia Macho*, che consiste nel proseguire dritto a prescindere dalle scelte dell'avversario e dimostrare coraggio. Chiaramente, l'esito migliore per ogni giocatore si ottiene scegliendo Macho contro un avversario Wimp, con payoff rispettivi $(1, -1)$, l'esito peggiore si ottiene scegliendo Macho contro Macho, con payoff $(-2, -2)$, mentre l'esito medio, o nullo, si ottiene scegliendo Wimp contro Wimp, con payoff $(0, 0)$. Reinterpretando evolutivamente il gioco come interazione tra i due fenotipi, ciascuno è favorito quando è relativamente raro nella popolazione. Se x denota la frequenza dei Macho, le fitness risultano

$$f_{\text{Wimp}} = -x, \quad f_{\text{Macho}} = 1 - 3x.$$

Ne segue che Macho è più fit se

$$x < \frac{1}{2},$$

mentre lo è Wimp se

$$x > \frac{1}{2}.$$

Pertanto la popolazione evolve verso la composizione

$$x^* = \frac{1}{2},$$

che costituisce una *ESS polimorfica*. Le configurazioni monomorfe estreme (tutti Macho o tutti Wimp), pur rappresentando i vertici del semplice evolutivo, non sono evolutivamente stabili, poiché possono essere invase da una piccola frazione di mutanti del tipo opposto.

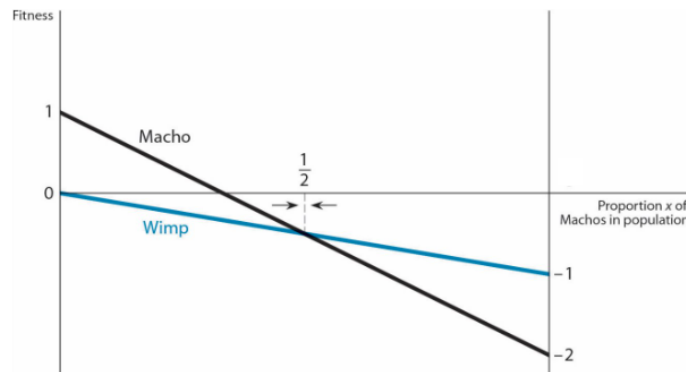


Figura 2.1: Andamento delle fitness nel caso Wimp–Macho. Il punto di intersezione tra le due rette individua la frequenza critica $x^* = \frac{1}{2}$, corrispondente a un equilibrio polimorfico evolutivamente stabile.

Esempio 2.23. Nel gioco *Assurance*, invece, due giocatori devono incontrarsi in un luogo S oppure in un luogo L . Gli esiti possibili dipendono da un incontro in S , con payoff $(1, 1)$, oppure in L , con payoff $(2, 2)$, mentre tutti gli altri esiti, corrispondenti all'incontro mancato, forniscono payoff $(0, 0)$. Non è difficile calcolare che, se x denota la proporzione di individui che adottano la strategia S , le fitness sono

$$f_S = x, \quad f_L = 2(1 - x).$$

L'uguaglianza

$$f_S = f_L$$

si verifica per

$$x = \frac{2}{3},$$

ma questo punto interno non è una ESS: una piccola perturbazione nella composizione della popolazione rende infatti una delle due strategie strettamente più fit dell'altra e spinge la dinamica verso uno dei due vertici. Le sole ESS sono dunque le due configurazioni monomorfe estreme. Ciò mostra che una configurazione di uguaglianza delle fitness non coincide automaticamente con una configurazione evolutivamente stabile.

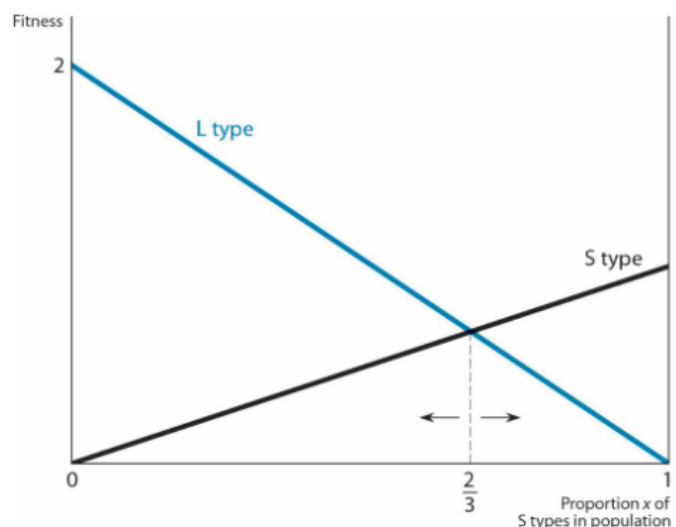


Figura 2.2: Andamento delle fitness nel gioco di Assurance. L'intersezione tra f_S e f_L si verifica in $x = \frac{2}{3}$, ma tale equilibrio interno non è evolutivamente stabile; la dinamica converge infatti verso uno dei due vertici a seconda della condizione iniziale.

Osservazione 2.24. La dinamica evolutiva non seleziona necessariamente l'equilibrio migliore dal punto di vista del payoff complessivo. Nel gioco di Assurance, ad esempio, la configurazione finale dipende dalle frequenze iniziali e può convergere sia verso una popolazione interamente coordinata su un esito

preferibile, sia verso una popolazione coordinata su un esito meno efficiente. La stabilità evolutiva è quindi una nozione distinta dall'ottimalità sociale.

Esempio 2.25. Si consideri il *Prisoner's Dilemma* in forma simmetrica, con cooperazione C e defezione D , e payoff tali che

$$T > R > P > S.$$

Se

$$x \in [0, 1]$$

denota la frequenza dei cooperatori nella popolazione, allora $1 - x$ rappresenta la frequenza dei defezionatori. Le fitness attese delle due strategie sono

$$f_C = xR + (1 - x)S, \quad f_D = xT + (1 - x)P.$$

Poiché, per definizione del dilemma del prigioniero, si ha

$$T > R \quad \text{e} \quad P > S,$$

segue che

$$f_D > f_C \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

La strategia D domina quindi strettamente la strategia C , e la dinamica del replicatore spinge progressivamente la popolazione verso la scomparsa dei cooperatori.

Osservazione 2.26. In questo caso l'unico equilibrio asintoticamente stabile è dato da

$$x = 0,$$

cioè dalla popolazione interamente composta da defezionatori. Tale configurazione costituisce una ESS, poiché una piccola frazione di cooperatori introdotta in una popolazione di soli defezionatori ottiene un payoff inferiore e non può quindi invadere la popolazione residente. Viceversa, la configurazione

$$x = 1,$$

corrispondente a una popolazione interamente cooperativa, non è evolutivamente stabile, poiché un piccolo numero di defezionatori otterrebbe un payoff maggiore e tenderebbe a diffondersi.

La figura seguente mostra graficamente proprio questo comportamento: al procedere del tempo, la frequenza dei cooperatori diminuisce fino ad annullarsi, confermando che, in assenza di ulteriori meccanismi o vincoli strutturali, il Prisoner's Dilemma seleziona la defezione e conduce alla progressiva scomparsa della cooperazione.

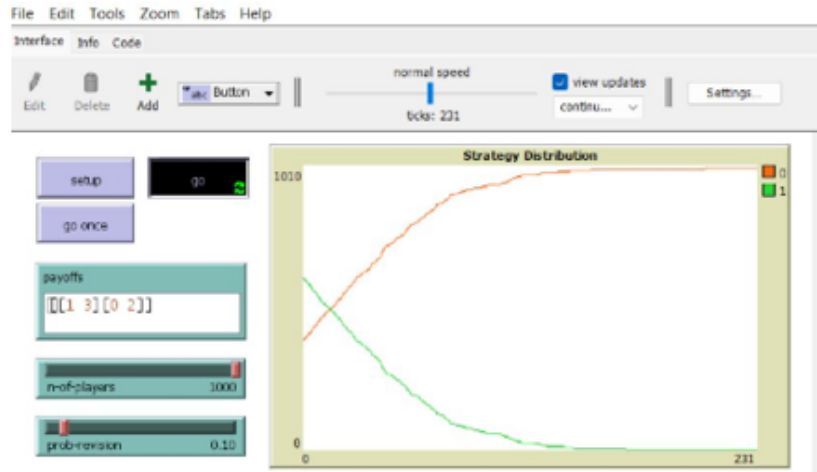


Figura 2.3: Esempio di simulazione della dinamica evolutiva nel Prisoner's Dilemma non strutturato. La frequenza dei cooperatori decresce nel tempo fino a scomparire.

Osservazione 2.27. Nel caso di più di due strategie, la geometria della dinamica diventa più ricca. Per $n = 3$ il simpleso S_3 è un triangolo e possono emergere fenomeni qualitativamente nuovi, come dominanza ciclica e orbite oscillanti. In particolare, il gioco *Sasso-Carta-Forbici*, o *Rock-Paper-Scissors*, costituisce l'esempio canonico di dominanza ciclica: una strategia batte la seconda, la seconda batte la terza e la terza batte la prima.

Esempio 2.28. Nel gioco simmetrico *Rock-Paper-Scissors* esiste un unico equilibrio interno dato da

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Nel caso perfettamente simmetrico tale equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile: esso è circondato da orbite periodiche neutrali. Piccole perturbazioni della matrice possono però modificare qualitativamente il ritratto di fase, producendo oscillazioni smorzate verso un equilibrio stabile oppure oscillazioni di ampiezza crescente verso il bordo del simpleso.

Proposizione 2.29. La dinamica del replicatore non cambia se a tutti gli elementi di una stessa colonna della matrice dei payoff si aggiunge una medesima costante. In particolare, sottraendo da ogni colonna il suo elemento diagonale, è possibile trasformare una matrice in una matrice equivalente con diagonale nulla, senza alterare la dinamica.

Proposizione 2.30. Per una matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix},$$

che rappresenta un gioco *Rock-Paper-Scissors* generale, si hanno due possibilità fondamentali:

1. se

$$a_1 a_2 a_3 < b_1 b_2 b_3,$$

l'equilibrio interno unico è globalmente stabile ed è raggiunto con oscillazioni smorzate;

2. se

$$a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3,$$

l'equilibrio interno è instabile e le traiettorie convergono verso il bordo del simpleso lungo oscillazioni di ampiezza crescente, con formazione di un cosiddetto *ciclo eteroclinico attrattivo*, ovvero una traiettoria limite che passa sempre più vicino a una successione di punti di equilibrio situati sul bordo del simpleso, collegandoli uno dopo l'altro.

Proposizione 2.31. Per la dinamica del replicatore con n strategie, un equilibrio interno è dato da una soluzione del sistema

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n, \quad x_1 + \dots + x_n = 1.$$

In condizioni non degeneri, il sistema ammette al più un equilibrio interno isolato. Se tale equilibrio non esiste, allora le traiettorie convergono al bordo del simpleso. Nei casi degeneri, invece, può esistere una varietà di equilibri interni, che possono essere stabili ma non asintoticamente stabili.

2.5 Dilemma del Prigioniero ripetuto in chiave evolutiva

Si consideri un *Prisoner's Dilemma* simmetrico a due giocatori con strategie C (cooperare) e D (defezionare), come definito in precedenza. Si supponga che ogni coppia di individui giochi il Prisoner's Dilemma per un numero fissato

$$n \geq 2$$

di round e che il payoff complessivo dell'interazione sia dato dalla somma dei payoff ottenuti nei singoli round. Allora, per le due strategie *Always Defect* (A) e *Tit-for-Tat* (T) si ottengono i seguenti payoff complessivi:

$$u(A, A) = nP,$$

$$u(T, T) = nR,$$

$$u(A, T) = T + (n - 1)P,$$

$$u(T, A) = S + (n - 1)P.$$

Le espressioni precedenti si giustificano direttamente dalla struttura delle due strategie. Se due giocatori A si incontrano, entrambi defezionano in ogni round, e ciascuno riceve P per n volte. Se due giocatori T si incontrano, entrambi cooperano sempre, e ciascuno riceve R per n round. Se invece A incontra T , nel primo round A ottiene T e T ottiene S ; dal secondo round in poi, poiché Tit-for-Tat imita la defezione osservata, entrambi defezionano e ciascuno riceve P in ciascuno dei rimanenti $n - 1$ round.

Osservazione 2.32. Sia

$$x \in [0, 1]$$

la frequenza della strategia T nella popolazione; la frequenza della strategia A è allora $1 - x$. Assumendo incontri casuali, le fitness attese delle due strategie sono

$$\begin{aligned} f_T(x) &= x u(T, T) + (1 - x) u(T, A), \\ f_A(x) &= x u(A, T) + (1 - x) u(A, A). \end{aligned}$$

Sostituendo i payoff complessivi precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned} f_T(x) &= xnR + (1 - x)[S + (n - 1)P], \\ f_A(x) &= x[T + (n - 1)P] + (1 - x)nP. \end{aligned}$$

Proposizione 2.33. La frequenza critica x^* alla quale le due strategie hanno la stessa fitness si ottiene imponendo

$$f_T(x^*) = f_A(x^*),$$

da cui segue

$$x^* = \frac{P - S}{n(R - P) - (T - P) + (P - S)}.$$

Osservazione 2.34. La quantità x^* rappresenta una soglia di separazione tra i due bacini di attrazione, quando il denominatore è positivo. Se la frequenza iniziale di Tit-for-Tat supera tale soglia, la fitness di T eccede quella di A e la selezione favorisce la diffusione di T ; se invece la frequenza iniziale è inferiore alla soglia, la strategia Always Defect resta favorita. Tale formulazione, inoltre, mostra con chiarezza che la soglia critica non è un dato misterioso, ma dipende direttamente dai payoff dello *stage game* e dal numero di ripetizioni n . In particolare, quanto più grande è n , tanto più il vantaggio della cooperazione reciproca, accumulato negli incontri tra due giocatori Tit-for-Tat, tende a controbilanciare il guadagno immediato che Always Defect ottiene nel primo round contro un cooperatore.

Proposizione 2.35. Se il punto

$$x^* \in (0, 1),$$

allora esso è un equilibrio interno della dinamica evolutiva associata alle due strategie A e T . Nei casi considerati, tale equilibrio interno funge da soglia instabile: per

$$x > x^*$$

la dinamica converge verso la popolazione tutta T , mentre per

$$x < x^*$$

converge verso la popolazione tutta composta dalla strategia A . Le configurazioni monomorfe corrispondenti a popolazione tutta A e popolazione tutta T possono risultare entrambe evolutivamente stabili, mentre l'equilibrio interno non è una ESS. Ciò significa che il successo di Tit-for-Tat non dipende solo dalle sue proprietà intrinseche, ma anche dalla sua frequenza iniziale nella popolazione: se troppo rara, essa non riesce a invadere una popolazione dominata da Always Defect; se sufficientemente diffusa, può invece affermarsi e condurre la popolazione verso la cooperazione.

Capitolo 3

Un modello per lo studio della cooperazione in una popolazione fissata

3.1 Introduzione e ricerche precedenti nel merito

La cooperazione merita di essere studiata non soltanto per la sua rilevanza teorica, ma anche perché attraversa molti ambiti della vita quotidiana e dell'organizzazione sociale. Sistemi di trasporto, mercati, reti economiche, gestione di risorse condivise e coordinamento tra individui richiedono spesso comportamenti nei quali il vantaggio collettivo dipende dalla disponibilità dei singoli a non perseguire soltanto il beneficio immediato. In termini evolutivi, inoltre, la cooperazione ha avuto un ruolo decisivo nell'emergere di livelli crescenti di organizzazione biologica, perché ha reso possibile l'integrazione di unità più semplici in strutture più complesse. Non a caso scienziati dell'Università di Harvard, come Martin Novak, la classificano come il terzo pilastro dell'evoluzione, insieme alla mutazione e alla selezione naturale. Questa centralità è stata riconosciuta in modo esplicito anche dalla rivista *Science*, che nel 2005 incluse la domanda "How did cooperative behavior evolve?" tra i 25 grandi interrogativi ancora aperti della scienza. La formulazione del problema è nota: se la selezione naturale favorisce individui più adatti a massimizzare il proprio successo, occorre spiegare come possano emergere e mantenersi comportamenti che, almeno localmente, sembrano implicare un costo per chi li adotta. La letteratura successiva ha mostrato che non esiste una sola risposta, ma un insieme di meccanismi possibili, tra i quali parentela, reciprocità, struttura spaziale e organizzazione in gruppi o insiemi. Proprio per queste ragioni, quindi, il problema della sua origine e della sua persistenza continua a occupare una posizione centrale nella ricerca contemporanea.

In questa prospettiva, la teoria evolutiva dei giochi costituisce uno strumento

particolarmente adatto, perché consente di studiare la diffusione di comportamenti in popolazioni nelle quali il payoff viene reinterpretato come fitness e dipende dalla composizione del sistema. È noto da tempo ai matematici che, per i motivi illustrati nel capitolo precedente, in un Prisoner's Dilemma non strutturato i cooperatori tendono in generale a essere soppiantati dai defezionatori; la questione decisiva diventa allora capire quali caratteristiche della struttura della popolazione possano modificare questo esito. Una parte rilevante della ricerca degli ultimi anni si è quindi concentrata proprio sul ruolo della struttura, cioè su chi interagisce con chi, con quali vincoli e con quali possibilità di movimento o imitazione.

Un primo passaggio fondamentale nello studio della cooperazione in popolazioni strutturate è rappresentato dalle ricerche sui cosiddetti *giochi spaziali* e, successivamente, dalla *teoria evolutiva su grafi* o *evolutionary graph theory*. Nel caso dei giochi spaziali, gli individui non interagiscono con l'intera popolazione, ma soltanto con i propri vicini in una griglia o, più in generale, in una configurazione geometrica locale. Questo cambiamento modifica profondamente la dinamica evolutiva, in quanto mentre in popolazioni omogenee il Prisoner's Dilemma conduce tipicamente alla scomparsa dei cooperatori, in presenza di struttura spaziale possono emergere fenomeni di coesistenza, sopravvivenza in cluster e persistenza di lungo periodo della cooperazione. L'idea centrale è che i cooperatori, se sufficientemente vicini tra loro, possano sostenersi reciprocamente e resistere meglio all'invasione dei defezionatori; tale meccanismo è stato poi indicato come *reciprocità spaziale*. Gli studi sui giochi spaziali hanno inoltre mostrato che la struttura locale non produce soltanto effetti quantitativi sulle frequenze finali, ma può generare una dinamica qualitativamente molto ricca: in funzione della geometria scelta, della regola di aggiornamento e dei parametri del gioco, infatti, possono comparire configurazioni statiche, oscillazioni, equilibri dinamici e pattern spaziali molto complessi. In particolare, per il Prisoner's Dilemma su reticoli bidimensionali sono stati osservati frattali dinamici, configurazioni a caleidoscopio e forme di coesistenza che non compaiono nei modelli non strutturati. Tali risultati dipendono anche dalla regola temporale adottata: aggiornamenti sincroni e deterministici tendono a produrre una maggiore ricchezza di pattern, mentre l'introduzione di aggiornamenti asincroni o stocastici riduce spesso la complessità geometrica, pur lasciando possibile una lunga coesistenza tra cooperazione e defezione.

