



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN DIDATTICA, STORIA E
FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

**L'errore come risorsa didattica nella transizione
scuola-università: analisi delle criticità e progettazione di
un laboratorio metacognitivo**

RELATRICI:

Prof.ssa Chiara Giberti
Prof.ssa Michela Eleuteri

CANDIDATA:

Teresa Fontanelli

Anno Accademico 2025 - 2026

A mio nonno Graziano.

*In questi due anni, il tuo supporto silenzioso e incondizionato
si è percepito anche a distanza.*

Ad Alice.

*Ogni mio traguardo sarà sempre anche un po' tuo,
perché i tuoi sogni possano continuare a vivere nelle strade dei tuoi amici.*

A chi si nasconde dietro un'illusione di perfezione per sentirsi accettato.

*Vi auguro il coraggio di sbagliare,
per scoprire il vostro valore nell'autenticità.*

Indice

Introduzione.....	4
1 Il valore dell'errore nell'apprendimento della matematica	6
1.1 L'errore in matematica come risorsa didattica	7
1.2 Errori, misconcezioni e ostacoli	13
1.3 Apprendimento strumentale e relazionale	15
1.4 Un esempio storico: la soluzione di Galileo al problema della brachistocrona..	19
2 Disequazioni e valore assoluto: analisi delle difficoltà degli studenti.....	26
2.1 Il quadro normativo: dalle Indicazioni Nazionali alla transizione universitaria	26
2.2 Le disequazioni: ostacoli cognitivi e procedurali	30
2.3 Criticità didattiche legate al concetto di valore assoluto	38
2.4 L'intersezione tra l'ostacolo del modulo e la logica delle disequazioni.....	42
2.5 Origine degli errori: un'interpretazione alla luce della letteratura didattica	43
3 Metodologia della ricerca	47
3.1 Obiettivi e disegno della ricerca	47
3.2 Il contesto e la selezione del campione	48
3.3 Strumento di codifica: la griglia di classificazione degli errori.....	49
4 Analisi dei dati e discussione dei risultati.....	56
4.1 Analisi quantitativa e diffusione degli errori.....	57
4.2 Analisi qualitativa: interpretazione degli ostacoli legati a disequazioni e valore assoluto.....	61
4.3 Evidenze sperimentali di un nuovo ostacolo cognitivo	82
5 Dalla ricerca all'intervento didattico: un laboratorio sull'errore	84
5.1 Il contesto della sperimentazione	85

5.2	Progettazione e struttura del laboratorio.....	86
5.3	Bilancio dell'attività e riflessioni a posteriori	91
	Discussione e conclusioni.....	100
	Bibliografia.....	104
	Allegati.....	109
	Ringraziamenti	121

“È proprio dall’errore che nasce la scoperta. Se non avessi sbagliato, non avrei mai trovato quella strada diversa, quella soluzione che non cercavo. L’imperfezione è la regola, la perfezione l’eccezione.”

Rita Levi-Montalcini, Elogio dell’imperfezione, 1987

Introduzione

L'apprendimento della matematica è un processo articolato, spesso accompagnato da ostacoli che mettono alla prova sia gli studenti che i docenti. Nella pratica didattica tradizionale, l'errore viene frequentemente stigmatizzato e vissuto come un fallimento o un indicatore di scarsa propensione per la disciplina. Tuttavia, la moderna ricerca in didattica della matematica suggerisce un cambio di prospettiva: l'errore non deve essere respinto, bensì accolto e interpretato come una preziosa risorsa pedagogica, un vero e proprio “trampolino” (Borasi, 1996) per indagare i processi cognitivi degli allievi e progettare interventi didattici mirati e consapevoli.

Alla luce di queste premesse, il presente lavoro di tesi pone l'attenzione sul momento di transizione tra la scuola secondaria di secondo grado e l'università. In questa fase, infatti, emergono spesso lacune relative a concetti matematici di base che dovrebbero essere già consolidati. Nello specifico, la ricerca si concentra su due argomenti cardine dell'algebra, fondamentali per affrontare con successo lo studio dell'Analisi Matematica: le disequazioni e il valore assoluto. L'obiettivo principale è quello di mappare gli ostacoli cognitivi che limitano la comprensione di questi concetti, dimostrando come l'adozione di un approccio puramente strumentale in ambito scolastico generi errori sistematici che permangono fino all'ambiente accademico.

L'elaborato è strutturato in cinque capitoli, in un percorso che muove dall'inquadramento teorico fino ad una sperimentazione concreta in aula.