Un secondo sviluppo decisivo è costituito dalla *evolutionary graph theory*, che fornisce un quadro più generale e astratto per descrivere l'effetto della struttura della popolazione sull'evoluzione. In questo approccio gli individui occupano i vertici di un grafo e gli archi descrivono le possibili relazioni di sostituzione, riproduzione o imitazione. Il punto di riferimento classico è il *Moran process*, cioè il processo in popolazione non strutturata nel quale, a ogni passo, un individuo viene scelto con probabilità proporzionale alla fitness e il suo discendente sostituisce un altro individuo. La teoria dei grafi evolutivi studia allora come la probabilità di fissazione di una nuova strategia cambi quando questa dina-

mica viene trasferita su una rete non omogenea. I risultati principali mostrano che la struttura del grafo non è neutrale: alcuni grafi si comportano, dal punto di vista della fissazione, come la popolazione non strutturata, mentre altri amplificano l'effetto della selezione oppure lo sopprimono. In questo contesto assumono particolare rilievo risultati generali come il *teorema isotermale*, che caratterizza una vasta classe di grafi aventi la stessa probabilità di fissazione del Moran process, e il *circulation theorem*, che estende tale equivalenza a una famiglia più ampia di strutture pesate. Quando la graph theory evolutiva viene applicata direttamente ai giochi, e non soltanto alla selezione costante, emerge inoltre un fatto di grande rilievo per il problema della cooperazione: il modo in cui si aggiorna la popolazione conta almeno quanto la struttura stessa. In particolare, su grafi regolari e per opportune regole di aggiornamento locale, la cooperazione può risultare favorita oltre determinate soglie del rapporto beneficio-costi. Nel complesso, queste correnti di ricerca hanno mostrato con chiarezza che l'esito evolutivo non dipende soltanto dalla matrice dei payoff, ma anche dalla forma della popolazione, dalla località delle interazioni e dal meccanismo con cui gli individui imitano, sostituiscono o influenzano i propri vicini. È precisamente su questo sfondo che si collocano i modelli più recenti, tra i quali quelli che verranno richiamati di seguito e che risultano maggiormente vicini all'impostazione del presente lavoro.

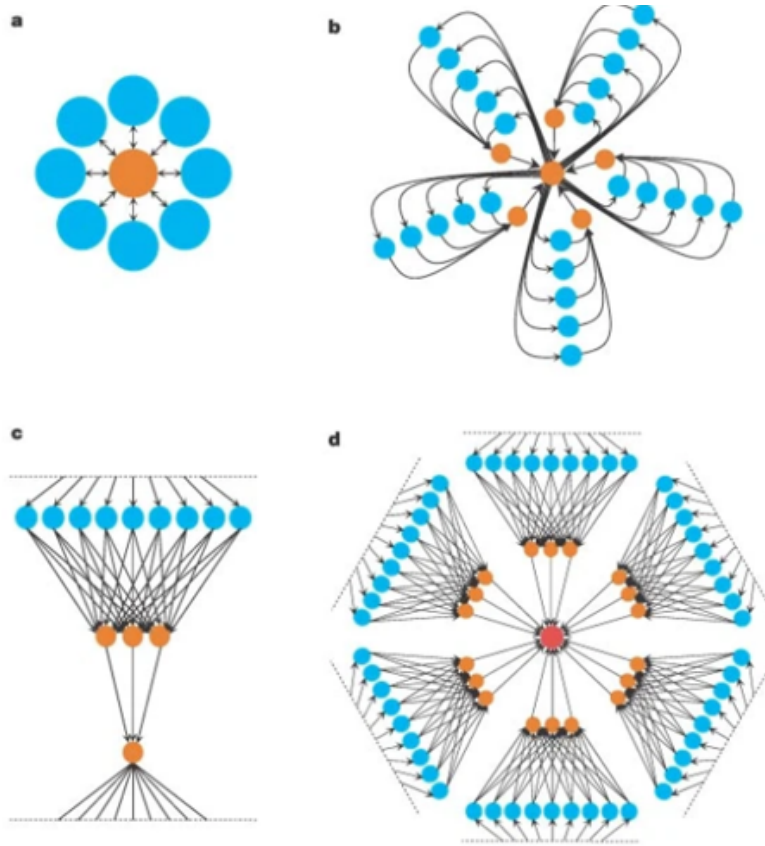


Figura 3.1: Rappresentazione schematica di una popolazione strutturata come rete/grafico, nella quale la diffusione delle strategie dipende dalla topologia delle connessioni. Immagine riprodotta dallo studio Lieberman et al., *Evolutionary dynamics on graphs*, *Nature*, 2005

Un primo filone utile è quello del *membrane computing*. In questo contesto, la popolazione non viene trattata come un insieme uniforme, ma come un sistema organizzato in compartimenti comunicanti, ispirati alla struttura delle membrane biologiche. Il pregio principale di questo approccio è duplice: da un lato fornisce un linguaggio formale e computazionale per simulare popolazioni strutturate, mentre dall'altro permette di introdurre in modo naturale migrazione, replicazione e interazioni differenti tra compartimenti diversi. In tali ricerche, tale impostazione viene usata per codificare giochi evolutivi classici, mostrando che una struttura a compartimenti consente di studiare la diffusione di strategie in popolazioni organizzate localmente e connesse da regole di migrazione.

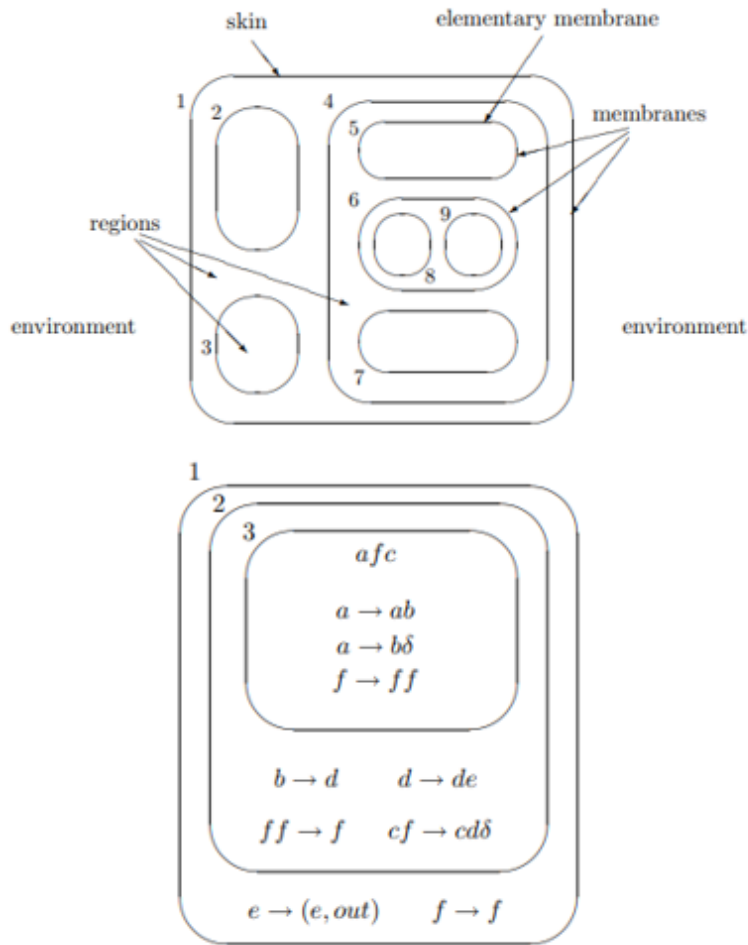


Figura 3.2: Schema esemplificativo di una popolazione strutturata in compartimenti comunicanti, ispirata all'approccio del *membrane computing*. Nel pannello superiore è mostrata una struttura gerarchica di membrane e regioni; nel pannello inferiore, invece, sono riportati un multinsieme iniziale di oggetti nella membrana interna e alcune regole locali di evoluzione associate ai diversi compartimenti. In particolare, nella membrana 3 gli oggetti a e f possono essere trasformati secondo regole di riscrittura ($a \rightarrow ab$, $a \rightarrow b\delta$, $f \rightarrow ff$); nella membrana 2 compaiono ulteriori trasformazioni ($b \rightarrow d$, $d \rightarrow de$, $ff \rightarrow f$, $cf \rightarrow cd\delta$); nella membrana esterna 1, infine, la regola $e \rightarrow (e, out)$ rappresenta l'uscita dell'oggetto e verso l'ambiente, mentre $f \rightarrow f$ lascia invariato l'oggetto. Immagine riprodotta e adattata da Păun, G. e Rozenberg, G., *A guide to membrane computing*, Theoretical Computer Science, 287(1), 2002, pp. 73–100.

Un secondo riferimento importante è rappresentato dal lavoro di Cavaliere e collaboratori su cooperazione e dinamica di rete. In quel modello, infatti,

la popolazione ha dimensione costante, ma la rete sociale evolve nel tempo: a ogni passo un nuovo individuo entra, un altro viene rimosso, e il nuovo arrivato sceglie un role model con probabilità proporzionale al payoff efficace, ne copia la strategia con alta probabilità e ne eredita in parte anche le connessioni. Il contributo di questo studio è rilevante perché mostra il forte intreccio tra diffusione dei cooperatori e topologia della rete: quando i cooperatori prevalgono la rete tende a essere più connessa, mentre la diffusione dei defezionatori si accompagna spesso a frammentazione. Tuttavia, proprio questa impostazione evidenzia anche un limite utile per il presente elaborato: il nuovo arrivato seleziona il proprio role model sull'intera popolazione, cioè in un contesto globale, mentre in molte situazioni realistiche l'osservazione degli individui è locale e ristretta al proprio intorno. Accanto a questi approcci, è opportuno richiamare anche la proposta riguardante le *set structured populations*. In quel quadro, la popolazione è distribuita in insiemi, gli individui interagiscono con chi appartiene allo stesso insieme, e l'aggiornamento riguarda sia le strategie sia le appartenenze ai set. Il valore di questo contributo sta nell'aver mostrato, anche analiticamente, che la struttura della popolazione può favorire la cooperazione perché consente ai cooperatori di aggregarsi in cluster e di resistere meglio ai defezionatori. Si tratta di un riferimento importante perché conferma, su basi teoriche generali, che la struttura non è un dettaglio accessorio del modello, ma una variabile decisiva per l'esito evolutivo.

Accanto a questi approcci, è opportuno richiamare anche la proposta di Tarnita, Antal, Ohtsuki e Nowak sulle *set structured populations*. In tale quadro, la popolazione è distribuita su un insieme di set, e gli individui interagiscono con coloro che appartengono agli stessi set; inoltre, un medesimo individuo può appartenere contemporaneamente a più set, cosicché la struttura della popolazione non è fissata una volta per tutte, ma evolve insieme alle strategie. L'aggiornamento, infatti, riguarda sia il comportamento strategico sia le appartenenze ai set: gli individui tendono a imitare soggetti di successo, adottandone non solo la strategia, ma anche, almeno in parte, le associazioni ai gruppi. Il valore di questo contributo sta nell'aver fornito una trattazione generale, anche analitica, del modo in cui una struttura dinamica della popolazione possa favorire la cooperazione, mostrando che la distribuzione in set consente ai cooperatori di aggregarsi in cluster e di resistere meglio ai defezionatori.

Rispetto al modello proposto nel presente lavoro, questo approccio presenta un'evidente affinità di fondo: in entrambi i casi la cooperazione non viene studiata in una popolazione omogenea, ma in una popolazione strutturata, nella quale la località delle interazioni modifica in modo sostanziale l'esito evolutivo. Tuttavia, le differenze sono altrettanto rilevanti. Nel modello di Tarnita et al. un individuo può appartenere a più set contemporaneamente, e la struttura stessa dei set viene aggiornata insieme alle strategie; nel modello qui considerato, invece, ogni giocatore appartiene in ogni istante a un solo compartimento, disposto su un grafo ad albero, e l'osservazione del role model

è limitata al compartimento di appartenenza e a quelli adiacenti. Questa scelta rende il presente modello meno generale dal punto di vista formale, ma anche più semplice da interpretare e da simulare: la struttura locale è immediatamente leggibile, il numero di parametri è più contenuto e l'aggiornamento non richiede di gestire appartenenze multiple a gruppi diversi. In questo senso, se il contributo di Tarnita et al. mostra in modo molto efficace che una struttura a set può favorire la cooperazione su basi teoriche generali, il modello proposto in questa tesi persegue un obiettivo differente e più mirato, cioè studiare se una struttura compartimentale locale, più semplice e più direttamente controllabile, sia sufficiente a sostenere la sopravvivenza della cooperazione nel lungo periodo.

Su questo sfondo si inserisce il modello proposto nel presente lavoro. L'idea di partenza è studiare la diffusione della cooperazione nel Prisoner's Dilemma passando da una popolazione non strutturata, nella quale la cooperazione tende a scomparire, a una popolazione suddivisa in compartimenti connessi tra loro. La novità del modello consiste nel fatto che ogni individuo aggiorna la propria strategia guardando non l'intera popolazione, ma soltanto il proprio compartimento e quelli adiacenti. L'obiettivo è verificare se tale struttura locale possa favorire la sopravvivenza della cooperazione nel lungo periodo.

3.2 Descrizione teorica del modello

Il modello proposto considera una popolazione di dimensione fissata pari a

$$N = 100$$

individui, ciascuno dei quali adotta una delle due strategie classiche del *Prisoner's Dilemma*, cooperazione (C) o defezione (D). L'interazione è formulata in modo tale che il cooperatore sostenga un costo c per fornire un beneficio b agli individui con cui interagisce, mentre il defezionatore non sostiene alcun costo ma può comunque beneficiare della presenza di cooperatori nel proprio compartimento; tale rappresentazione si ottiene come forma normalizzata del dilemma del prigioniero standard.

Nel caso considerato, il gioco locale tra due individui può essere rappresentato anche in forma matriciale. Nella parametrizzazione *benefit-cost*, il cooperatore sostiene un costo c per fornire un beneficio b all'altro giocatore, mentre il defezionatore non sostiene alcun costo. La matrice dei payoff è dunque

$$\begin{array}{c|cc} & C & D \\ \hline C & (b - c, b - c) & (-c, b) \\ D & (b, -c) & (0, 0) \end{array}$$

dove la prima componente di ciascuna coppia rappresenta il payoff del giocatore di riga e la seconda quello del giocatore di colonna.

Per rendere più esplicito il ruolo dei parametri b e c , si può considerare un esempio con due compartimenti adiacenti. Si supponga che nel primo compartimento vi siano $C_1 = 3$ cooperatori e $D_1 = 2$ defezionatori, mentre nel secondo vi siano $C_2 = 1$ cooperatore e $D_2 = 4$ defezionatori. Allora, nel primo compartimento, il payoff di un cooperatore è

$$(3 - 1)(b - c) + 2(-c) = 2b - 4c,$$

mentre quello di un defezionatore è

$$3b.$$

Nel secondo compartimento, invece, il payoff di un cooperatore è

$$(1 - 1)(b - c) + 4(-c) = -4c,$$

mentre quello di un defezionatore è

$$b.$$

L'esempio mostra che i payoff sono determinati unicamente dalla composizione interna del compartimento considerato: la struttura del grafo e l'esistenza di compartimenti adiacenti non intervengono direttamente nel loro calcolo, ma solo nella successiva scelta locale del role model e nella dinamica di aggiornamento.

L'analisi viene condotta considerando diversi rapporti

$$\frac{b}{c},$$

in particolare uno con

$$\frac{b}{c} = 1.5,$$

e un caso con

$$\frac{b}{c} = 20,$$

così da valutare il comportamento del modello in condizioni molto differenti.

La popolazione, inizialmente composta da 50 cooperatori e 50 defezionatori distribuiti casualmente, è suddivisa in compartimenti corrispondenti ai nodi di un grafo ad albero. A ogni passo temporale viene selezionato casualmente un individuo focale nell'intera popolazione; successivamente, il focal aggiorna la propria strategia e la propria posizione scegliendo un *role model* all'interno del proprio compartimento o di quelli adiacenti. La selezione del role model non avviene in base al payoff puro, ma in base all'*Effective payoff*, ottenuto trasformando il payoff secondo la formula

$$(1 + \delta)^{\text{payoff}},$$

dove δ è un parametro fissato pari a

0.001.

Questa trasformazione consente di associare al payoff una quantità sempre positiva, interpretabile come intensità selettiva nella scelta del role model. Il role model viene quindi scelto con probabilità proporzionale a tale quantità. Con una probabilità fissata, scelta in continuità con modelli affini presenti in letteratura, il focal copia la strategia del role model, mentre con la probabilità complementare adotta la strategia opposta, introducendo così una forma di mutazione che impedisce la scomparsa definitiva di una strategia. Analogamente, con una probabilità variabile il focal migra nel compartimento del role model, mentre con la probabilità complementare si sposta in uno dei compartimenti adiacenti; anche questa scelta evita che alcuni compartimenti restino permanentemente vuoti. In tal modo il modello conserva una struttura semplice, ma introduce un elemento cruciale: gli individui non osservano l'intera popolazione, bensì soltanto un intorno locale. Le simulazioni vengono eseguite per un numero molto elevato di passi, fino a

10^9

steps, e il comportamento di lungo periodo viene misurato tramite la media del numero di cooperatori negli ultimi

10^6

passi, così da valutare con maggiore precisione se la cooperazione tenda a scomparire oppure a persistere stabilmente. Nel seguito, tale quantità verrà indicata come cooperazione media di lungo periodo (Long-Term Cooperation, LTC).

Un ulteriore elemento che motiva l'impostazione adottata nel presente lavoro è il fatto che il modello proposto rientra naturalmente nella classe dei modelli *agent-based*. Con questa espressione si intendono modelli nei quali l'evoluzione del sistema viene descritta attraverso regole microscopiche applicate a singoli agenti: in ogni passo temporale si seleziona un individuo, se ne aggiorna la strategia secondo una regola locale di imitazione o mutazione e, nel caso qui considerato, se ne aggiorna anche la collocazione nei compartimenti. L'interesse di tale approccio risiede proprio nella possibilità di rappresentare in modo esplicito eterogeneità, interazioni locali e dipendenza dalla configurazione concreta della popolazione, cioè aspetti che andrebbero perduti in una descrizione puramente media o deterministica. Un modello di questo tipo può essere studiato sia tramite simulazione numerica sia tramite analisi matematica delle regole che lo definiscono.

Dal punto di vista matematico, un modello *agent-based* a popolazione finita e aggiornamento stocastico discreto induce naturalmente una catena di Markov

su uno spazio degli stati finito. Infatti, fissati il numero totale di individui, il numero dei compartimenti e l'insieme delle strategie disponibili, il sistema può trovarsi solo in un numero finito di configurazioni. Se si indica con X_t lo stato del sistema al tempo t , la dinamica è markoviana nel senso che la distribuzione di X_{t+1} dipende solo dallo stato corrente X_t , poiché tutte le informazioni rilevanti per l'aggiornamento sono già contenute nella configurazione presente. In simboli,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid X_t = x, X_{t-1}, \dots, X_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid X_t = x).$$

Questo consente di associare al modello una matrice di transizione

$$P = (P_{xy})_{x,y \in S}, \quad P_{xy} = \mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid X_t = x),$$

dove S è l'insieme finito degli stati possibili.

Nel presente modello, tali probabilità di transizione sono determinate dalla concatenazione di più eventi elementari: selezione casuale del focal nell'intera popolazione, scelta del role model nel compartimento di appartenenza o in quelli adiacenti con probabilità proporzionale al payoff, eventuale copia della strategia oppure mutazione, ed eventuale migrazione nel compartimento del role model oppure in uno dei compartimenti adiacenti. Ne segue che il passaggio da uno stato all'altro è stocastico, ma non arbitrario: esso è interamente governato da una regola locale ben definita. In questo senso, la simulazione numerica non sostituisce la struttura teorica del modello, ma ne costituisce l'attuazione esplicita.

Per comprendere il comportamento di lungo periodo, assumono un ruolo centrale due proprietà classiche delle catene di Markov: irriducibilità e aperiodicità. Una catena si dice *irriducibile* quando, a partire da qualunque stato, è possibile raggiungere ogni altro stato in un numero finito di passi con probabilità positiva. Si dice invece *aperiodica* quando il sistema non è costretto a ritornare in uno stato solo secondo una periodicità rigida; intuitivamente, non vi è un'alternanza obbligata tra classi disgiunte di stati. Una condizione sufficiente particolarmente utile è la seguente: se da ogni stato è possibile raggiungere ogni altro stato in un numero finito di passi, e se esiste almeno uno stato che può transitare in sé stesso con probabilità positiva, allora la catena è irriducibile e aperiodica.

Nel caso particolare del modello qui studiato, la presenza di una probabilità positiva di mutazione e di una probabilità positiva di movimento non interamente deterministico rende naturale interpretare la dinamica proprio in questa prospettiva. La mutazione impedisce che una delle due strategie, una volta scomparsa, resti esclusa per sempre dal sistema; analogamente, il fatto che il focal non sia vincolato in modo deterministico a un unico esito di migrazione evita che la popolazione si irrigidisca stabilmente in una sola configurazione spaziale. In termini teorici, ciò rende plausibile che la dinamica non resti intrappolata in classi chiuse troppo rigide e che il sistema possa esplorare, nel lungo periodo, una porzione ampia dello spazio degli stati.

Quando una catena di Markov finita è irriducibile e aperiodica, essa ammette una distribuzione stazionaria unica μ , detta anche *steady state distribution*, definita dalla relazione

$$\mu P = \mu.$$

Questa distribuzione descrive il comportamento asintotico del sistema: non significa che la dinamica si arresti in uno stato fisso, ma che, dopo un numero sufficientemente elevato di passi, il tempo trascorso nelle diverse regioni dello spazio degli stati si stabilizza secondo probabilità ben determinate. Inoltre, in tale situazione, il comportamento di lungo periodo non dipende più dalle condizioni iniziali. In particolare, se il rumore è strettamente positivo, la distribuzione stazionaria è unica e ha supporto pieno, nel senso che ogni stato continua a essere visitabile nel lungo periodo, pur con frequenze molto diverse.

Questo quadro teorico giustifica la scelta metodologica adottata nel presente lavoro. Poiché l'interesse è rivolto al comportamento di lungo periodo del sistema, non è essenziale esplorare un gran numero di configurazioni iniziali differenti: fissare una configurazione iniziale bilanciata, come $50C/50D$, costituisce una scelta controllata e naturale, a condizione di lasciare evolvere il modello per un numero sufficientemente elevato di step. Le medie calcolate nella parte finale della simulazione non hanno quindi il significato di una semplice fotografia numerica, ma quello di un'approssimazione empirica del regime stazionario della dinamica. In questo senso, il ricorso a un modello *agent-based* non è soltanto una scelta computazionale, ma una necessità teorica: è proprio la descrizione microscopica delle interazioni individuali a generare la catena di Markov che permette di studiare in modo coerente la persistenza o la scomparsa della cooperazione nel lungo periodo.

Un'ulteriore osservazione utile riguarda il ruolo delle simulazioni Monte Carlo nello studio del comportamento di lungo periodo di una catena di Markov. Quando la catena è irriducibile e aperiodica, l'esistenza di una distribuzione stazionaria unica garantisce che, per tempi sufficientemente lunghi, la dinamica perda memoria della configurazione iniziale e visiti gli stati secondo frequenze asintotiche ben definite. In molti casi, tuttavia, tale distribuzione non è agevolmente calcolabile in forma chiusa, soprattutto quando lo spazio degli stati è molto ampio. In queste situazioni, una procedura naturale consiste nel simulare numericamente un numero elevato di transizioni della catena e utilizzare le frequenze empiriche osservate lungo la traiettoria come approssimazione della *steady state*. Questo è precisamente il principio delle simulazioni Monte Carlo: invece di determinare analiticamente la distribuzione stazionaria, la si stima attraverso una realizzazione sufficientemente lunga del processo stocastico.

Più precisamente, se X_t denota la catena e f è una funzione osservabile sullo spazio degli stati, allora, sotto le ipotesi di irriducibilità e aperiodicità, vale il principio ergodico per catene di Markov, secondo cui

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(X_t) \longrightarrow \sum_{x \in S} \mu(x) f(x) \quad \text{per } T \rightarrow \infty,$$

dove μ è la distribuzione stazionaria. In altre parole, la media temporale lungo una traiettoria sufficientemente lunga converge al valore atteso rispetto alla distribuzione stazionaria. Nel presente lavoro, tale risultato giustifica sia l'uso di un numero molto elevato di step, sia la scelta di misurare il comportamento del sistema tramite medie calcolate nella parte finale della simulazione, interpretate come approssimazioni empiriche del regime stazionario.

Infine, per chiarire il legame tra l'idea di compartimentazione, motivata dal *membrane computing*, e la rappresentazione grafica adottata nelle simulazioni, è utile esplicitare il *mapping* tra le due descrizioni. Nel presente lavoro, infatti, il grafo non costituisce il punto di partenza concettuale del modello, ma la traduzione formale della struttura dei compartimenti e delle loro adiacenze. La figura seguente mostra schematicamente questo passaggio nei due casi topologici principali considerati nel seguito: nel pannello (a), una gerarchia di compartimenti innestati viene mappata in un grafo a catena; nel pannello (b), un compartimento esterno che contiene più sottocompartimenti viene mappato in un grafo a stella.

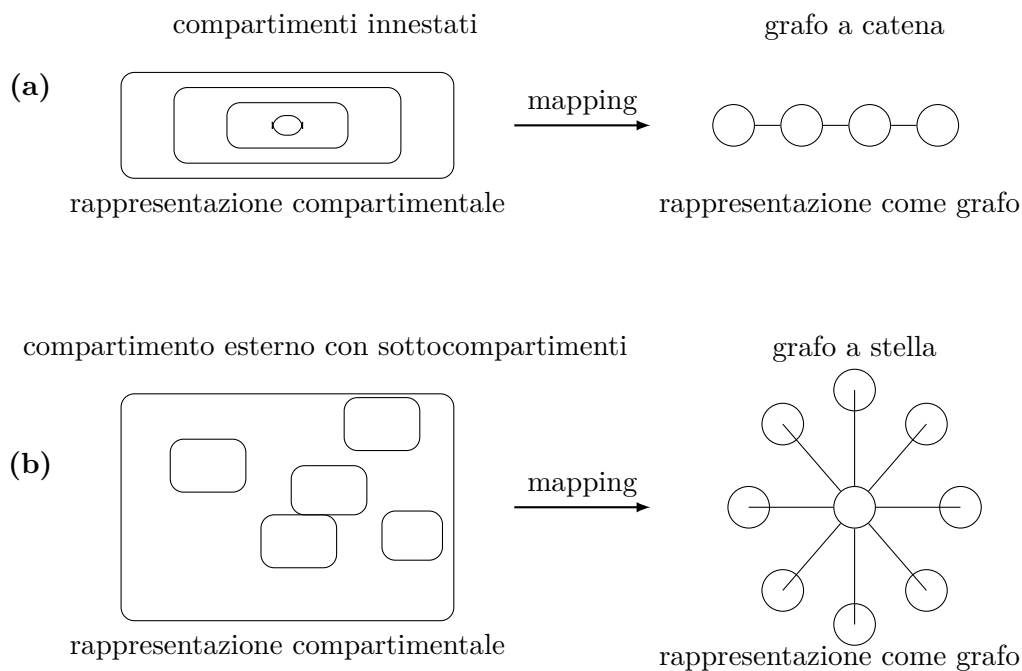


Figura 3.3: Mapping tra struttura compartimentale, motivata dal *membrane computing*, e rappresentazione come grafo utilizzata nelle simulazioni. Nel pannello (a), una gerarchia di compartimenti innestati viene tradotta in un grafo a catena, interpretando come adiacenti i compartimenti immediatamente contenente e contenuto. Nel pannello (b), un compartimento esterno che contiene più sottocompartimenti viene tradotto in un grafo a stella, nel quale il compartimento esterno corrisponde al nodo centrale e i sottocompartimenti corrispondono ai nodi periferici. In questo senso, la rete rappresenta formalmente le adiacenze tra compartimenti.

3.3 Descrizione tecnica e implementazione del codice

Le simulazioni sono state eseguite in ambiente Spyder, utilizzando Python 3.13, su un MacBook Air con chip Apple M2. Per ciascun valore del parametro w , considerato nei valori

$$0.0, 0.1, \dots, 1.0,$$

è stata eseguita una run completa del modello; ogni sweep sui valori di w ha richiesto tempi computazionali elevati, compresi indicativamente tra 24 e 60 ore.

Il programma è stato costruito in modo modulare, ma con una struttura volutamente essenziale. Nel caso riportato in questa sezione si considera la versione a 20 compartimenti, rappresentati dai nodi di un grafo del tipo:

$$0 - 1 - 2 - \dots - 19,$$

cioè il caso banale di albero.

Importazione delle librerie e fissazione dei parametri

Il codice utilizza due librerie:

```
import random
import networkx as nx
```

La prima viene impiegata per tutte le scelte stocastiche del modello, mentre la seconda serve a costruire e gestire il grafo dei compartimenti.

Subito dopo vengono fissati i parametri fondamentali:

```
N = 100
C_total = 50
D_total = 50

b = 3.0
c = 2.0
delta = 0.001

p = 0.999

steps = 1000000000
tail = 1000000

NUM_NODES = 20
NODES = list(range(NUM_NODES))
```

Qui $N = 100$ è la dimensione totale della popolazione, mentre $C_{total} = 50$ e $D_{total} = 50$ fissano la composizione iniziale globale della popolazione. I parametri b e c rappresentano rispettivamente beneficio e costo del dilemma del prigioniero in forma benefit-cost; δ è il parametro usato per convertire il payoff in effective payoff; $p = 0.999$ è la probabilità di copia della strategia del role model, mentre la probabilità complementare $1 - p$ rappresenta la mutazione. Infine, `steps` indica il numero complessivo di update steps eseguiti per ogni run, mentre `tail` individua la finestra finale su cui calcolare la media di lungo periodo.

Costruzione del grafo e inizializzazione della popolazione

L'inizializzazione è affidata alla funzione `init_graph_20()`, che costruisce un grafo non orientato con 20 nodi:

```
def init_graph_20():
    G = nx.Graph()

    for v in NODES:
        G.add_node(v, name=str(v))

    for v in range(NUM_NODES - 1):
        G.add_edge(v, v + 1)
```

In questo modo si ottiene la catena lineare

$$0 - 1 - 2 - \dots - 19.$$

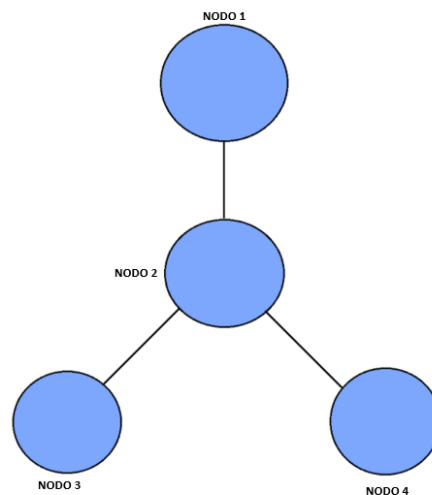


Figura 3.4: Esempio schematico di una struttura a compartimenti rappresentata come un grafo a 4 nodi. I nodi corrispondono ai compartimenti, mentre gli archi individuano le adiacenze lungo cui gli individui possono osservare il vicinato locale e migrare.

Successivamente, il programma distribuisce casualmente i 100 individui nei 20 compartimenti. La distribuzione non è uniforme: ogni run genera una partizione casuale di N , per cui alcuni nodi possono risultare più popolati di altri e alcuni anche vuoti.

Dopo aver fissato le numerosità dei compartimenti, il codice costruisce una lista contenente 50 strategie C e 50 strategie D , la mescola casualmente e assegna i giocatori ai nodi secondo i blocchi di dimensione determinata dalla partizione appena creata. Per ogni nodo vengono quindi memorizzati tre attributi:

- C : numero di cooperatori nel nodo,
- D : numero di defezionatori nel nodo,
- n : numerosità totale del compartimento.

Questa scelta è importante anche dal punto di vista computazionale: il programma non memorizza esplicitamente i singoli individui e i loro spostamenti, ma solo i conteggi per strategia in ciascun compartimento. Proprio questo rende il modello particolarmente vantaggioso rispetto a implementazioni più pesanti, nelle quali sarebbe necessario tenere traccia di ogni singolo giocatore e del suo compartimento di appartenenza. Qui, invece, tutti i calcoli vengono effettuati lavorando direttamente sui conteggi aggregati locali, con un evidente risparmio sia in termini di memoria sia in termini di tempo computazionale.

Gestione delle adiacenze

Per identificare i compartimenti adiacenti a un nodo viene usata la funzione:

```
def adjacent_nodes(G, v):  
    return set(G.neighbors(v))
```

Essa restituisce l'insieme dei vicini del nodo v , cioè i compartimenti visibili a partire da esso. Questa nozione entra sia nella scelta del role model, sia nella scelta della destinazione del focal dopo l'aggiornamento.

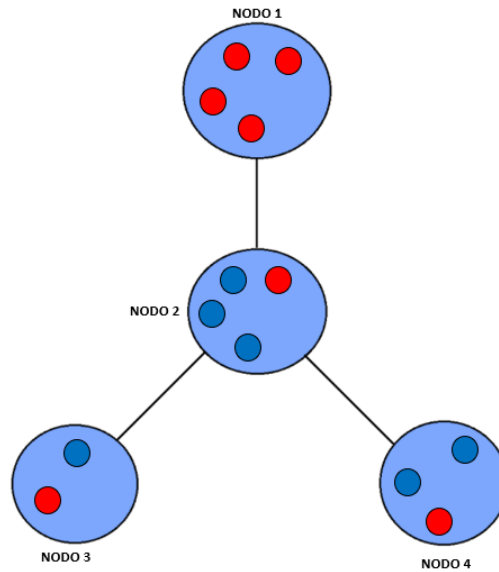


Figura 3.5: Esempio di inizializzazione della popolazione ($N = 13$) su un grafo a 4 compartimenti. In ciascun nodo sono distribuiti individui cooperativi (C , in blu) e defezionatori (D , in rosso), secondo una partizione casuale della popolazione totale.

Struttura generale di un update step

L'intera dinamica è concentrata nella funzione

```
def one_update_step_twenty_nodes(G, b, c, delta, p, w):
```

che realizza un singolo passo di aggiornamento. La funzione è organizzata in cinque blocchi logici.

4.1 Calcolo dei payoff locali e degli effective payoff

Nel primo blocco, per ciascun compartimento v , si leggono i valori C_v , D_v e n_v . Se nel nodo è presente al più un individuo, il payoff locale è posto uguale a zero. Il codice implementa infatti la regola:

```
if n_v <= 1:
    payoff_C_v = 0.0
    payoff_D_v = 0.0
```

Quindi, sia nel caso in cui un compartimento contenga un solo giocatore, sia nel caso in cui sia vuoto, il payoff di entrambe le strategie viene posto uguale a 0. Di conseguenza, l'effective payoff risulta

$$EP = (1 + \delta)^0 = 1.$$

Questa scelta non crea alcun problema nella dinamica. Un compartimento vuoto, infatti, non può mai essere scelto per il focal, perché la selezione del

focal avviene uniformemente sull'intera popolazione contando solo gli individui effettivamente presenti nei nodi. Analogamente, un compartimento vuoto non può contribuire alla scelta del role model, poiché il peso con cui ciascuna strategia entra nel campionamento è dato dal prodotto tra il numero di individui che la adottano nel nodo ed effective payoff. In simboli, per un nodo vuoto si ha

$$w_C = C_v \cdot EP_C = 0, \quad w_D = D_v \cdot EP_D = 0.$$

Anche se quindi, formalmente, payoff ed effective payoff sono definiti pure per i compartimenti vuoti, tali compartimenti non entrano mai né nella scelta del focal né in quella del role model.

Quando il compartimento contiene almeno due individui, il codice calcola invece:

```
payoff_C_v = (C_v - 1) * (b - c) + D_v * (-c)
payoff_D_v = C_v * b
```

Queste formule implementano la versione benefit-cost del Prisoner's Dilemma all'interno del compartimento. Il cooperatore riceve il beneficio dagli altri cooperatori del compartimento, ma paga il costo sostenuto per cooperare; il defezionatore, invece, beneficia della presenza dei cooperatori senza sostenere alcun costo.

I payoff vengono poi trasformati in effective payoff:

```
G.nodes[v]["EP_C"] = (1.0 + delta) ** payoff_C_v
G.nodes[v]["EP_D"] = (1.0 + delta) ** payoff_D_v
```

Questo passaggio permette di pesare la selezione del role model non sul payoff lineare, ma su una quantità positiva che cresce con esso.