Il Capitolo 1 definisce il contesto teorico di riferimento, esplorando il valore formativo dell'errore. Attraverso i concetti di misconcezione, contratto didattico e la distinzione tra apprendimento relazionale e strumentale, si illustra come le difficoltà nella disciplina siano tappe fisiologiche e necessarie per la costruzione del sapere. A supporto di questa visione, viene analizzato il celebre errore storico di Galileo Galilei sulla risoluzione del problema della brachistocrona.

Nel Capitolo 2 il campo d'indagine viene ristretto alle disequazioni e al valore assoluto. Dopo un'indagine sulle direttive ministeriali, dalle Indicazioni Nazionali fino ai test d'ingresso universitari (OFA), il capitolo esplora la letteratura didattica per catalogare gli ostacoli cognitivi più diffusi tra gli studenti su questi specifici argomenti.

All'interno del Capitolo 3 viene esposta la metodologia della ricerca empirica condotta in questo studio. Vengono descritti il contesto della ricerca, il campionamento di 238 prove scritte di Analisi Matematica I del Corso di Laurea in Ingegneria del Veicolo presso l'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, e la creazione di un'apposita griglia di classificazione degli errori.

Il Capitolo 4 è dedicato all'analisi dei dati raccolti e alla discussione dei risultati. L'indagine quantitativa permette di misurare la frequenza con cui le criticità, codificate nel Capitolo 3, compaiono nelle prove scritte esaminate. L'analisi qualitativa dei singoli elaborati, invece, permette di ricostruire i processi logici adottati dalle matricole, portando alla luce anche l'esistenza di ostacoli non esplicitamente documentati nella letteratura analizzata.

Il Capitolo 5 traduce i risultati della ricerca in una proposta di intervento concreto, descrivendo la progettazione e l'implementazione di un laboratorio didattico di natura metacognitiva rivolto agli studenti della scuola secondaria di secondo grado. Attraverso la correzione di esami universitari simulati e la creazione di distrattori per quesiti matematici, gli allievi sono stati guidati a riflettere criticamente sulle proprie difficoltà nella disciplina, in un'ottica di orientamento e prevenzione.

Infine, nelle conclusioni del presente elaborato verranno sintetizzati i risultati emersi, evidenziando come il successo nell'apprendimento matematico necessiti di superare un approccio puramente procedurale, per favorire un reale controllo semantico della disciplina.

Capitolo 1

Il valore dell'errore nell'apprendimento della matematica

L'insegnamento della matematica ha vissuto, nel corso dei decenni, una profonda trasformazione, passando da una visione statica e puramente trasmissiva a una concezione dinamica, in cui l'allievo è chiamato a costruire attivamente il proprio sapere. In Italia, una delle figure promotrici di questo rinnovamento è stata Emma Castelnuovo. Sostenitrice di un metodo "costruttivo" contrapposto a quello puramente "descrittivo" (Castelnuovo, 1965), la studiosa evidenziava come un insegnamento basato unicamente su figure immobili e proprietà imposte dall'alto generasse negli allievi un "vuoto verbalismo", impedendo loro di "saper vedere" la matematica (Castelnuovo, 1967).

Per stimolare un'osservazione autentica, Castelnuovo proponeva l'utilizzo di materiali concreti e figure dinamiche. Deformare un rettangolo fatto di spago o schiacciare un quadrato articolabile costringe l'allievo a formulare ipotesi, portandolo inevitabilmente a confrontarsi con i cosiddetti "casi limite" (Castelnuovo, 1967). È proprio in questa esplorazione dinamica e indipendente che l'intuizione può inizialmente ingannare lo studente, generando incomprensioni e risposte inesatte. Tuttavia, riflettendo sull'uso didattico di queste situazioni limite, l'autrice rivendica il valore di tali errori:

"Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore [...], sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza" (Castelnuovo, 1965, p. 51).

Queste parole riassumono l'essenza e lo spirito di questo primo capitolo. L'errore, provocato da un'intuizione non ancora matura o dal coraggio di esplorare una situazione complessa, non deve essere temuto né nascosto dietro a *"l'idolo di una perfezione che è illusoria"*, come avvertiva già Guido Castelnuovo (1912, cit. in Castelnuovo, 1963, p. 5). Al contrario, esso rappresenta il motore stesso dell'indagine matematica.

Nelle pagine che seguono, analizzeremo come la ricerca in didattica della matematica contemporanea abbia accolto questa sfida, trasformando progressivamente l'errore da indicatore di fallimento a insostituibile risorsa cognitiva e pedagogica.