4.2 Scelta del focal

Nel secondo blocco il focal viene scelto uniformemente sull'intera popolazione. Il codice prima calcola la numerosità totale del sistema, poi estrae un indice casuale compreso tra 0 e $N - 1$, e infine individua il nodo in cui cade quell'indice tramite somma cumulativa delle popolazioni dei nodi. Una volta identificato il compartimento del focal, la sua strategia viene determinata confrontando un'estrazione casuale con il numero di cooperatori presenti nel nodo:

```
r2 = random.randrange(n_f)
focal_strategy = "C" if r2 < C_f else "D"
```

Questa istruzione realizza una scelta uniforme tra gli individui del compartimento selezionato.

4.3 Scelta del role model

Il terzo blocco è uno dei più importanti del programma. Il role model non viene cercato nell'intera popolazione, ma solo nel compartimento del focal e nei compartimenti adiacenti:

```
visible_nodes = {focal_node} | adjacent_nodes(G, focal_node)
```

Per ciascuno dei nodi visibili, il codice costruisce due pesi:

```
wC = C_v * G.nodes[v]["EP_C"]  
wD = D_v * G.nodes[v]["EP_D"]
```

cioè il numero di individui che adottano una data strategia moltiplicato per l'effective payoff di quella strategia nel compartimento. In questo modo la selezione del role model non richiede di considerare uno per uno tutti gli individui visibili, ma solo i conteggi aggregati per strategia. La lista `weights` contiene quindi triple del tipo (`peso`, `nodo`, `strategia`), e il role model viene estratto con probabilità proporzionale al peso totale.

Questa è una delle principali ottimizzazioni del programma: invece di campionare tra individui, si campiona tra “blocchi strategici locali”. Anche sotto questo aspetto, il costo computazionale resta sensibilmente più contenuto rispetto a modelli che richiedono una rappresentazione esplicita di tutti gli agenti della popolazione.

4.4 Aggiornamento di strategia e posizione

Nel quarto blocco il focal aggiorna la propria strategia. Con probabilità p copia la strategia del role model:

```
if random.random() < p:  
    new_strategy = rm_strategy  
else:  
    new_strategy = "D" if rm_strategy == "C" else "C"
```

La probabilità complementare rappresenta la mutazione, implementata come adozione della strategia opposta a quella del role model.

Successivamente il focal aggiorna anche la propria posizione. Con probabilità w migra nel compartimento del role model; con probabilità $1 - w$, invece, si sposta in uno dei compartimenti adiacenti al role model:

```
if random.random() < w:  
    dest_node = rm_node  
else:  
    neigh_rm = adjacent_nodes(G, rm_node)  
    dest_node = rm_node if not neigh_rm else random.choice(list(neigh_rm))
```

Questa regola consente di distinguere tra attrazione diretta verso il compartimento del role model e movimento locale attorno ad esso.

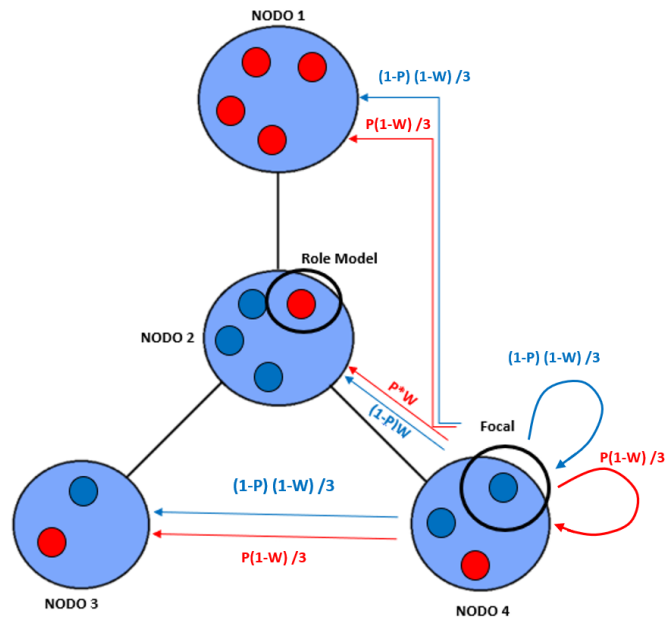


Figura 3.6: Schema esemplificativo di un singolo update step effettuato su un grafo a 4 compartimenti. Vengono evidenziati il focal e il role model, entrambi scelti localmente, e sono illustrati i possibili esiti dell'aggiornamento: copia o mutazione della strategia del role model e migrazione verso il suo compartimento oppure verso uno dei compartimenti adiacenti in maniera casuale.

4.5 Aggiornamento dei conteggi

L'ultimo blocco realizza l'uscita del focal dal compartimento di origine e il suo ingresso nel compartimento di destinazione con la nuova strategia:

```

if focal_strategy == "C":
    G.nodes[focal_node]["C"] -= 1
else:
    G.nodes[focal_node]["D"] -= 1
G.nodes[focal_node]["n"] -= 1

if new_strategy == "C":
    G.nodes[dest_node]["C"] += 1
else:
    G.nodes[dest_node]["D"] += 1
G.nodes[dest_node]["n"] += 1

```

In questo modo ogni update step modifica solo due nodi del grafo: quello di partenza e quello di arrivo.

Sweep del parametro w e raccolta dei risultati

La parte finale del programma realizza uno sweep del parametro w :

```
w_values = [i / 10 for i in range(11)]
```

Per ciascun valore di w , il sistema viene reinizializzato, quindi viene eseguita una simulazione completa di lunghezza `steps = 109`. Il codice non memorizza l'intera traiettoria, ma calcola solo la media del numero totale di cooperatori negli ultimi `tail = 106` update steps. A tal fine, una volta superata la soglia

```
start_tail = steps - tail
```

a ogni passo viene calcolato il numero totale di cooperatori presenti nel sistema e il valore viene accumulato in `sum_C_tail`. Al termine della run, la media

```
avg_C_tail = sum_C_tail / tail
```

costituisce l'osservabile principale del modello.

Questa scelta consente di stimare numericamente il comportamento di lungo periodo senza dover salvare l'intera evoluzione temporale, che sarebbe proibitiva sia in termini di memoria sia in termini di gestione dei dati.

Osservazione conclusiva sulla struttura del programma

Nel complesso, il codice è costruito attorno a poche idee essenziali: inizializzazione casuale della popolazione sul grafo, definizione locale dei payoff, selezione stocastica di focal e role model, aggiornamento simultaneo di strategia e posizione, e stima finale del numero medio di cooperatori nel regime di lungo periodo. La scelta di utilizzare un numero ridotto di funzioni, di lavorare direttamente sui conteggi per compartimento e di limitare l'osservazione al vicinato locale permette di mantenere il programma relativamente semplice, pur conservando tutti gli elementi strutturali rilevanti del modello teorico.

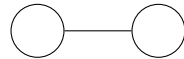
Capitolo 4

Risultati e analisi

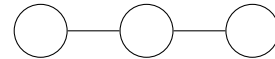
In questo capitolo vengono presentati i risultati numerici ottenuti dalle simulazioni del modello descritto nei capitoli precedenti. L'analisi parte dal caso base a un solo compartimento, che consente anche un confronto con il calcolo teorico fondato sulla corrispondente catena di Markov, e prosegue poi con le configurazioni a più compartimenti. L'obiettivo è mettere in evidenza in che misura il numero dei compartimenti, la loro topologia e la probabilità di migrazione w influenzino la sopravvivenza della cooperazione nel lungo periodo, sia nel caso $b/c=1.5$ sia nel caso $b/c=20$.



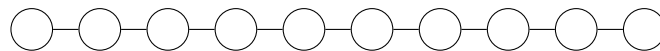
(a) 1 compartimento



(b) 2 compartimenti



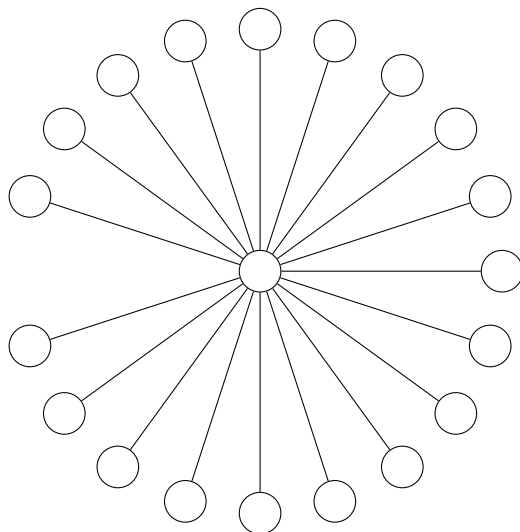
(c) 3 compartimenti



(d) 10 compartimenti in catena



(e) 20 compartimenti in catena



(f) 20 compartimenti a stella

Figura 4.1: Topologie considerate nelle simulazioni numeriche: (a) un compartimento; (b) due compartimenti; (c) tre compartimenti; (d) 10 compartimenti disposti a catena; (e) 20 compartimenti disposti a catena; (f) 20 compartimenti organizzati a stella. Nel seguito, i risultati verranno richiamati anche facendo riferimento ai pannelli della presente figura.

4.1 Sviluppo analitico e calcolo del numero medio di cooperatori nel caso ad un compartimento

Prima di discutere i risultati ottenuti nelle configurazioni con più compartimenti, è utile soffermarsi sul caso base a un solo nodo. Questa situazione, pur essendo la meno complessa tra quelle considerate, riveste un ruolo metodologico importante, perché costituisce l'unico caso nel quale il modello può essere studiato con facilità in modo pressoché completo anche dal punto di vista teorico. In presenza di un solo compartimento, infatti, la struttura spaziale scompare del tutto: tutti gli individui interagiscono nello stesso ambiente locale e non vi sono più né movimenti tra nodi né differenze dovute alla topologia del grafo. Proprio per questo motivo, l'intero stato del sistema è determinato da una sola variabile, cioè dal numero di cooperatori presenti nella popolazione. Se si indica con

$$i \in \{0, 1, \dots, N\}$$

il numero di cooperatori in un dato istante, allora il numero di defezionatori è automaticamente uguale a $N - i$. Nel caso studiato in questo elaborato, con

$$N = 100,$$

lo spazio degli stati possibili coincide dunque con l'insieme

$$\{0, 1, 2, \dots, 100\}.$$

Lo stato $i = 0$ corrisponde a una popolazione interamente composta da defezionatori, lo stato $i = 100$ a una popolazione interamente composta da cooperatori, mentre gli stati intermedi descrivono tutte le possibili configurazioni miste.

Questa osservazione permette di reinterpretare la dinamica del modello come una catena di Markov a tempo discreto. A ogni update step, infatti, viene scelto un solo individuo focale, il quale può mantenere la propria strategia oppure cambiarla. Di conseguenza, il numero totale di cooperatori può solo aumentare di una unità, diminuire di una unità oppure restare invariato. In altri termini, se il sistema si trova nello stato i , al passo successivo potrà trovarsi soltanto in uno tra gli stati $i + 1$, $i - 1$ oppure i . Si ottiene quindi una *birth-death chain* finita, cioè una catena di Markov nella quale le transizioni avvengono solo tra stati adiacenti o verso lo stesso stato. Questa riduzione risulta particolarmente vantaggiosa perché consente di sostituire alla descrizione microscopica dell'intero sistema una descrizione probabilistica esatta, molto più maneggevole sul piano teorico.

Per costruire le probabilità di transizione è necessario partire dai payoff delle due strategie nello stato i . Nel modello adottato, coerentemente con il codice utilizzato per le simulazioni, il Prisoner's Dilemma è scritto nella sua forma *benefit-cost*. Se nello stato i vi sono i cooperatori e $N - i$ defezionatori, allora il payoff di un cooperatore è

$$\pi_C(i) = (i - 1)(b - c) + (N - i)(-c),$$

mentre il payoff di un defezionatore è

$$\pi_D(i) = ib.$$

La prima formula riflette il fatto che un cooperatore riceve il beneficio prodotto dagli altri cooperatori del compartimento ma paga il costo della cooperazione; la seconda esprime invece il fatto che un defezionatore beneficia della presenza dei cooperatori senza sostenere alcun costo. Come in tutto il resto del modello, i payoff non vengono utilizzati direttamente nella scelta del role model, ma vengono trasformati in effective payoff secondo la regola comune

$$EP_C(i) = (1 + \delta)^{\pi_C(i)}, \quad EP_D(i) = (1 + \delta)^{\pi_D(i)}.$$

Questa trasformazione, in particolare, garantisce che la selezione del role model sia sempre governata da pesi positivi.

A questo punto si può scrivere la probabilità che, nello stato i , il role model sia un cooperatore oppure un defezionatore. Dal momento che il role model viene scelto con probabilità proporzionale all'effective payoff pesato per il numero di individui che adottano quella strategia, si ottiene

$$R_C(i) = \frac{i EP_C(i)}{i EP_C(i) + (N - i) EP_D(i)},$$

$$R_D(i) = \frac{(N - i) EP_D(i)}{i EP_C(i) + (N - i) EP_D(i)}.$$

Queste due quantità rappresentano quindi la probabilità che il role model, nello stato i , sia rispettivamente un cooperatore o un defezionatore. Esse sono ben definite per ogni i , perché gli effective payoff sono sempre positivi. Inoltre, come è naturale che sia, è facile verificare che soddisfano la relazione

$$R_C(i) + R_D(i) = 1.$$

Si deve ora tenere conto della regola di aggiornamento delle strategie. Nel modello studiato, una volta scelto il role model, il focal ne copia la strategia con probabilità p , mentre con probabilità complementare $1 - p$ adotta la strategia opposta, introducendo quindi una mutazione. Ne segue che, nello stato i , la probabilità che il focal finisca cooperatore dopo l'update è

$$p R_C(i) + (1 - p) R_D(i),$$

mentre la probabilità che finisca defezionatore è

$$p R_D(i) + (1 - p) R_C(i).$$

Queste espressioni sono particolarmente importanti, perché permettono di scrivere direttamente le transizioni della catena di Markov. Per aumentare di una unità il numero di cooperatori, infatti, occorre scegliere come focal un defezionatore e far sì che, dopo l'aggiornamento, esso diventi cooperatore. Poiché la probabilità di scegliere un defezionatore è

$$\frac{N - i}{N},$$

si ottiene

$$P_{i,i+1} = \frac{N - i}{N} \left(p R_C(i) + (1 - p) R_D(i) \right).$$

In modo del tutto analogo, per diminuire di una unità il numero di cooperatori occorre scegliere come focal un cooperatore e far sì che esso diventi defezionatore. Poiché la probabilità di scegliere un cooperatore è

$$\frac{i}{N},$$

si ha

$$P_{i,i-1} = \frac{i}{N} \left(p R_D(i) + (1 - p) R_C(i) \right).$$

Infine, la probabilità di restare nello stesso stato è data semplicemente dal complemento a uno:

$$P_{i,i} = 1 - P_{i,i+1} - P_{i,i-1}.$$

In questo modo la matrice di transizione della catena è completamente determinata.

Una volta costruita la catena, è necessario verificarne le proprietà qualitative. Nel caso presente, la presenza di mutazione positiva, cioè il fatto che

$$1 - p > 0,$$

implica che gli stati estremi non sono assorbenti. In particolare, dallo stato $i = 0$, nel quale tutti gli individui sono defezionatori, è comunque possibile generare un cooperatore tramite mutazione; analogamente, dallo stato $i = N$, nel quale tutti gli individui sono cooperatori, è possibile perdere un cooperatore sempre a causa della mutazione. Più in generale, dagli stati interni è possibile sia aumentare sia diminuire il numero di cooperatori con probabilità positiva. Questo significa che la catena è irriducibile, cioè che ogni stato può essere raggiunto da ogni altro stato in un numero finito di passi con probabilità positiva. Inoltre, in ogni stato esiste anche una probabilità positiva di rimanere nello stesso stato e quindi, come conseguenza delle considerazioni teoriche discusse nel capitolo precedente, la catena è aperiodica. Poiché lo spazio degli stati è finito, irriducibilità e aperiodicità garantiscono l'esistenza di una distribuzione stazionaria unica

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N),$$

dove π_i rappresenta la probabilità di osservare il sistema, nel lungo periodo, nello stato con esattamente i cooperatori.

Nel caso delle *birth-death chains*, tale distribuzione può essere costruita in forma ricorsiva. Introducendo infatti la notazione

$$\lambda_i = P_{i,i+1}, \quad \mu_i = P_{i,i-1},$$

le equazioni di bilancio locale

$$\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1}$$

permettono di esprimere tutte le probabilità stazionarie in funzione di π_0 . Si ricava infatti

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

mentre π_0 si determina imponendo la condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^N \pi_i = 1.$$

Questo passaggio mostra quindi che, nel caso a un compartimento, la distribuzione di lungo periodo non è soltanto oggetto di simulazione numerica, ma può essere derivata facilmente in modo diretto dalle regole del modello.

A questo punto si ottiene il risultato che interessa maggiormente ai fini del confronto con le simulazioni, cioè il numero medio stazionario di cooperatori. Esso non è altro che il valore atteso della variabile aleatoria “numero di cooperatori” rispetto alla distribuzione stazionaria:

$$\mathbb{E}_\pi[C] = \sum_{i=0}^N i \pi_i.$$

Equivalentemente, la frequenza media stazionaria di cooperatori è data da

$$\mathbb{E}_\pi[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N i \pi_i.$$

Questa è precisamente la quantità teorica con cui confrontare il numero medio di cooperatori osservato empiricamente nelle simulazioni di lunga durata. In altre parole, il caso a un nodo permette di stabilire un collegamento diretto tra analisi teorica e risultato computazionale: la media ottenuta numericamente sugli ultimi

$$10^6$$

step della simulazione può essere interpretata come un'approssimazione della quantità $\mathbb{E}_\pi[C]$.

È proprio questo il motivo per cui il caso a un compartimento costituisce il punto di partenza naturale del capitolo dei risultati. Il fatto che il valore medio ricavato dalle simulazioni risulti molto vicino a quello ottenuto tramite la distribuzione stazionaria della catena di Markov conferma il fatto che le simulazioni utilizzate nel seguito siano effettivamente sufficienti a catturare il regime di lungo periodo del modello. In questo senso, quindi, il caso base non ha soltanto un interesse teorico autonomo, ma svolge anche la funzione di controllo di coerenza dell'intero impianto numerico. Solo dopo aver verificato questa corrispondenza nel caso più semplice diventa infatti pienamente giustificato passare ai casi con più compartimenti, nei quali un'analisi esatta analoga non è più realisticamente praticabile e il ricorso alla simulazione Monte Carlo diventa lo strumento principale di indagine.

In particolare, i valori medi di cooperatori ottenuti dalla distribuzione stazionaria (calcolati sia analiticamente grazie alle equazioni di bilancio locale sia tramite la proprietà $\pi P = \pi$), sono rispettivamente **0.57 per il caso $b/c = 1.5$** e **0.97 per lo scenario $b/c = 20$** , cioè valori significativamente vicini a quelli ottenuti dalle simulazioni che si dettaglieranno nel paragrafo di seguito.

4.2 Primo scenario: $b/c = 1.5$

Nel caso

$$\frac{b}{c} = 1.5,$$

cioè nello scenario con rapporto beneficio-costo più basso tra quelli analizzati, i risultati mostrano comunque un effetto strutturale netto. Nel caso base a un solo compartimento, il numero medio di cooperatori negli ultimi

$$10^6$$

update steps resta infatti molto basso, attorno a 0.56, confermando la similitudine con il risultato dei calcoli teorici esposti nella sezione precedente e che

in assenza di struttura la cooperazione tende sostanzialmente a scomparire. Il passaggio a due e tre compartimenti produce già un primo miglioramento, ancora contenuto ma sistematico, che segnala come anche una compartimentazione minima sia sufficiente a modificare almeno in parte l'esito evolutivo del gioco.

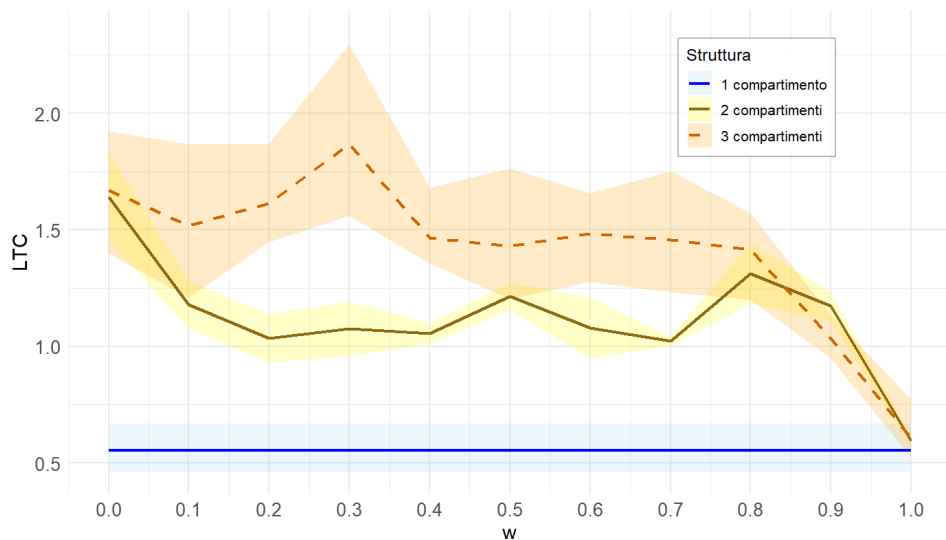


Figura 4.2: Confronto tra il numero medio di cooperatori negli ultimi 10^6 step (LTC) al variare della probabilità di migrazione w nei casi con 1, 2 e 3 compartimenti (come in Fig.4.1(a), Fig.4.1(b) e Fig.4.1(c)). Il grafico mostra che il caso a un compartimento resta pressoché costante su valori molto bassi, mentre i casi a 2 e 3 compartimenti presentano valori medi più alti lungo quasi tutto l'intervallo di w . Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

L'effetto diventa però molto più evidente quando il numero di compartimenti aumenta. Nei casi a 10 compartimenti (Fig.4.1(d)), e ancor più in quelli a 20 compartimenti disposti a catena (Fig.4.1(e)), infatti, il numero medio di cooperatori cresce sensibilmente in un ampio intervallo di valori di w , raggiungendo livelli che non sono più marginali rispetto alla popolazione totale. In particolare, nella configurazione a 20 compartimenti in catena si osservano i risultati più favorevoli dell'intero insieme analizzato per questo valore di b/c , con valori medi che, in particolare per probabilità di migrazione intermedie, superano ampiamente quelli osservati nei casi a minore compartimentazione. In questo senso, i dati sostengono con chiarezza la tesi centrale del modello: a parità di popolazione complessiva e in uno scenario di base sfavorevole ai cooperatori, una suddivisione più fine in compartimenti locali può favorire in misura significativa la persistenza della cooperazione.

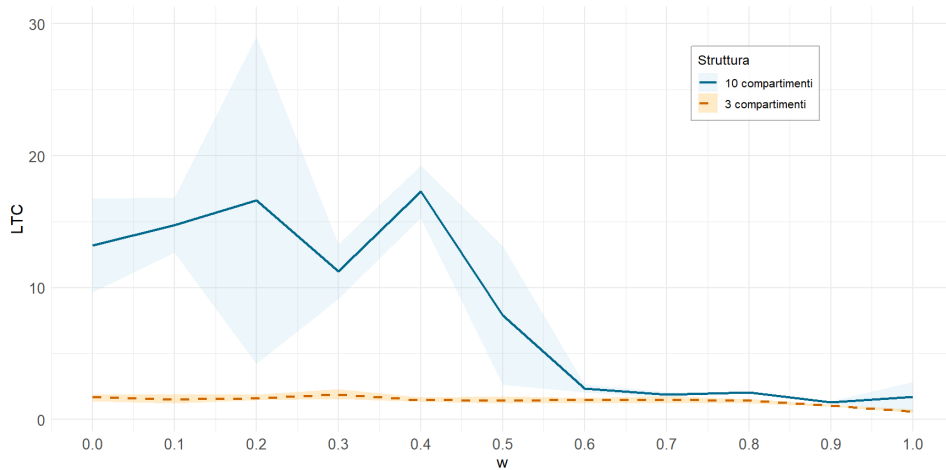


Figura 4.3: Confronto tra le strutture a 3 e 10 compartimenti (Fig.4.1(c) e Fig.4.1(d)). Il grafico evidenzia che, per valori intermedi della probabilità di migrazione, il caso a 10 compartimenti mantiene un LTC nettamente superiore a quello osservato con 3 compartimenti. Le curve rappresentano il numero medio di operatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

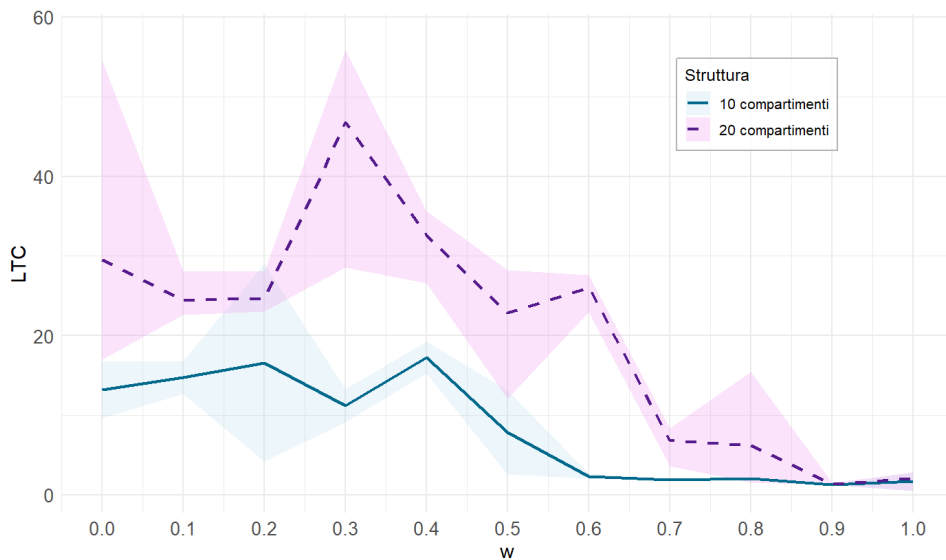


Figura 4.4: Confronto tra 10 compartimenti e 20 compartimenti disposti a catena (Fig.4.1(d) e Fig.4.1(e)). La figura mette in evidenza che l'aumento del numero di compartimenti, mantenendo una struttura a catena (0–1–2–...–19), si associa a un ulteriore incremento della LTC, soprattutto per valori intermedi di w . Le curve rappresentano il numero medio di operatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

L'interpretazione del parametro w richiede tuttavia una certa cautela. I casi

estremi

$$w = 0 \quad \text{e} \quad w = 1,$$

pur essendo utili per delimitare il comportamento del modello, corrispondono a situazioni presumibilmente poco realistiche. Nel primo caso, l'individuo non raggiunge mai il compartimento del role model, e il movimento resta sempre confinato a uno dei nodi adiacenti; nel secondo, al contrario, il focal si sposta sempre esattamente nel compartimento del role model. Si tratta quindi di due limiti ideali, che sottintendono indirettamente, rispettivamente, un'aderenza nulla oppure una coerenza quasi meccanica rispetto all'informazione osservata. Proprio per questo, i valori intermedi di w appaiono i più interessanti dal punto di vista interpretativo, perché descrivono un compromesso più plausibile tra imitazione locale, variabilità individuale e mobilità. Ed è precisamente in questa fascia intermedia che il vantaggio della compartimentazione emerge nel modo più chiaro.

Un ulteriore risultato importante è che, secondo i risultati ottenuti, non conta soltanto il numero dei compartimenti, ma anche la loro disposizione topologica. Il confronto tra la configurazione a 20 compartimenti in catena (Fig.4.1(e)) e quella, sempre a 20 compartimenti, organizzata "a stella" (Fig.4.1(f)) - cioè composta da un nodo centrale e tutti gli altri collegati ad esso - mostra infatti che la catena risulta nettamente più favorevole alla cooperazione. A parità di numero di nodi, dunque, una struttura distribuita e progressiva sembra sostenere meglio la sopravvivenza dei cooperatori rispetto a una struttura fortemente centralizzata. Questo suggerisce che il vantaggio osservato non dipenda solo dalla frammentazione della popolazione, ma anche dal modo in cui i compartimenti sono connessi fra loro.

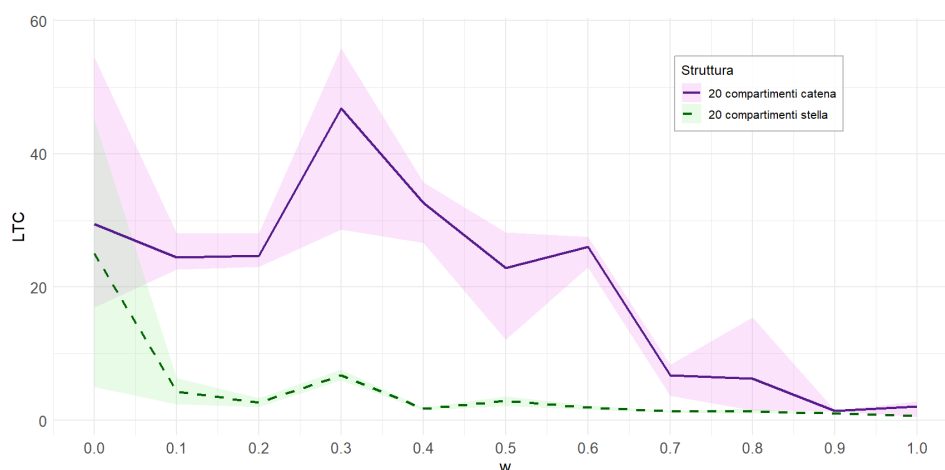


Figura 4.5: Confronto diretto tra due strutture con uguale numero di compartimenti ma topologia diversa. La figura evidenzia che la configurazione a catena (Fig.4.1(e)) mantiene, per gran parte dei valori intermedi di w , una LTC significativamente più elevata rispetto alla struttura a stella (Fig.4.1(f)).

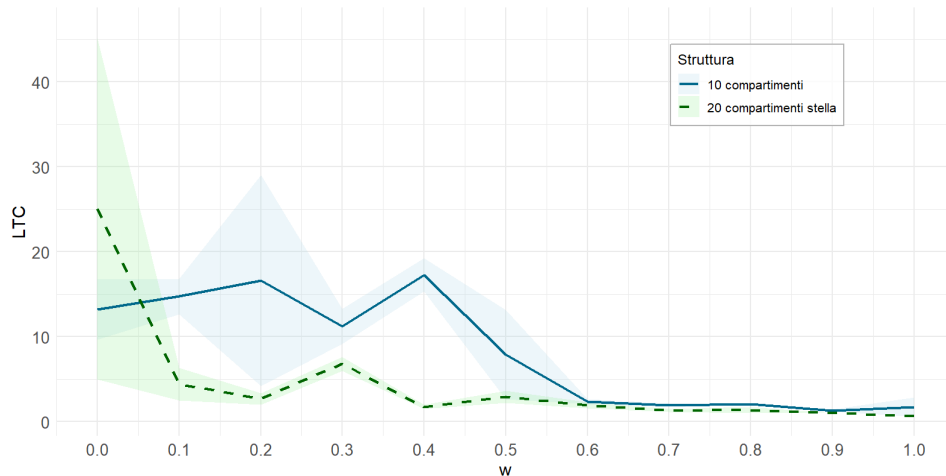


Figura 4.6: Confronto tra la configurazione a 10 compartimenti (Fig.4.1(d)) e quella a 20 compartimenti organizzata a stella (Fig.4.1(f)). Il grafico mostra che l'aumento del numero di compartimenti, se accompagnato da una struttura fortemente centralizzata, non produce lo stesso vantaggio osservato nel caso della catena. Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

Nel complesso quindi, anche nel caso

$$\frac{b}{c} = 1.5,$$

in cui il dilemma del prigioniero resta intrinsecamente sfavorevole alla cooperazione, i risultati mostrano che la struttura locale della popolazione può modificare profondamente l'esito evolutivo di lungo periodo. In particolare, i casi più bilanciati e più significativi dal punto di vista interpretativo sono proprio quelli con probabilità di migrazione intermedie, nei quali emerge con maggiore regolarità la tendenza cercata: all'aumentare del numero di compartimenti disposti a catena aumenta anche, in media, il numero di cooperatori che sopravvive nel lungo periodo. Per osservare la variazione complessiva di valori, è utile anche la seguente figura:

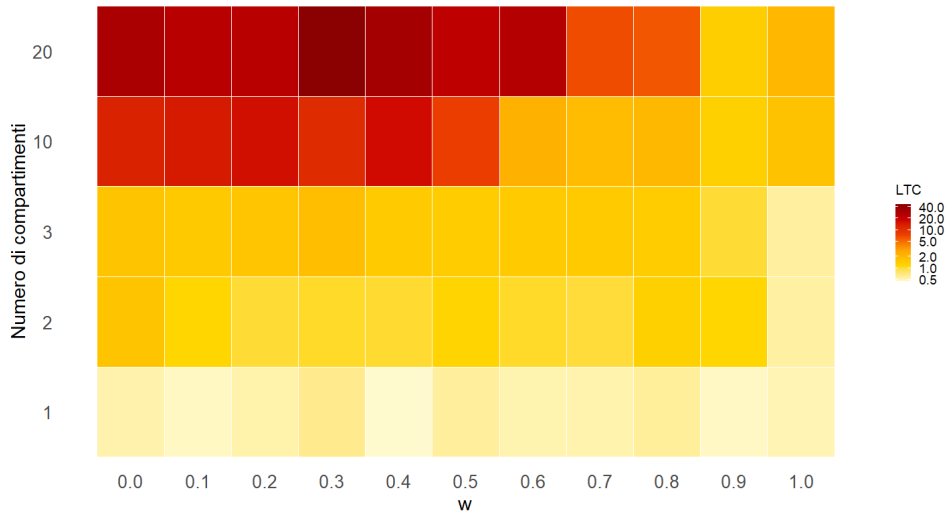


Figura 4.7: Rappresentazione complessiva dei valori medi di cooperatori negli ultimi 10^6 step (LTC) per tutte le configurazioni analizzate a catena (Fig.4.1(a), Fig.4.1(b), Fig.4.1(c), Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)) e per tutti i valori di w . La heatmap consente di visualizzare in modo immediato la tendenza generale del fenomeno: le strutture con un numero maggiore di compartimenti, soprattutto quando disposti a catena, tendono ad associarsi a livelli più alti di cooperazione nel lungo periodo.

4.3 Secondo scenario: $b/c = 20$

Nel caso

$$\frac{b}{c} = 20,$$

cioè in uno scenario con rapporto beneficio-costo più elevato, i risultati confermano e rafforzano la tesi emersa nel caso

$$\frac{b}{c} = 1.5.$$

Pur trattandosi ancora di un Prisoner's Dilemma, dunque di un gioco nel quale cooperare resta una strategia dominata in senso statico, l'introduzione di una struttura spaziale locale consente alla cooperazione di persistere su valori ormai decisamente rilevanti nel lungo periodo.

Anche qui conviene partire dal caso base. Con un solo compartimento, infatti, il numero medio di cooperatori (LTC) negli ultimi

$$10^6$$

update steps è, secondo le simulazioni, di 0.90, quindi ancora molto basso rispetto alla popolazione totale ma decisamente simile al valore calcolato analiticamente nelle sezioni precedenti. La sola modifica del rapporto beneficio-costo, da sola, non è dunque sufficiente a produrre una sopravvivenza ampia della cooperazione in assenza di struttura. Quando però la popolazione viene

suddivisa in più compartimenti, l'effetto cambia in modo evidente: già nei casi a due e tre nodi si osserva infatti un incremento stabile dei valori medi, che risultano superiori al caso non strutturato lungo tutto l'intervallo di w .