1.1 L'errore in matematica come risorsa didattica

L'apprendimento della matematica è spesso un percorso complesso, ricco di ostacoli che mettono alla prova sia l'insegnante che l'allievo. Nel volume *Difficoltà in matematica* (2007), la ricercatrice Rosetta Zan indaga i processi cognitivi e le dinamiche legate all'insegnamento di questa disciplina, concentrandosi proprio sul modo in cui tali ostacoli vengono individuati e gestiti nel contesto scolastico. Nella pratica didattica tradizionale, infatti, vi è la forte tendenza ad assumere l'errore come indicatore privilegiato di difficoltà. Come evidenzia l'autrice fin dalle prime pagine della sua trattazione, questa visione richiede di essere affrontata con spirito critico per comprenderne i limiti metodologici e psicologici che essa comporta (Zan, 2007).

Per scardinare la comune accezione negativa di cui gode l'errore matematico, l'analisi della ricercatrice italiana si avvia con una raccolta di testimonianze di filosofi e scienziati che sostengono in modo unanime la cosiddetta “*epistemologia dell'errore*” (Zan, 2007, p. 24). Questa visione riconosce il ruolo positivo dell'errore nello sviluppo della scienza e della conoscenza umana. Il filosofo Gaston Bachelard, ad esempio, evidenzia come il progresso debba necessariamente misurarsi con quelli che definisce “*ostacoli epistemologici*”. Apprendere, infatti, non significa mai accumulare informazioni, ma richiede di destrutturare attivamente le certezze precedenti divenute inadeguate. Come sottolinea il filosofo francese, “*si conosce, infatti, contro una conoscenza anteriore, distruggendo conoscenze mal fatte, superando quello che nello spirito stesso fa da ostacolo alla spiritualizzazione*” (Bachelard, 1938, p. 11).

Questa valenza formativa dell'errore si trova in accordo con il pensiero del matematico e filosofo Federigo Enriques, il quale invita a considerare gli sbagli come fondamentali “*tappe del pensiero nella ricerca della verità [...], esperienze didattiche che egli persegue* (l'insegnante), *incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi*” (Enriques, 1936, p. 12). In quest'ottica, il docente è chiamato a imparare a osservare e

interpretare i comportamenti dei propri allievi, riuscendo a distinguere gli errori significativi da quelli in cui manca del tutto lo sforzo del pensiero (Enriques, 1936).

La prospettiva delineata da Bachelard (1938) si basa, inoltre, sul concetto di dimensione temporale dell'errore. Il progresso cognitivo di un allievo consiste nel superamento delle proprie idee e conoscenze di ieri, ovvero di quelle convinzioni che lo hanno portato a sbagliare in passato. Quando l'errore commesso "ieri" viene riconosciuto e compreso "oggi" dallo studente, esso assume una forte valenza formativa, trasformandosi nella testimonianza di un progresso avvenuto (Zan, 2007). Da qui emerge l'idea di Zan di non eliminare le prove dei propri fallimenti, ma di conservarle per far diventare il proprio quaderno un vero e proprio diario che accompagna la storia di crescita individuale. Allo stesso tempo, come vedremo più avanti, la dimensione temporale ci ricorda che occorre sempre contestualizzare gli errori storicamente: il rigore in matematica è, per sua natura, un punto d'arrivo e non un punto di partenza nell'evoluzione della disciplina. Acquisire la consapevolezza di questa fallibilità restituisce alla materia un'immagine più viva, favorendo negli insegnanti una maggiore e necessaria tolleranza verso le fisiologiche difficoltà del percorso di apprendimento (Zan, 2007).

Eppure, nonostante l'epistemologia dell'errore ne difenda esplicitamente l'importanza formativa, la realtà scolastica si scontra spesso con una rassicurante quanto pericolosa credenza: l'idea che l'assenza di errori garantisca automaticamente che ci sia stata una reale comprensione. Questo tentativo di minimizzare le occasioni di sbaglio è stato analizzato dalla ricercatrice polacca Zofia Krygowska (1957). Nei suoi studi, infatti, osserva come molti manuali strutturino gli esercizi in modo sistematico, fornendo istruzioni talmente guidate e suggestive da rendere quasi impossibile sbagliare. In apparenza, la classe sembra aver assimilato l'argomento, ma si tratta di un'illusione che colpisce sia gli allievi che i docenti: *"un simile blocco degli errori non dà risultati positivi che apparentemente. Quello che è oscuro nel cervello dell'alunno rimane oscuro benché il segnale "errore" non si accenda"* (Krygowska, 1957, p. 176).