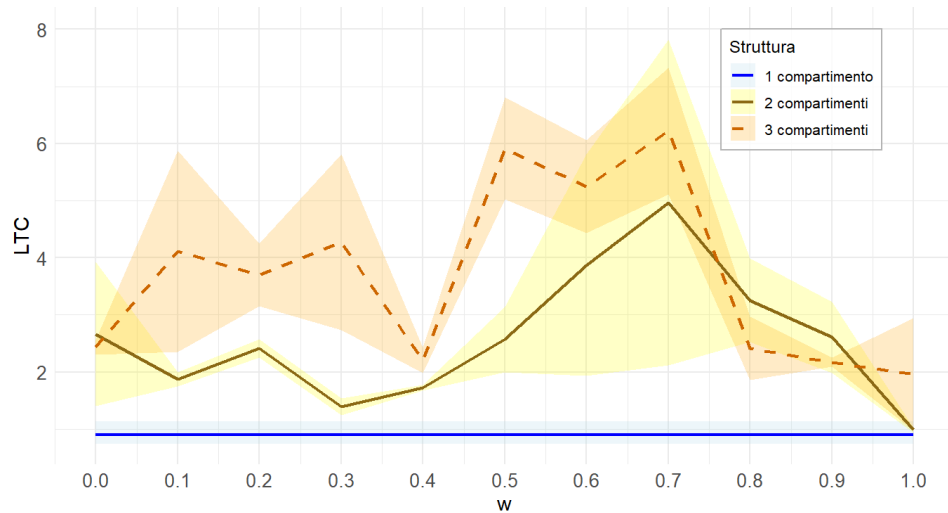


Figura 4.8: Confronto tra LTC negli ultimi 10^6 step per le strutture a 1, 2 e 3 compartimenti (Fig.4.1(a), Fig.4.1(b), Fig.4.1(c)) al variare della probabilità di migrazione w . Il grafico mostra che il caso a un compartimento resta vicino a valori minimi, mentre le strutture a 2 e 3 compartimenti ottengono risultati sistematicamente superiori, soprattutto per valori intermedi di w . Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

L'aspetto più rilevante emerge però, ancora una volta, quando il numero di compartimenti cresce. Nei casi a 10 e 20 compartimenti (Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)) i livelli medi di cooperazione diventano molto più alti, raggiungendo in diversi casi valori dell'ordine di alcune decine di cooperatori su 100. Questo è particolarmente significativo, perché tali risultati vengono ottenuti non in un gioco che premi direttamente la cooperazione, ma in un contesto in cui la cooperazione resta teoricamente svantaggiata se considerata fuori dalla struttura. In altri termini, i dati suggeriscono che sia la sola organizzazione locale della popolazione a modificare l'esito di lungo periodo in modo sostanziale.

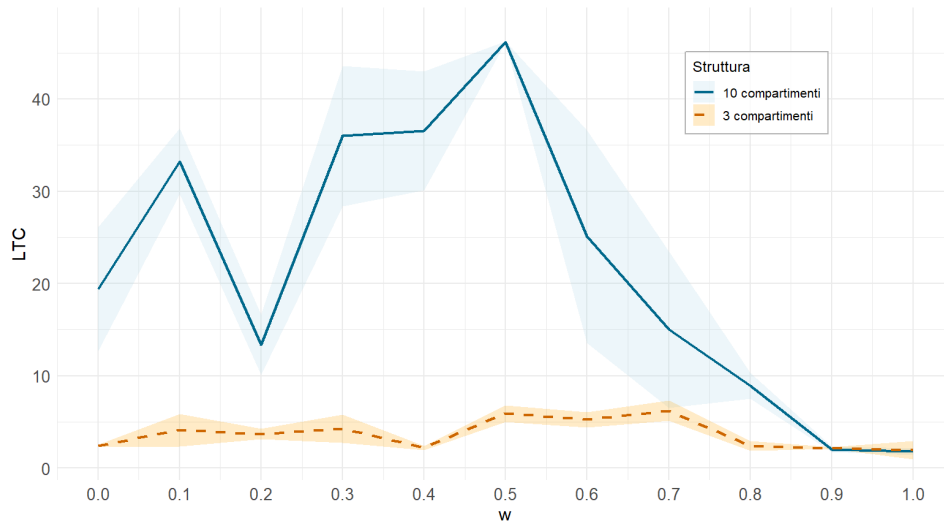


Figura 4.9: Confronto tra le strutture a 3 e 10 compartimenti (Fig.4.1(c), Fig.4.1(d)). Il grafico evidenzia un forte salto nei livelli medi di cooperazione: la configurazione a 10 compartimenti mantiene, per un ampio intervallo di valori di w , una LTC nettamente superiore a quella osservata con 3 compartimenti. Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

Come nel caso precedente, anche qui l'interpretazione del parametro w richiede cautela. I valori estremi

$$w = 0 \quad \text{e} \quad w = 1$$

rappresentano configurazioni limite poco plausibili dal punto di vista interpretativo, perché corrispondono rispettivamente a una dinamica in cui il focal non raggiunge mai il compartimento del role model oppure, al contrario, lo raggiunge sempre in modo perfettamente coerente. Si tratta quindi di due casi ideali che sottintendono, indirettamente, una razionalità nulla oppure quasi meccanica. I valori più interessanti restano allora presumibilmente quelli intermedi, nei quali l'imitazione e il movimento si combinano in modo più realistico. Ed è precisamente in questa fascia che la compartimentazione mostra gli effetti più forti.

Nel confronto tra 10 e 20 compartimenti (Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)) disposti a catena il quadro generale resta favorevole alla struttura più frammentata, ma in questo caso le traiettorie appaiono più irregolari e mostrano oscillazioni marcate al variare di w . Per questo motivo il confronto è stato accompagnato anche dalle rette corrispondenti alle medie complessive dei due casi. Queste ultime mostrano che, nel complesso, la configurazione a 20 compartimenti produce valori medi superiori rispetto a quella a 10. Le oscillazioni puntuali possono ragionevolmente essere attribuite, almeno in parte, alle grandi deviazioni osservate e al numero limitato di simulazioni effettuate per ciascun

valore del parametro, che rende meno regolare l'andamento locale delle curve pur senza alterare la tendenza media complessiva.

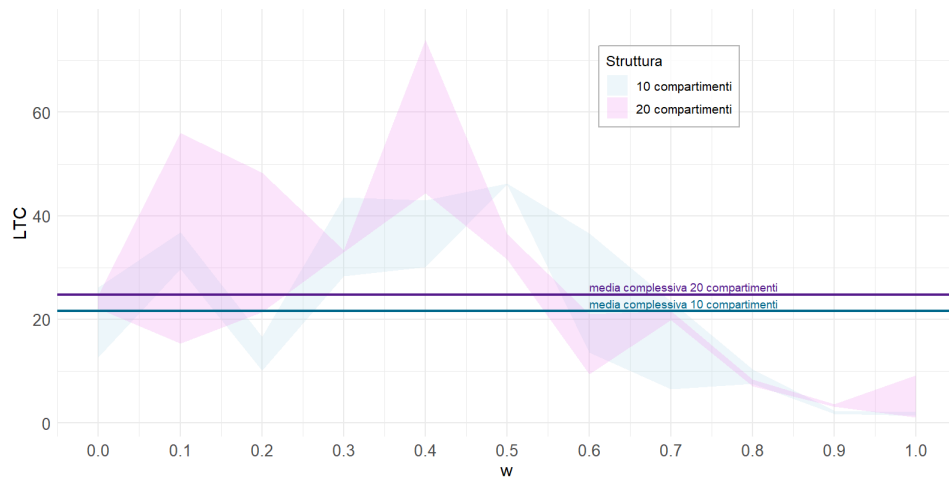


Figura 4.10: Confronto tra le strutture a 10 e 20 compartimenti disposti a catena (Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)). A causa della variabilità osservata nei singoli valori di w , il grafico include anche le rette corrispondenti alle medie complessive dei due casi, che mettono in evidenza la superiorità media della configurazione a 20 compartimenti. Le curve rappresentano il numero medio di operatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

Anche in questo scenario, inoltre, non conta soltanto il numero di compartimenti ma anche la topologia della connessione. Il confronto tra la struttura a 20 compartimenti in catena (Fig.4.1(e)) e quella, sempre a 20 compartimenti, organizzata a stella (Fig.4.1(f)) mostra infatti una differenza netta a favore della catena. La struttura a stella ottiene valori sensibilmente più bassi lungo quasi tutto l'intervallo di w , e solo in prossimità dei valori più estremi le due configurazioni tendono ad avvicinarsi. Questo conferma che una distribuzione più progressiva e meno centralizzata dei compartimenti sembra offrire condizioni più favorevoli alla persistenza dei operatori.

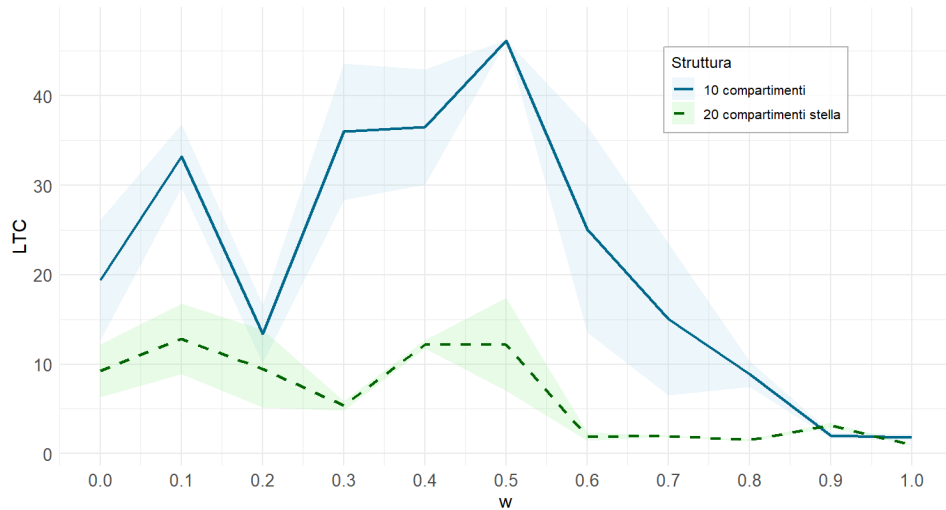


Figura 4.11: Confronto tra la configurazione a 10 compartimenti (Fig.4.1(d)) e quella a 20 compartimenti organizzata a stella (Fig.4.1(f)). Il grafico mostra che la sola crescita del numero di compartimenti non garantisce automaticamente risultati migliori, se la struttura topologica è fortemente centralizzata. Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

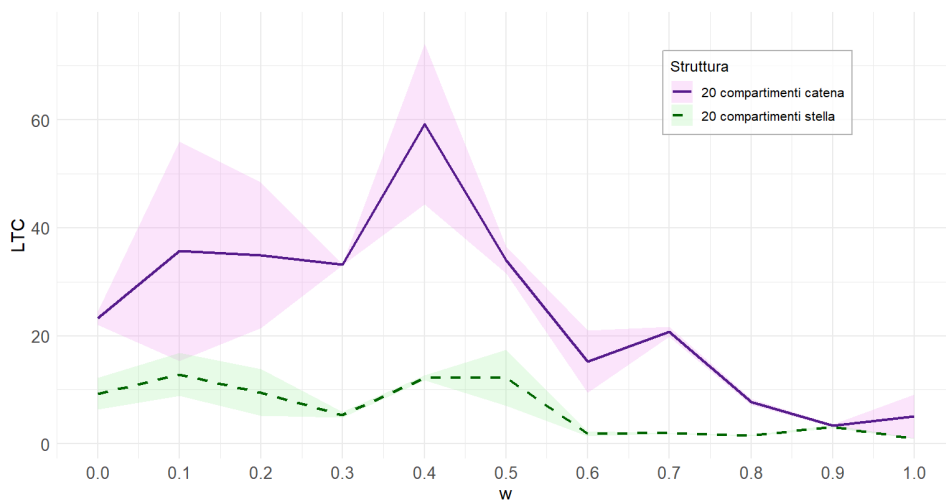


Figura 4.12: Confronto diretto tra due strutture con uguale numero di compartimenti ma diversa topologia (Fig.4.1(e), Fig.4.1(f)). La figura evidenzia che la configurazione a catena risulta nettamente più favorevole alla cooperazione rispetto alla configurazione a stella. Le curve rappresentano il numero medio di cooperatori nel lungo periodo, calcolato negli ultimi 10^6 update steps per ciascun valore di w ; le bande ombreggiate indicano la variabilità osservata tra le simulazioni.

La heatmap riassuntiva conferma visivamente questo insieme di risultati. Le tonalità più intense si concentrano infatti nelle strutture con molti comparti-

menti, soprattutto nelle configurazioni a 10 e 20 nodi (Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)), mentre i casi a 1, 2 e 3 compartimenti (Fig.4.1(a), Fig.4.1(b), Fig.4.1(c)) restano mediamente su livelli più contenuti. In particolare, la fascia centrale dei valori di w continua a essere quella più interessante: non solo perché evita le ipotesi limite dei casi estremi, ma anche perché è proprio in questa regione che il vantaggio delle strutture più articolate appare nel modo più netto.

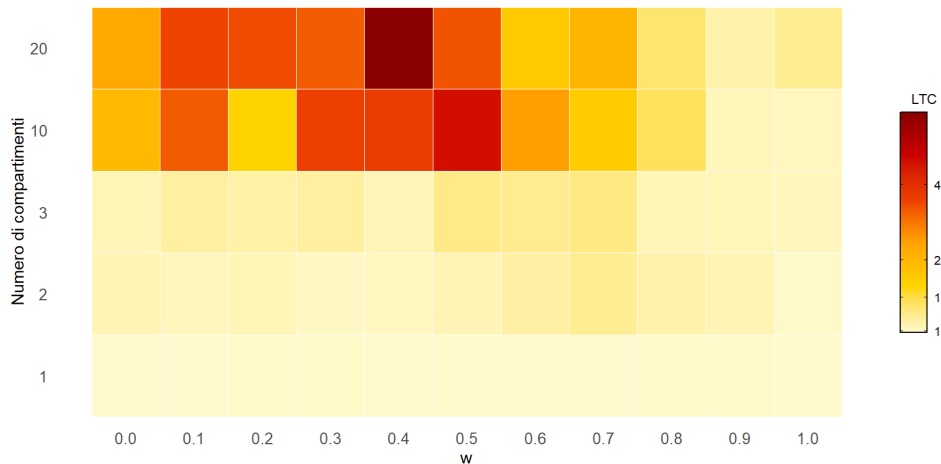


Figura 4.13: Rappresentazione complessiva dei valori medi di cooperatori negli ultimi 10^6 step per tutte le configurazioni a catena analizzate (Fig.4.1(a), Fig.4.1(b), Fig.4.1(c), Fig.4.1(d), Fig.4.1(e)) e per tutti i valori di w . La heatmap mostra con immediatezza che le strutture maggiormente compartimentate raggiungono i livelli più alti di cooperazione nel lungo periodo.

4.4 Confronto tra i due scenari

Il confronto tra i due scenari,

$$\frac{b}{c} = 1.5 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = 20,$$

mostra un andamento pienamente coerente con l'intuizione teorica del modello: all'aumentare del rapporto tra beneficio e costo, la cooperazione risulta sistematicamente meno sfavorita e tutte le medie osservate crescono rispetto al caso meno favorevole. Il dato emerge in modo verticale già dal caso base a un solo compartimento, dove si passa da una media di circa 0.56 cooperatori nel caso

$$\frac{b}{c} = 1.5$$

a circa 0.90 nel caso

$$\frac{b}{c} = 20,$$

rimanendo comunque su valori molto bassi. Anche nelle strutture a due compartimenti il miglioramento è netto: le medie passano da circa 1.09 e 1.16 a circa 2.32 e 2.82, mentre nel caso a tre compartimenti si sale da circa 1.43,

1.36 e 1.45 a circa 3.73 e 3.66, con valori dunque più che raddoppiati. Il salto più significativo si osserva però nelle strutture maggiormente compartimentate. Per 10 compartimenti, le medie complessive crescono da circa 8.08 e 8.33 nel caso

$$\frac{b}{c} = 1.5$$

a circa 20.09 e 23.12 nel caso

$$\frac{b}{c} = 20;$$

analogamente, per 20 compartimenti in catena si passa da circa 20.37 e 18.96 a circa 25.40 e 24.12. Anche il confronto tra le strutture a stella conferma la stessa regolarità: le medie aumentano da circa 3.02 e 6.03 a circa 6.62 e 6.27. In tutti i casi analizzati, dunque, il passaggio da

$$\frac{b}{c} = 1.5$$

a

$$\frac{b}{c} = 20$$

produce un incremento delle medie di cooperazione, senza inversioni di tendenza. Questo rafforza l'interpretazione complessiva dei risultati: la struttura della popolazione resta il fattore decisivo per la persistenza dei cooperatori, ma quando il rapporto beneficio-costi diventa più favorevole il medesimo meccanismo strutturale agisce su una base già meno ostile, amplificando ulteriormente la sopravvivenza della cooperazione nel lungo periodo.

Nel complesso quindi, il caso

$$\frac{b}{c} = 20$$

conferma dunque in modo ancora più chiaro la conclusione generale del modello: la compartimentazione della popolazione, soprattutto quando organizzata in una struttura a catena e associata a valori intermedi della probabilità di migrazione, favorisce in misura rilevante la sopravvivenza della cooperazione. Il risultato appare tanto più significativo se si considera che esso emerge pur sempre all'interno di un Prisoner's Dilemma, cioè di un gioco nel quale, dal punto di vista statico, la cooperazione rimane una strategia dominata.

Capitolo 5

Discussione e applicazioni

5.1 Interpretazione generale dei risultati

I risultati ottenuti nel capitolo precedente mostrano con sufficiente chiarezza che, nel modello proposto, la struttura della popolazione non costituisce un semplice elemento accessorio, ma una componente determinante dell'esito evolutivo. Il punto centrale non è soltanto che, aumentando il numero di compartimenti, aumenti anche il numero medio di cooperatori nel lungo periodo (LTC); il dato più significativo è piuttosto che una modifica puramente strutturale, a parità di gioco di base, può cambiare in maniera qualitativa la dinamica complessiva del sistema. In altre parole, la matrice del Prisoner's Dilemma resta la stessa, e la cooperazione continua a essere, in senso statico, una strategia dominata; ciò che cambia è il contesto in cui gli individui osservano, imitano e si spostano. È proprio questa modifica dell'architettura delle interazioni a rendere possibile, in molti casi, la persistenza della cooperazione nel lungo periodo.

Da questo punto di vista, il caso a un solo compartimento svolge un ruolo particolarmente importante. In esso, infatti, la cooperazione tende a scomparire e i valori medi ottenuti numericamente risultano molto bassi, in accordo con il calcolo teorico fondato sulla distribuzione stazionaria della corrispondente catena di Markov. Questo primo controllo rafforza la credibilità dell'intero impianto computazionale: se nel caso più semplice, cioè quello in cui il modello è trattabile anche dal punto di vista analitico, simulazione e teoria producono valori compatibili, allora risulta più ragionevole attribuire un significativo grado di affidabilità anche ai risultati dei casi più complessi, nei quali una trattazione esatta non risulta attualmente disponibile.

5.2 Ruolo del numero di compartimenti e della località delle interazioni

Il primo fenomeno che emerge con continuità dai risultati è il ruolo del numero di compartimenti. A parità di popolazione complessiva, la cooperazione tende a sopravvivere di più quando la popolazione è suddivisa in un numero maggiore di compartimenti, soprattutto nel caso di strutture disposte a catena. Già passando da uno a due o tre compartimenti si osserva un miglioramento, ma il salto più evidente compare nei casi a 10 e 20 compartimenti, nei quali il numero medio di cooperatori può raggiungere valori nettamente superiori rispetto al caso non strutturato. Questo vale sia nello scenario meno favorevole

$$\left(\frac{b}{c} = 1.5\right),$$

sia in quello più favorevole

$$\left(\frac{b}{c} = 20\right),$$

anche se, naturalmente, nel secondo caso le medie risultano più elevate.