Dietro alla preoccupazione di evitare domande considerate "troppo difficili", si nasconde un problema strutturale ampiamente denunciato dalla Zan (2007): la tendenza ad abbassare drasticamente le richieste pur di ottenere le risposte corrette attese. Sostituire quesiti aperti, che richiederebbero l'attivazione di processi logici significativi indipendentemente dalla correttezza del calcolo finale, con schede strutturate al semplice

completamento di caselle, banalizza l'educazione e fa sì che si perdano occasioni di reale apprendimento. Si finisce così per valorizzare esclusivamente la correttezza formale del prodotto, tralasciando del tutto l'importanza dei processi di pensiero messi in atto dallo studente (Zan, 2007). Questa dinamica è descritta da quello che lo psicologo americano Howard Gardner ha definito "*il compromesso delle risposte corrette*" (Gardner, 1991, p. 160). Si tratta di un patto non scritto tra insegnanti e studenti, i quali "si accordano" sul fingere che la capacità di fornire la risposta esatta coincida con la reale educazione e comprensione della materia. Prendere coscienza di questo compromesso e avere il coraggio di decostruirlo è il primo passo fondamentale per restituire all'errore il suo valore pedagogico.

In ambito didattico, uno dei tentativi più interessanti di proporre un approccio alternativo è quello sviluppato dalla ricercatrice italo-americana Raffaella Borasi (1996). Aderendo pienamente all'epistemologia dell'errore, la studiosa mette in discussione la metafora più utilizzata nel mondo della scuola per descrivere le difficoltà degli alunni: la metafora medica. In questa visione tradizionale, l'errore è vissuto come il sintomo di una malattia da estirpare, e l'insegnante assume il ruolo del medico che deve fornire la cura, relegando lo studente a un ruolo marginale e passivo (Zan, 2007). Per superare questa connotazione negativa, Borasi propone una metafora diversa, paragonando l'esperienza dell'errore a quella di perdersi in una città. Se una persona si perde mentre ha un'emergenza o molta fretta, vivrà la situazione con ansia e frustrazione; se invece si perde mentre fa il turista in una città d'arte, quell'imprevisto si trasformerà in una piacevole avventura, un'opportunità per esplorare scorci inaspettati (Zan, 2007). Attualmente, a causa della forte pressione legata ai voti e alla rigidità dei programmi, gli studenti vivono l'errore matematico quasi esclusivamente nel primo scenario: reagiscono con frustrazione e desiderano solo che qualcuno fornisca loro rapidamente la risposta esatta.

L'obiettivo dell'educazione matematica dovrebbe essere, al contrario, quello di accompagnare gli allievi verso il secondo scenario. A questo scopo, Borasi suggerisce di utilizzare gli errori come veri e propri "trampolini" per avviare attività di indagine e scoperta (Borasi, 1996). L'insegnante dovrebbe mettere in secondo piano l'urgenza di correggere lo sbaglio, in modo che esso possa diventare spunto per nuove domande significative (Zan, 2007).

Tuttavia, per riuscire a sfruttare la concezione degli errori come trampolini, è necessario compiere un passo indietro e mettere in discussione l'idea stessa di apprendimento che guida l'insegnante. Come evidenzia la Zan, la scuola ha risentito per lungo tempo dell'influenza di un modello trasmissivo, secondo il quale la conoscenza è qualcosa che può essere semplicemente "trasferito" dalla mente del docente a quella dell'allievo, come se quest'ultimo fosse un contenitore da riempire (Zan, 2007). Se si abbraccia questa concezione, è inevitabile che l'intervento tradizionale di recupero si basi su un'unica possibile interpretazione dell'errore, ovvero quella di attribuirlo a una mancanza di conoscenze o abilità (Zan, 2007).

La ricerca in educazione matematica, influenzata dalle teorie costruttiviste, ha superato questo modello, dimostrando che l'apprendimento è a tutti gli effetti un'attività costruttiva (Zan, 2007). L'alunno non si limita ad aggiungere passivamente nuove informazioni a un magazzino vuoto, ma è un soggetto attivo che crea collegamenti, costruisce relazioni e cerca costantemente di dare senso al mondo che lo circonda (Zan, 2007).