Una possibile interpretazione di questo comportamento è che la compartimentazione limiti la diffusione immediata del comportamento opportunistico all'intera popolazione. In una popolazione ben mescolata, un defezionatore particolarmente efficace può influenzare direttamente tutto il sistema; nel modello qui studiato, invece, l'osservazione del role model è locale, e questo rende più difficile che una strategia si diffonda simultaneamente ovunque. Al tempo stesso, la presenza di compartimenti distinti consente la formazione e il mantenimento di nuclei locali di cooperatori, che possono sostenersi reciprocamente più a lungo prima di essere invasi. In questo senso, la località delle interazioni sembra agire come un meccanismo di protezione parziale della cooperazione.

5.3 Ruolo della probabilità di migrazione w

Un secondo aspetto rilevante riguarda l'interpretazione del parametro w , cioè della probabilità che il focal si sposti esattamente nel compartimento del role model. I risultati numerici mostrano che i casi più interessanti non sono quelli estremi, bensì quelli intermedi. I valori

$$w = 0 \quad \text{e} \quad w = 1,$$

pur utili come casi limite per comprendere il comportamento del modello, corrispondono infatti a situazioni poco plausibili dal punto di vista interpretativo.

Nel primo caso, come già illustrato in precedenza, l'individuo non raggiunge mai il compartimento del role model mentre nel secondo, invece, vi si sposta sempre in modo perfettamente coerente. Si tratta dunque di due limiti ideali che sottintendono indirettamente, rispettivamente, un'aderenza nulla oppure una coerenza quasi meccanica rispetto all'informazione osservata.

Al contrario, i valori intermedi di w sembrano rappresentare un compromesso più realistico tra imitazione, variabilità individuale e mobilità locale. Ed è proprio in questa fascia che la compartimentazione mostra gli effetti più forti. Il risultato suggerisce quindi che né l'isolamento totale né un inseguimento perfettamente diretto del role model siano le condizioni più favorevoli alla cooperazione, e ciò acquisisce maggiore evidenza se posto in collegamento con le osservazioni precedenti. Più plausibilmente, la persistenza dei cooperatori richiede un equilibrio tra località, mescolamento e variabilità.

5.4 Ruolo della topologia e ipotesi interpretative

I risultati mostrano inoltre che non conta soltanto il numero dei compartimenti, ma anche il modo in cui essi sono connessi. Il confronto tra la struttura a catena e quella a stella, entrambe con 20 compartimenti, è particolarmente istruttivo: a parità di numero di nodi, la configurazione a catena risulta nettamente più favorevole alla sopravvivenza della cooperazione rispetto a quella fortemente centralizzata a stella. La sola crescita del numero di compartimenti, dunque, non è sufficiente di per sé a produrre il massimo vantaggio; è necessario considerare anche la topologia del grafo.

Una possibile interpretazione, che in questa sede va intesa come ipotesi plausibile più che come conclusione definitiva, è che i comportamenti opportunistici, così come quelli cooperativi, possano diffondersi nel sistema secondo due modalità differenti. La prima è una diffusione per espansione locale, nella quale una strategia si allarga progressivamente ai compartimenti adiacenti. La seconda è una diffusione per traslazione, nella quale individui "camminatori" trasportano una strategia in nuove regioni del grafo. Se questa lettura è corretta, allora grafi con lunghezza media dei cammini più elevata e con struttura meno centralizzata potrebbero ostacolare maggiormente la diffusione dei defezionatori rispetto a strutture come la stella, nelle quali la presenza di un nodo centrale riduce drasticamente le distanze e facilita la propagazione rapida delle strategie. In questa prospettiva, il vantaggio della catena non dipenderebbe soltanto dalla frammentazione della popolazione, ma anche dal fatto che essa distribuisce il flusso delle interazioni in maniera più progressiva e meno concentrata.

Naturalmente, questa interpretazione richiede ulteriori verifiche. In particolare, sarà utile confrontare in futuro alberi diversi e topologie intermedie, capaci

di collocarsi tra catena e stella non solo rispetto alla lunghezza media dei cammini, ma anche rispetto ad altre misure strutturali, come ad esempio la centralità di intermediazione. I risultati ottenuti finora suggeriscono che tali caratteristiche possano incidere in modo sostanziale sulla sopravvivenza della cooperazione, ma resta in larga misura aperto il problema di capire quale tra esse sia davvero determinante e in che misura.

5.5 Confronto tra i casi $\frac{b}{c} = 1.5$ e $\frac{b}{c} = 20$

Il confronto tra i due scenari studiati,

$$\frac{b}{c} = 1.5 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = 20,$$

mostra un comportamento pienamente coerente con l'intuizione teorica del modello. In tutti i casi analizzati, quando il rapporto beneficio-costo aumenta, aumentano anche le medie di cooperazione osservate nel lungo periodo. Questo significa che, come atteso, un contesto meno sfavorevole alla cooperazione rende più facile la persistenza dei cooperatori. Tuttavia, il punto essenziale è che la struttura della popolazione continua a restare il fattore decisivo. Nel caso non strutturato, infatti, anche con

$$\frac{b}{c} = 20$$

la cooperazione resta su valori molto bassi; è solo quando la popolazione viene compartimentata che il vantaggio del maggior rapporto beneficio-costo si traduce in livelli decisamente più elevati di sopravvivenza cooperativa.

Da questo punto di vista, i due scenari non si contraddicono, ma si rafforzano a vicenda. Il caso

$$\frac{b}{c} = 1.5$$

mostra che il meccanismo strutturale individuato dal modello è sufficientemente robusto da produrre un effetto osservabile anche in condizioni di partenza molto ostili alla cooperazione. Il caso

$$\frac{b}{c} = 20$$

mostra invece il pieno potenziale dello stesso meccanismo quando agisce in un contesto più favorevole. In altre parole, il primo caso dimostra la solidità qualitativa del risultato, mentre il secondo ne mette in evidenza l'ampiezza quantitativa.

5.6 Limiti del modello

Come ogni modello, anche quello proposto in questo lavoro presenta limiti che è opportuno esplicitare. Anzitutto, la popolazione totale è fissata a

$$N = 100,$$

e quindi i risultati ottenuti non permettono di inferire automaticamente cosa accadrebbe per popolazioni molto più grandi. In secondo luogo, l'analisi numerica, pur basata su simulazioni molto lunghe, resta costruita su un numero limitato di run indipendenti per ciascun valore dei parametri; questo può contribuire alle oscillazioni più irregolari osservate in alcuni grafici, soprattutto nei confronti tra strutture con molti compartimenti. Inoltre, il lavoro si concentra soltanto su alcune topologie specifiche e su due valori del rapporto

$$\frac{b}{c},$$

lasciando aperta una parte molto ampia dello spazio dei parametri.

Un ulteriore limite riguarda il meccanismo di aggiornamento, che è stato mantenuto volutamente semplice: un solo focal per step, scelta del role model proporzionale all'effective payoff, copia con probabilità p , mutazione con probabilità $1 - p$, e una regola di migrazione basata su w . Questa semplicità costituisce un vantaggio dal punto di vista interpretativo, ma implica anche che il modello non pretenda di descrivere tutta la complessità di sistemi reali. Più correttamente, esso isola un principio dinamico specifico — il ruolo della località delle interazioni in una popolazione compartimentata — e ne studia gli effetti in forma controllata.

5.7 Applicazioni e sistemi biologici utili come campione

L'ambito applicativo più naturale per interpretare i risultati ottenuti è quello dei sistemi microbici. In comunità batteriche e consorzi microbici, infatti, la cooperazione svolge spesso un ruolo essenziale: produzione di beni pubblici, *cross-feeding* metabolico, condivisione di risorse extracellulari e organizzazione collettiva in biofilm sono tutti processi nei quali il comportamento cooperativo può aumentare robustezza, produttività e adattamento del sistema. Allo stesso tempo, però, questi contesti sono particolarmente vulnerabili alla presenza di individui opportunisti, cioè soggetti che beneficiano delle risorse prodotte dagli altri senza sostenerne il costo. Proprio per questo motivo, la questione di come la cooperazione possa persistere in comunità microbiche è oggi considerata

rilevante non solo sul piano teorico, ma anche in vista di possibili applicazioni biotecnologiche.

Sotto questo profilo, il modello proposto nella presente tesi non intende certamente fornire una descrizione realistica completa di una comunità microbica. Tuttavia, esso suggerisce un principio generale che appare compatibile con tali sistemi: la località delle interazioni e una struttura compartimentale della popolazione possono contribuire in modo significativo alla sopravvivenza della cooperazione. In termini biologici, i compartimenti del modello possono essere letti, almeno in prima approssimazione, come microambienti o nicchie locali nei quali gli individui interagiscono in modo più intenso con i vicini immediati che con l'intera popolazione. In simili contesti, la possibilità che i cooperatori persistano più facilmente non dipenderebbe soltanto dalla bontà intrinseca della strategia cooperativa, ma anche dal fatto che la diffusione dei comportamenti opportunistici può risultare limitata da barriere strutturali e da vincoli di osservazione locale.

Questo aspetto è particolarmente interessante in chiave biotecnologica. Molte applicazioni basate su comunità microbiche — dalla fermentazione alla *bio-remediation*, fino ai consorzi sintetici — dipendono infatti dalla stabilità di interazioni cooperative tra ceppi o specie differenti. Se una struttura spaziale o compartimentale aiuta a contenere la diffusione dei “cheaters” e favorisce la persistenza dei produttori di beni pubblici, allora i risultati di modelli come quello qui proposto possono offrire un'indicazione teorica utile: non è sufficiente progettare le interazioni biochimiche, ma può essere altrettanto importante controllare il modo in cui la popolazione è distribuita nello spazio e il grado di località con cui gli individui si influenzano reciprocamente.

Solo in via più preliminare, un'idea simile potrebbe essere estesa anche a sistemi sociali o organizzativi, nei quali le persone osservano e imitano soprattutto chi appartiene al proprio contesto locale. Tuttavia, in tali casi sarebbe necessaria una verifica molto più cauta, perché il legame tra comportamento individuale e payoff non coincide con quello, più immediato, ipotizzabile in popolazioni biologiche o microbiche.

5.8 Sviluppi futuri

I risultati ottenuti aprono naturalmente a diverse linee di sviluppo. Una prima direzione consiste nell'estendere l'analisi ad altri giochi evolutivi, in particolare allo Stag Hunt, per verificare se e in che misura il ruolo della struttura compartimentale resti simile oppure muti in presenza di un differente problema strategico di base. Un'ulteriore scenario di ricerca potrebbe inoltre riguardare lo studio del modello nel caso di selezione forte: nel presente lavoro, infatti, l'analisi è stata condotta assumendo un valore molto piccolo di δ , coerente con un regime di selezione debole, nel quale le differenze di payoff influenzano la scelta del role model in modo graduale. Sarebbe quindi interessante verificare

se e in che misura i risultati ottenuti restino validi anche per valori più elevati di δ , ad esempio $\delta = 0.1$, corrispondenti a un regime di selezione forte. In tale contesto, infatti, il peso delle differenze di payoff diventerebbe molto più marcato, e la dinamica complessiva del sistema potrebbe cambiare in modo sostanziale, modificando sia la persistenza della cooperazione sia il ruolo della struttura compartimentale.

Una terza opzione, già suggerita dai confronti tra catena e stella, riguarda l'esplorazione sistematica di alberi differenti e di topologie più complesse, caratterizzate da misure di connessione diverse. In questo senso, il problema di capire quali proprietà strutturali — lunghezza media dei cammini, grado di centralizzazione, centralità dei nodi o altre quantità ancora — siano davvero decisive per la sopravvivenza della cooperazione resta sostanzialmente aperto. Un'ulteriore direzione di sviluppo, più propriamente analitica, consiste nel cercare una descrizione teorica anche per i casi con più di un compartimento. Una possibile via è quella di mettere in relazione alcune proprietà globali della struttura del grafo, in particolare il cammino medio, con la probabilità che cooperatori e defezionatori si incontrino effettivamente nel processo di aggiornamento. Se tale collegamento potesse essere formalizzato, diventerebbe forse possibile derivare almeno una stima analitica delle fitness medie delle due strategie e quindi comprendere più a fondo, senza ricorrere soltanto alla simulazione, perché certe topologie favoriscano maggiormente la cooperazione.

Infine, ricerche future nel merito potrebbero consistere anche nell'aumentare il numero di simulazioni indipendenti per ciascun valore dei parametri, così da ridurre la variabilità dei risultati numerici e distinguere meglio gli effetti sistematici dalle oscillazioni dovute alla componente stocastica. Risulterebbe inoltre tutt'altro che inutile esplorare meccanismi alternativi di scelta del role model, eventuali pesi diversi sugli archi del grafo o compartimenti di capacità differente. Tutte queste estensioni condividono la stessa domanda di fondo, che emerge come il principale lascito del presente lavoro: non se la struttura della popolazione conti, perché i risultati indicano chiaramente che conta, ma quali aspetti della struttura contino davvero di più e attraverso quali meccanismi riescano a sostenere la cooperazione nel lungo periodo.

Appendice

5.9 Dati ottenuti per le analisi nel caso $b/c = 1.5$

Tabella 5.1: Valori medi di cooperatori nel lungo periodo (LTC) per il caso a 1 nodo, nel caso $\frac{b}{c} = 1.5$, su 11 ripetizioni indipendenti.

Ripetizione	1 nodo
1	0.558689
2	0.487491
3	0.560746
4	0.669340
5	0.459580
6	0.608507
7	0.544571
8	0.553613
9	0.620578
10	0.482318
11	0.534563
Media	0.555651

Tabella 5.2: LTC per le configurazioni a 2 e 3 nodi, nel caso $\frac{b}{c} = 1.5$, al variare di w .

w	2 nodi (run 1)	2 nodi (run 2)	3 nodi (run 1)	3 nodi (run 2)	3 nodi (run 3)
0.0	1.452636	1.830242	1.396995	1.688889	1.924227
0.1	1.076344	1.282592	1.866702	1.207728	1.484504
0.2	1.139090	0.932241	1.448911	1.523122	1.871480
0.3	0.956909	1.195537	1.742404	1.560659	2.295026
0.4	1.011514	1.099098	1.355879	1.681465	1.362021
0.5	1.156152	1.274586	1.762985	1.322085	1.201916
0.6	1.209617	0.950182	1.277053	1.520419	1.656378
0.7	1.001887	1.041987	1.387435	1.752580	1.233345
0.8	1.184251	1.441042	1.572911	1.198863	1.471550
0.9	1.235659	1.108531	1.134864	1.024849	0.948325
1.0	0.612310	0.575400	0.770684	0.529561	0.522617
Media	1.094215	1.157403	1.428802	1.364565	1.451944

Tabella 5.3: LTC per le configurazioni a 10 nodi, 20 nodi in catena e 20 nodi a stella, nel caso $\frac{b}{c} = 1.5$, al variare di w .

w	10 nodi (run 1)	10 nodi (run 2)	20 catena (run 1)	20 catena (run 2)	20 catena (run 3)	20 stella (run 1)	20 stella (run 2)
0.0	9.629869	16.752169	16.981656	54.523437	16.981656	4.975874	45.157274
0.1	12.658565	16.840908	22.586126	28.148979	22.586126	6.313239	2.454631
0.2	29.013656	4.213097	23.058508	28.054722	23.058508	3.358326	1.973144
0.3	9.141311	13.289347	55.873462	28.610732	55.873462	7.579804	5.997995
0.4	15.298281	19.242948	35.692020	26.617691	35.692020	1.962639	1.495699
0.5	2.631164	13.140506	28.226590	12.126034	28.226590	3.625760	2.199746
0.6	2.064778	2.639624	27.585254	22.993701	27.585254	1.555786	2.240464
0.7	2.108219	1.697001	8.364875	3.639991	8.364875	1.160278	1.462811
0.8	2.059057	2.054900	1.546027	1.742609	15.460270	1.013686	1.725800
0.9	1.400334	1.224548	1.317466	1.520999	1.317466	1.006640	0.978072
1.0	2.866114	0.542721	2.870153	0.537562	2.870153	0.660635	0.637134
Media	8.079213	8.330706	20.372922	18.956042	21.637853	3.019333	6.029343

5.10 Dati ottenuti per le analisi nel caso $b/c = 20$

Tabella 5.4: Valori medi di cooperatori nel lungo periodo (LTC) per il caso a 1 nodo, nel caso $\frac{b}{c} = 20$, su 11 ripetizioni indipendenti.