La comprensione di come funziona la mente dell'allievo permette di cambiare il modo in cui occorre guardare i suoi fallimenti. L'errore matematico, molto spesso, non è il frutto di un vuoto di conoscenza, ma il risultato del conflitto tra le conoscenze formali spiegate dall'insegnante e le teorie intuitive preesistenti, profondamente radicate nella mente del ragazzo, che egli applica fuori contesto. Per questo motivo, conclude la Zan, è necessario che l'insegnante abbandoni l'idea che esista una sola causa per uno sbaglio. Al contrario, il docente deve costruire un ricco repertorio di interpretazioni possibili per i comportamenti degli allievi: solo possedendo diverse chiavi di lettura potrà formulare ipotesi di lavoro efficaci su cui fondare un reale intervento di recupero (Zan, 2007).

Questa necessità porta a riflettere sulla transizione dall'osservazione dell'errore all'intervento: come evidenzia Zan (2007), questo passaggio non è mai diretto, bensì costantemente mediato da un processo di interpretazione che, per lo più, rimane implicito e inconsapevole nella mente dell'insegnante.

Molto spesso, nella quotidianità scolastica, si assiste ad un rischioso passaggio dal piano dell'osservazione oggettiva dei comportamenti a quello del giudizio sull'allievo. Di fronte a una prestazione fallimentare, il docente tende a utilizzare espressioni come "non ha capito", "non ha le basi" o "non è in grado", convincendosi di descrivere in modo

neutro e oggettivo la realtà. In verità, queste affermazioni sono il frutto di una interpretazione completamente soggettiva, attraverso la quale l'insegnante colma le poche informazioni disponibili basandosi sui propri schemi mentali, sulle proprie emozioni e sulle esperienze didattiche pregresse (Zan, 2007).

Questo salto dall'osservazione della singola prestazione alla valutazione globale dell'allievo e delle sue capacità nascoste ha ricadute pedagogiche pesanti. Se la difficoltà viene etichettata come una mancanza di intelligenza innata, ovvero un tratto su cui il docente ritiene di non poter esercitare alcun controllo, l'interpretazione finisce per frenare l'intervento di recupero anziché dirigerlo (Zan, 2007). Inoltre, se l'insegnante rimane intrappolato nella convinzione che la propria lettura sia un'osservazione assoluta e non una semplice ipotesi di lavoro da poter mettere in discussione, di fronte a un eventuale fallimento della strategia didattica tenderà ad attribuire tutta la responsabilità allo studente piuttosto che al metodo di insegnamento adottato (Zan, 2007).

Ciò conduce a decostruire l'idea ormai radicata di oggettività dell'errore come indicatore di difficoltà. Sebbene l'errore in sé possa essere considerato oggettivo, la sua valutazione e le possibili spiegazioni che stanno dietro quell'errore sono processi intrinsecamente soggettivi (Zan, 2007). Tale giudizio dipende dalle conoscenze, dai valori e dalle convinzioni del singolo docente, ma è anche influenzato dalla dimensione temporale, ovvero dal momento specifico del percorso didattico in cui l'errore viene commesso e dalla sua frequenza. Zan (2007) mostra nei suoi studi che il medesimo errore, se sottoposto all'analisi di alcuni docenti, viene interpretato da essi in modi profondamente diversi tra loro.

Combinando la molteplicità delle interpretazioni possibili con la varietà dei criteri di valutazione adottati dai docenti, si giunge alla conclusione che l'oggettività nella valutazione di un errore in matematica è solo un'illusione. Si tratta, inoltre, di un'idea poco produttiva, poiché tende a sollevare l'insegnante dalle proprie responsabilità educative, impedendogli di rendere il processo di valutazione realmente trasparente e costruttivo per l'allievo (Zan, 2007).

Per superare il mito dell'oggettività e della valutazione neutra, Zan (2007) propone quindi un cambio di prospettiva: spostare l'attenzione dall'osservazione dei semplici errori all'osservazione dei comportamenti fallimentari, cioè quei comportamenti da cui deriva l'errore emerso.

In ambito scolastico ci si trova costantemente di fronte a situazioni in cui il docente assegna un compito all'allievo. In questo passaggio, non è scontato che i due condividano la stessa meta. Spesso l'allievo si pone obiettivi incentrati sulla prestazione piuttosto che sull'apprendimento, trasformando la richiesta dell'insegnante in un problema "esterno" alla matematica, come ottenere la sufficienza o compiacere il docente fornendo la risposta attesa (Zan, 2007).

Questa divergenza di intenti ha conseguenze didattiche su cui riflettere. Se lo scopo dell'alunno è unicamente quello di dare la risposta corretta e, per puro caso o applicando una regola fuori contesto, la ottiene (nonostante le incongruenze presenti nel processo), egli non percepirà alcun tipo di fallimento. In mancanza di questa percezione, lo studente non potrà mai riconoscere i propri comportamenti fallimentari, rendendo di fatto inutile qualsiasi correzione da parte del docente (Zan, 2007). In questa visione della matematica, percepita come un insieme di prodotti slegati dai processi logici, se il risultato è sbagliato l'allievo vivrà come fallimentare l'intera prestazione, limitandosi a voler semplicemente sostituire il prodotto errato con quello giusto fornito dall'insegnante (Zan, 2007).

I fallimenti degli studenti sono quindi fortemente condizionati dalle convinzioni che hanno costruito attorno alla disciplina. L'organizzazione tradizionale dell'insegnamento tende troppo spesso a fornire abilità e tecniche precostituite molto prima che queste siano avvertite come effettivamente indispensabili dagli alunni, introducendo algoritmi per risolvere problemi che non sono ancora stati vissuti e sperimentati come tali (Zan, 2007). Fornire gli strumenti di risoluzione prima di far nascere la necessità di utilizzarli alimenta il rischio di legare il prodotto dai processi logici che hanno permesso di ottenerlo. In questo modo, gli obiettivi del docente si trovano disallineati da quelli dello studente, che faticherà quindi a riconoscere i propri comportamenti fallimentari e ad accettare un intervento su di essi.

L'intervento di recupero, quindi, non può più limitarsi alla correzione del singolo errore, ma partire dalle interpretazioni del docente che devono essere assunte come "ipotesi di lavoro" su cui fondare l'azione didattica. Come sottolinea Zan (2007), un'ipotesi di lavoro non è mai di per sé giusta o sbagliata, ma semplicemente funziona o non funziona (Zan, 2007). La consapevolezza dei limiti dell'intervento tradizionale

incoraggia la ricerca di ipotesi alternative, capaci di percepire la complessità degli atteggiamenti dell'allievo e di trasformare l'errore in un motore di cambiamento.

1.2 Errori, misconcezioni e ostacoli

Il passaggio dall'osservazione dell'errore alla comprensione dei processi mentali dell'allievo impone una riflessione rigorosa sul lessico utilizzato. Diventa infatti essenziale distinguere il generico termine "errore" da strutture cognitive più complesse, introducendo il concetto di "misconcezione". A questo proposito, ci si appoggia alla definizione fornita da Bruno D'Amore, il quale afferma che le misconcezioni si possono interpretare come *"concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica"* (D'Amore, 1999). Questa visione suggerisce che una misconcezione non debba essere valutata negativamente, in quanto il passaggio attraverso essa può rivelarsi necessario per raggiungere la reale costruzione di un concetto matematico (D'Amore, 1999; Sbaragli, 2005).

Definire queste concezioni come semplici "errori" risulta pertanto troppo riduttivo e banale (D'Amore e Sbaragli, 2005). Lo studente, infatti, non è consapevole di sbagliare, ma è convinto che le sue siano concezioni vere e proprie, basate su un modello mentale che fino a quel momento aveva garantito il successo. L'insegnante, di fronte a queste manifestazioni, non deve assumere un atteggiamento punitivo o limitarsi a una valutazione puramente negativa, ma ha il compito di fornire all'allievo gli strumenti necessari per una rielaborazione critica (D'Amore, 1999). Come osserva Rosetta Zan, l'allievo che mette in atto un comportamento fallimentare di questo tipo si comporta come uno scienziato che tenta di controllare una situazione nuova modificando in modo plausibile procedure già note, pur facendolo sulla base di caratteristiche superficiali (Zan, 2002, cit. in D'Amore e Sbaragli, 2005).

Un classico esempio di questa dinamica si riscontra nell'ambito numerico. Fin dai primi anni di scolarizzazione, le operazioni svolte nell'insieme dei numeri naturali consolidano negli alunni l'idea che il risultato di una moltiplicazione sia sempre maggiore dei fattori di partenza (D'Amore e Sbaragli, 2005). Questo modello, tuttavia, entra in crisi quando il dominio si estende ai numeri razionali. In questi casi, una regola precedentemente valida viene estesa in modo errato, trasformando l'immagine iniziale

del concetto in un “modello parassita” che agisce come un vero e proprio ostacolo ai futuri apprendimenti (Fischbein, 1985, cit. in Sbaragli, 2005).