Ripetizione	1 nodo
1	0.906958
2	0.773739
3	0.992278
4	1.133484
5	0.792646
6	0.881039
7	0.880446
8	0.736593
9	0.934733
10	1.030894
11	0.870191
Media	0.903000091

Tabella 5.5: LTC per le configurazioni a 2 e 3 nodi, nel caso $\frac{b}{c} = 20$, al variare di w .

w	2 nodi (run 1)	2 nodi (run 2)	3 nodi (run 1)	3 nodi (run 2)
0.0	1.400644	3.928216	2.304623	2.564595
0.1	1.741580	1.993700	5.880715	2.356605
0.2	2.575740	2.254376	3.152527	4.245696
0.3	1.536700	1.247391	5.811824	2.733190
0.4	1.774975	1.668528	2.426852	1.978062
0.5	3.143814	1.991289	6.812843	5.018675
0.6	5.810311	1.932059	4.436108	6.061724
0.7	2.122311	7.815835	5.107802	7.326195
0.8	2.521889	3.989903	1.855517	2.961859
0.9	1.985265	3.228646	2.248093	2.095049
1.0	0.936227	1.023025	0.970056	2.940830
Media	2.322678	2.824815	3.727905	3.662044

Tabella 5.6: LTC per le configurazioni a 10 nodi, 20 nodi in catena e 20 nodi a stella, nel caso $\frac{b}{c} = 20$, al variare di w .

w	10 nodi (run 1)	10 nodi (run 2)	20 catena (run 1)	20 catena (run 2)	20 stella (run 1)	20 stella (run 2)
0.0	12.712053	26.145252	22.017213	24.583638	6.311558	12.215305
0.1	29.705160	36.786439	56.006742	15.328886	8.887709	16.789085
0.2	16.649088	10.145690	21.392447	48.360130	13.836878	5.154618
0.3	28.351026	43.609914	33.296726	33.011133	4.838278	5.921546
0.4	30.105889	42.960837	74.019966	44.342959	11.728708	12.701502
0.5	46.131757	46.238041	31.604061	36.485951	17.385128	7.014415
0.6	36.611461	13.569680	9.418286	21.026589	2.385657	1.445712
0.7	6.557954	23.489976	19.810560	21.630813	2.038247	1.874393
0.8	10.312845	7.502015	7.134773	8.324127	1.612514	1.405882
0.9	2.370376	1.717155	3.645185	3.105887	2.869035	3.465815
1.0	1.440175	2.139546	1.006772	9.153890	0.945292	1.018303
Media	20.086162	23.118595	25.395703	24.123091	6.621728	6.273325

5.11 Codice per la costruzione grafo, *update step* e stampa dei risultati

Il seguente codice implementa il modello nel caso di 20 compartimenti disposti a catena, con sweep del parametro w nei valori da 0.0 a 1.0 con passo 0.1. Chiaramente, lo stesso codice è stato utilizzato anche negli altri casi (10 a catena, 3 a catena, 2 a catena) modificando la variabile relativa al numero di nodi

```
import random
import networkx as nx

N = 100
C_total = 50
D_total = 50

b = 20.0
c = 1.0
delta = 0.001

p = 0.999

steps = 1000000000 # numero di update steps da eseguire
tail = 1000000     # finestra finale su cui fare la media

NUM_NODES = 20
NODES = list(range(NUM_NODES))

# -----
# Stampa stato del grafo (conteggi per nodo)
```

```

# -----
def print_graph_state(G, label=""):
    if label:
        print("\n" + label)

    print("Nodi (C, D, n):")
    for v in G.nodes:
        C_v = G.nodes[v]["C"]
        D_v = G.nodes[v]["D"]
        n_v = G.nodes[v]["n"]
        name = G.nodes[v].get("name", str(v))
        print(f" - node {v} ({name}): C={C_v}, D={D_v}, n
            ={n_v}")

    C_tot = sum(G.nodes[v]["C"] for v in G.nodes)
    D_tot = N - C_tot
    print(f"Totali: N={N}, C={C_tot}, D={D_tot}")

# -----
# Nodi adiacenti (Graph -> neighbors)
# -----
def adjacent_nodes(G, v):
    return set(G.neighbors(v))

# -----
# Inizializzazione (ricreata a ogni run)
# Catena 0-1-2-...-19
# -----
def init_graph_20():
    G = nx.Graph()

    # Nodi
    for v in NODES:
        G.add_node(v, name=str(v))

    # Catena
    for v in range(NUM_NODES - 1):
        G.add_edge(v, v + 1)

    # Distribuzione iniziale popolazione nei 20 nodi (
        sizes >=0, somma = N)
    sizes = [0] * NUM_NODES
    remaining = N
    for i in range(NUM_NODES - 1):
        s = random.randint(0, remaining)
        sizes[i] = s
        remaining -= s
    sizes[NUM_NODES - 1] = remaining

```

```

strategies = (["C"] * C_total) + (["D"] * D_total)
random.shuffle(strategies)

idx = 0
for i, v in enumerate(NODES):
    size_v = sizes[i]
    block = strategies[idx:idx + size_v]
    idx += size_v

    C_v = block.count("C")
    D_v = size_v - C_v

    G.nodes[v]["C"] = C_v
    G.nodes[v]["D"] = D_v
    G.nodes[v]["n"] = size_v

return G

# -----
# 1 update step (20 nodi)
# -----
def one_update_step_twenty_nodes(G, b, c, delta, p, w):
    # PASSO 1) Payoff locali + EP in ciascun nodo
    for v in G.nodes:
        C_v = G.nodes[v]["C"]
        D_v = G.nodes[v]["D"]
        n_v = C_v + D_v

        if n_v <= 1:
            payoff_C_v = 0.0
            payoff_D_v = 0.0
        else:
            payoff_C_v = (C_v - 1) * (b - c) + D_v * (-c)
            payoff_D_v = C_v * b

        G.nodes[v]["EP_C"] = (1.0 + delta) ** payoff_C_v
        G.nodes[v]["EP_D"] = (1.0 + delta) ** payoff_D_v

    # PASSO 2) Scelta del focal uniforme sull'intera
    # popolazione
    N_total = 0
    for v in G.nodes:
        N_total += G.nodes[v]["n"]

    r = random.randrange(N_total)

    cum = 0
    focal_node = None
    for v in G.nodes:

```

```

        cum += G.nodes[v]["n"]
        if r < cum:
            focal_node = v
            break

n_f = G.nodes[focal_node]["n"]
C_f = G.nodes[focal_node]["C"]

r2 = random.randrange(n_f)
focal_strategy = "C" if r2 < C_f else "D"

# PASSO 3) Scelta del Role Model (RM) solo tra focal
# e adiacenti
visible_nodes = {focal_node} | adjacent_nodes(G,
        focal_node)

weights = []
W_tot = 0.0
for v in visible_nodes:
    C_v = G.nodes[v]["C"]
    D_v = G.nodes[v]["D"]

    wC = C_v * G.nodes[v]["EP_C"]
    wD = D_v * G.nodes[v]["EP_D"]

    if wC > 0.0:
        weights.append((wC, v, "C"))
        W_tot += wC
    if wD > 0.0:
        weights.append((wD, v, "D"))
        W_tot += wD

x = random.random() * W_tot
cumw = 0.0
rm_node = None
rm_strategy = None
for wgt, v, s in weights:
    cumw += wgt
    if x <= cumw:
        rm_node = v
        rm_strategy = s
        break

# PASSO 4) Strategia + migrazione
if random.random() < p:
    new_strategy = rm_strategy
else:
    new_strategy = "D" if rm_strategy == "C" else "C"

```

```

if random.random() < w:
    dest_node = rm_node
else:
    neigh_rm = adjacent_nodes(G, rm_node)
    dest_node = rm_node if not neigh_rm else random.
        choice(list(neigh_rm))

# PASSO 5) Aggiornamento conteggi (uscita + entrata)
if focal_strategy == "C":
    G.nodes[focal_node]["C"] -= 1
else:
    G.nodes[focal_node]["D"] -= 1
G.nodes[focal_node]["n"] -= 1

if new_strategy == "C":
    G.nodes[dest_node]["C"] += 1
else:
    G.nodes[dest_node]["D"] += 1
G.nodes[dest_node]["n"] += 1

# SWEEP su w

w_values = [i / 10 for i in range(11)]
start_tail = steps - tail

print(f"Avvio sweep: steps={steps}, tail={tail}, p={p},
    delta={delta}, b={b}, c={c}")
print("w values:", w_values)

for w in w_values:
    G = init_graph_20()

    print("\n" + "=" * 70)
    print(f"RUN per w = {w:.1f}")
    print_graph_state(G, label="STATO INIZIALE:")

    sum_C_tail = 0.0
    sum_D_tail = 0.0

    for t in range(steps):
        one_update_step_twenty_nodes(G, b, c, delta, p, w
            )

        if t >= start_tail:
            C_tot = 0
            for v in G.nodes:
                C_tot += G.nodes[v]["C"]
            D_tot = N - C_tot
            sum_C_tail += C_tot

```

```

        sum_D_tail += D_tot

avg_C_tail = sum_C_tail / tail
avg_D_tail = sum_D_tail / tail

print_graph_state(G, label=f"STATO FINALE DOPO {steps
    } UPDATE STEPS:")
print(f"\nMedia (totale) negli ultimi {tail} steps
    per w={w:.1f}:")
print(f" - C medio = {avg_C_tail}")
print(f" - D medio = {avg_D_tail}")

```

Listing 5.1: Implementazione Python del modello con 20 compartimenti disposti a catena.

Per il caso a 20 nodi organizzati a stella, il codice resta invariato in tutte le sue parti essenziali, salvo due modifiche relative alla struttura del grafo. In primo luogo, viene introdotta la variabile

```
CENTER = 0
```

che rappresenta il nodo centrale della stella. In secondo luogo, la funzione di inizializzazione del grafo viene modificata nel modo seguente:

```

def init_graph_20():
    G = nx.Graph()

    # Nodi
    for v in NODES:
        G.add_node(v, name=str(v))

    # Stella
    for v in range(1, NUM_NODES):
        G.add_edge(CENTER, v)

    # Distribuzione iniziale popolazione nei 20 nodi (
        sizes >=0, somma = N)
    sizes = [0] * NUM_NODES
    remaining = N
    for i in range(NUM_NODES - 1):
        s = random.randint(0, remaining)
        sizes[i] = s
        remaining -= s
    sizes[NUM_NODES - 1] = remaining

    strategies = (["C"] * C_total) + (["D"] * D_total)
    random.shuffle(strategies)

    idx = 0
    for i, v in enumerate(NODES):
        size_v = sizes[i]

```

```

    block = strategies[idx:idx + size_v]
    idx += size_v

    C_v = block.count("C")
    D_v = size_v - C_v

    G.nodes[v]["C"] = C_v
    G.nodes[v]["D"] = D_v
    G.nodes[v]["n"] = size_v

    return G

```

Listing 5.2: Funzione di inizializzazione per il caso a 20 nodi disposti a stella.

In questo modo il nodo centrale, identificato da `CENTER = 0`, viene collegato a tutti gli altri nodi, mentre il resto della logica del programma, inclusi payoff locali, scelta del focal, selezione del role model, aggiornamento di strategia e migrazione, rimane identico al caso della catena.

5.12 Codice per il calcolo diretto della distribuzione stazionaria e numero medio di cooperatori nel lungo periodo

Il seguente codice implementa il calcolo della distribuzione stazionaria della catena di Markov associata al caso a un solo compartimento.

```

N = 100          # popolazione totale
b = 20.0        # beneficio
c = 1.0         # costo
delta = 0.001   # parametro per effective payoff
p = 0.999       # probabilit di copia della strategia
                del role model

# Nota:
# 1 - p rappresenta la probabilit di mutazione,
# cio di adozione della strategia opposta a quella del
    role model.

# 1) Payoff delle due strategie nello stato i

def payoff_C(i: int) -> float:
    """
    Restituzione del payoff di un cooperatore quando
        nello stato
        sono presenti i cooperatori e N-i defezionatori.
    """

```

```

    payoff_C(i) = (i - 1)*(b - c) + (N - i)*(-c)
    """
    return (i - 1) * (b - c) + (N - i) * (-c)

def payoff_D(i: int) -> float:
    """
    Restituzione del payoff di un defezionatore quando
        nello stato
        sono presenti i cooperatori.

    payoff_D(i) = i*b
    """
    return i * b

# 2) Effective payoff delle due strategie

def EP_C(i: int) -> float:
    """
    Restituzione dell'effective payoff del cooperatore:
    EP_C(i) = (1 + delta)^(payoff_C(i))
    """
    return (1.0 + delta) ** payoff_C(i)

def EP_D(i: int) -> float:
    """
    Restituzione dell'effective payoff del defezionatore:
    EP_D(i) = (1 + delta)^(payoff_D(i))
    """
    return (1.0 + delta) ** payoff_D(i)

# 3) Calcolo probabilistico che il role model sia C
    oppure D

def R_C(i: int) -> float:
    weight_C = i * EP_C(i)
    weight_D = (N - i) * EP_D(i)
    total_weight = weight_C + weight_D
    return weight_C / total_weight

def R_D(i: int) -> float:
    weight_C = i * EP_C(i)
    weight_D = (N - i) * EP_D(i)
    total_weight = weight_C + weight_D

```

```

    return weight_D / total_weight

# 4) Transizione della catena

def lambda_i(i: int) -> float:

    if i == N:
        # Esclusione di transizioni oltre lo stato N
        return 0.0

    prob_choose_defector = (N - i) / N
    prob_new_strategy_C = p * R_C(i) + (1.0 - p) * R_D(i)

    return prob_choose_defector * prob_new_strategy_C

def mu_i(i: int) -> float:
    """
    Restituzione di  $\mu_i = P(i \rightarrow i-1)$ .

    Per una diminuzione unitaria del numero di
    cooperatori:
    - risulta necessaria la selezione di un focal
    cooperatore,
    con probabilit  $i/N$ ;
    - il focal deve poi risultare defezionatore dopo l'
    aggiornamento.

    """
    if i == 0:
        # Esclusione di transizioni al di sotto dello
        stato 0
        return 0.0

    prob_choose_cooperator = i / N
    prob_new_strategy_D = p * R_D(i) + (1.0 - p) * R_C(i)

    return prob_choose_cooperator * prob_new_strategy_D

def stay_i(i: int) -> float:

    return 1.0 - lambda_i(i) - mu_i(i)

# 5) Costruzione della distribuzione stazionaria
# tramite la formula ricorsiva della birth-death chain

```

```

def stationary_distribution():
    """
    Costruzione della distribuzione stazionaria pi = (
        pi_0, ..., pi_N)
    mediante la formula

        pi_i = pi_0 * Prod_{k=0}^{i-1} [lambda_k / mu_{k
        +1}]

    e successiva imposizione della normalizzazione

        Sum_i pi_i = 1
    """

    # Costruzione del vettore dei prodotti
    # Prod_{k=0}^{i-1} [lambda_k / mu_{k+1}]
    # con la convenzione r[0] = 1
    r = [0.0] * (N + 1)
    r[0] = 1.0

    # Costruzione ricorsiva dei rapporti
    for i in range(1, N + 1):
        lam_prev = lambda_i(i - 1)
        mu_curr = mu_i(i)

        # In una catena irriducibile con mutazione
        # positiva,
        # mu_i per i >= 1 risulta positivo.
        # Introduzione di un controllo di sicurezza.

        r[i] = r[i - 1] * (lam_prev / mu_curr)

    # Applicazione della normalizzazione:
    # pi_0 = 1 / sum_i r[i]
    Z = sum(r)
    pi = [x / Z for x in r]

    return pi

# 6) Valore atteso stazionario del numero di cooperatori
def stationary_mean_C(pi) -> float:
    """
    Restituzione del valore atteso del numero di
    cooperatori
    al regime stazionario:

```

```

        E[C] = sum_i i * pi_i
    """
    return sum(i * pi[i] for i in range(N + 1))

def stationary_mean_frequency(pi) -> float:
    """
    Restituzione della frequenza media stazionaria di
    operatori:
        E[x] = (1/N) * E[C]
    """
    return stationary_mean_C(pi) / N

# 7) Stampa ordinata dei risultati

def print_summary(pi) -> None:
    """
    Stampa di un riepilogo contenente:
    - alcuni valori della distribuzione stazionaria;
    - la media stazionaria del numero di operatori;
    - la frequenza media stazionaria.
    """

    mean_C = stationary_mean_C(pi)
    mean_freq = stationary_mean_frequency(pi)

    print("\n" + "=" * 70)
    print("RISULTATI DEL CASO A 1 COMPARTIMENTO")
    print("=" * 70)

    print(f"N = {N}")
    print(f"b = {b}")
    print(f"c = {c}")
    print(f"delta = {delta}")
    print(f"p = {p}")
    print(f"mutazione = {1.0 - p}")

    print("\nValore atteso stazionario del numero di
    operatori:")
    print(f"E[C] = {mean_C}")

    print("\nFrequenza media stazionaria di operatori:")
    print(f"E[x] = {mean_freq}")

    print("\nPrimi 10 valori della distribuzione
    stazionaria:")
    for i in range(min(10, N + 1)):

```

```

        print(f"pi[{i}] = {pi[i]}")

    print("\nUltimi 10 valori della distribuzione
          stazionaria:")
    start = max(0, N - 9)
    for i in range(start, N + 1):
        print(f"pi[{i}] = {pi[i]}")

# 8) Esecuzione principale

if __name__ == "__main__":
    # Verifica preliminare della correttezza della catena
    check_probabilities()

    # Calcolo della distribuzione stazionaria
    pi = stationary_distribution()

    # Verifica numerica della normalizzazione della
    # distribuzione
    print(f"\nSomma delle probabilita' stazionarie = {sum
          (pi)}")

    # Stampa del riepilogo finale
    print_summary(pi)

```

Listing 5.3: Implementazione Python del calcolo della distribuzione stazionaria nel caso a un compartimento.

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Matteo Cavaliere, che mi ha trasmesso la passione per la materia attraverso l'impegno e la dedizione dimostrati nelle lezioni del corso. Esprimo gratitudine agli amici e ai colleghi che mi hanno sostenuto durante questi lunghi anni di studi. Ringrazio soprattutto la mia famiglia e, in particolare modo, mia madre, Pamela Barraco, che con una vita di sacrifici, sin dalla mia nascita, mi ha permesso di intraprendere e portare avanti questo percorso. Ti voglio bene.

Bibliografia

- [1] E. Pennisi, *How did cooperative behavior evolve?*, *Science*, vol. 309, n. 5731, 2005.
- [2] G. Păun, *Membrane Computing*, in *Formal Languages and Applications*, Springer, 2004.
- [3] R. Cressman, Y. Tao, *The replicator equation and other game dynamics*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2014.
- [4] L. R. Izquierdo, S. S. Izquierdo, W. H. Sandholm, *Agent-Based Evolutionary Game Dynamics*, University of Wisconsin Pressbooks, 2024.
- [5] E. Lieberman, C. Hauert, M. A. Nowak, *Evolutionary dynamics on graphs*, *Nature*, 2005.
- [6] C. E. Tarnita, T. Antal, H. Ohtsuki, M. A. Nowak, *Evolutionary dynamics in set structured populations*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009.
- [7] H. Ohtsuki, C. Hauert, E. Lieberman, M. A. Nowak, *A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks*, *Nature*, 2006.
- [8] D. Helbing, *A Mathematical Model for Behavioral Changes by Pair Interactions*, in *Economic Evolution and Demographic Change*, Springer, 1992.
- [9] K. H. Schlag, *Why imitate, and if so, how? A boundedly rational approach to multi-armed bandits*, *Journal of Economic Theory*, 1998.
- [10] M. Cavaliere, S. Sedwards, C. E. Tarnita, M. A. Nowak, A. Csikász-Nagy, *Prosperity is associated with instability in dynamical networks*, *Journal of Theoretical Biology*, 2012.
- [11] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics*, Belknap Press of Harvard University Press, 2006.
- [12] B. Skyrms, *The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure*, Cambridge University Press, 2004.
- [13] M. E. J. Newman, *The structure and function of complex networks*, *SIAM Review*, 2003.

- [14] M. Cavaliere, S. Feng, O. S. Soyer, J. I. Jiménez, *Cooperation in microbial communities and their biotechnological applications*, *Environmental Microbiology*, 2017.
- [15] U. Brandes, *A faster algorithm for betweenness centrality*, *The Journal of Mathematical Sociology*, 2001.
- [16] Păun, G. e Rozenberg, G., *A guide to membrane computing*, *Theoretical Computer Science*, 287(1), 2002, pp. 73–100