L’origine di queste strutture mentali è complessa, motivo per cui Sbaragli (2005) propone una distinzione tra misconcezioni “inevitabili” ed “evitabili”. Le misconcezioni inevitabili derivano in modo indiretto dalla trasposizione didattica: nascono dalla necessità oggettiva di dover introdurre un concetto matematico in modo graduale, partendo da basi semiotiche che inizialmente non possono esaurire tutta la complessità del sapere (Sbaragli, 2005). Al contrario, le misconcezioni evitabili sono la diretta conseguenza di consuetudini didattiche improprie e di scelte metodologiche inadeguate da parte degli insegnanti (Sbaragli, 2005). Ne sono un esempio le rappresentazioni visive univoche, come l’abitudine di disegnare un quadrato presentandolo unicamente con i lati orizzontali e verticali rispetto ai margini del foglio, o l’utilizzo di convenzioni linguistiche fuorvianti come il termine “lato obliquo” del trapezio; tali prassi portano lo studente a legare erroneamente le proprietà del poligono alla sua posizione nello spazio (Sbaragli, 2005).

È dunque necessario fare una precisazione sul lessico che verrà impiegato nel prosieguo della presente tesi. Il termine “*misconception*” ha origini anglosassoni e, a livello internazionale, continua a essere utilizzato in un’accezione estremamente ampia e frequentemente connotata in senso negativo, come sinonimo di “malinteso”, “idea sbagliata” o “giudizio erroneo” (D’Amore e Sbaragli, 2005). Tuttavia, ai fini di questo elaborato e in accordo con la prospettiva tracciata da Bruno D’Amore (1999), si sceglie di distaccarsi da questo uso generico. All’interno della presente tesi, il termine “misconcezione” verrà adottato esclusivamente per indicare quelle concezioni temporanee e costruttive, in attesa di sistemazione, fin qui descritte; in tutti gli altri casi in cui il fallimento non presenterà tali caratteristiche strutturali, si preferirà ricorrere ai termini “errore” o “ostacolo” (D’Amore e Sbaragli, 2005).

Infine, la riflessione sulle origini delle misconcezioni porta a confrontarsi con il concetto di “ostacolo”. Già a partire dagli anni Settanta, lo studioso Guy Brousseau (1976) ha rivoluzionato questo termine in ambito didattico: l’ostacolo non indica una semplice mancanza di conoscenza, bensì una conoscenza vera e propria (Brousseau, 1983, cit. in Sbaragli, 2005). Si tratta di un’idea che in passato ha funzionato e ha permesso all’allievo di risolvere problemi con successo, ma che si rivela improvvisamente fallimentare e

inadeguata quando viene applicata a un contesto nuovo e più ampio. L'alunno fatica ad abbandonare questa certezza, la quale si trasforma così in una barriera verso i successivi apprendimenti. Tuttavia, sebbene fosse necessaria una precisazione linguistica, in questo lavoro di tesi verrà utilizzato il termine "ostacolo" come sinonimo del termine "errore" o di "difficoltà" più in generale.

Risulta comunque interessante analizzare le tre diverse tipologie di ostacoli che Brousseau individua (1997) e che si legano in modo diretto alle misconcezioni analizzate in precedenza:

1. Ostacoli ontogenetici: sono legati allo sviluppo neurofisiologico e cognitivo del bambino. Dipendono strettamente dall'età dell'allievo e impongono all'insegnante una necessaria gradualità nell'introduzione dei concetti, poiché alcune strutture di pensiero richiedono tempo per maturare.
2. Ostacoli didattici: derivano dalle scelte metodologiche dell'insegnante e dalle modalità con cui il sapere viene presentato in classe, ovvero dalla cosiddetta "trasposizione didattica". Nascono da consuetudini ripetitive o spiegazioni improprie fornite dal docente, e rappresentano esattamente la fonte di quelle che Sbaragli (2005) definisce misconcezioni "evitabili".
3. Ostacoli epistemologici: sono ostacoli intrinseci alla natura stessa del concetto matematico e al suo sviluppo storico. Non dipendono dai limiti dell'allievo o dagli errori del docente, ma dalla complessità interna della materia. Questo tipo di ostacolo genera quelle misconcezioni "inevitabili" che, come abbiamo visto, costituiscono un passaggio fisiologico e obbligato per la costruzione di una reale comprensione matematica.

Riconoscere l'origine di un ostacolo diventa quindi un passaggio necessario per l'insegnante, poiché permette di evitare la banalizzazione delle sue possibili interpretazioni e di progettare un intervento didattico mirato e consapevole.

1.3 Apprendimento strumentale e relazionale

L'analisi dei comportamenti fallimentari e degli ostacoli necessita un'indagine sulla natura del processo di apprendimento matematico. Per interpretare in modo accurato le dinamiche che verranno esaminate nei successivi capitoli di questa tesi, è indispensabile definire cosa significhi realmente "comprendere" in matematica,

esplorando l'architettura cognitiva dell'allievo e le implicazioni delle sue interazioni scolastiche.

Una distinzione fondante in questo ambito è stata formulata da Skemp (1976), il quale evidenzia come la parola “comprensione” sia spesso utilizzata nel mondo della scuola nascondendo sotto un medesimo termine due significati profondamente diversi. Da un lato vi è l'apprendimento “relazionale”, che consiste nel sapere contemporaneamente cosa fare e perché lo si sta facendo. Dall'altro, vi è l'apprendimento “strumentale”, che Skemp descrive come il possesso di “*regole senza ragioni*” (Skemp, 1976, p. 9).

Nella pratica didattica, molti docenti e manuali si limitano a fornire spiegazioni strumentali: l'uso di regole mnemoniche standardizzate permette all'allievo di riempire rapidamente una pagina di risposte esatte, generando un'apparente ma rassicurante sensazione di successo. L'apprendimento relazionale, tuttavia, risulta maggiormente adattabile a nuovi compiti, è più facile da ricordare a lungo termine in quanto le regole sono interconnesse organicamente, e favorisce maggiore coinvolgimento dell'alunno. Utilizzando una metafora per chiarire queste idee, l'apprendimento strumentale permette di imparare un numero limitato di percorsi rigidi e, in caso di errore, lo studente si perde irrimediabilmente; l'apprendimento relazionale, al contrario, permette di costruire una mappa mentale da cui può essere possibile ricavare in autonomia infiniti percorsi per raggiungere il proprio obiettivo (Skemp, 1976).

Come sottolinea Sfard (1991), questa dicotomia si sovrappone a un'altra celebre distinzione consolidata nella ricerca in didattica della matematica: quella tra conoscenza “concettuale” e “procedurale” (Hiebert, 1985, cit. in Sfard, 1991). La conoscenza procedurale si riferisce alla padronanza formale di regole e algoritmi (allineandosi dunque alla visione strumentale), mentre la conoscenza concettuale implica una comprensione profonda delle relazioni interne che legano i costrutti matematici (richiamando esattamente l'apprendimento relazionale). Alla luce di questa affinità teorica, all'interno della presente tesi i concetti di apprendimento relazionale/concettuale e strumentale/procedurale verranno impiegati come sinonimi per descrivere queste due modalità opposte di vivere la disciplina.

Sfard, inoltre, analizza la duplice natura delle concezioni matematiche (1991). Secondo la studiosa, i costrutti astratti della matematica possono essere concepiti in due

modi apparentemente incompatibili ma di fatto complementari: in modo “operazionale” (come un processo algoritmico, dinamico, sequenziale e dettagliato) e in modo “strutturale” (come un oggetto astratto, statico e istantaneo).

Secondo Sfard (1991) la formazione di un concetto astratto è un processo lungo e complesso, che si sviluppa attraverso tre fasi principali. La prima tappa è l’interiorizzazione, in cui l’allievo prende confidenza con un nuovo processo matematico. Segue poi la condensazione, ovvero la capacità di “comprimere” lunghe sequenze di operazioni in unità più compatte e facili da gestire, riuscendo a pensare al processo nella sua interezza senza doversi concentrare in modo frammentario sui singoli passaggi.

La terza e ultima fase è la reificazione. A differenza delle prime due, che avvengono in modo graduale, la reificazione costituisce un cambiamento profondo nel modo in cui la mente percepisce l’idea matematica. Essa consiste nell’abilità di guardare a un processo ormai familiare sotto una luce nuova: quella che prima era solo una serie di azioni dinamiche “solidifica” nella mente dell’allievo, trasformandosi in una struttura statica, ovvero in un vero e proprio “oggetto” mentale a sé stante (Sfard, 1991).

Sfard (1991) sottolinea che la comprensione relazionale definita da Skemp (1998) è strettamente dipendente dall’acquisizione di questa concezione strutturale: la creazione di questi “oggetti” mentali protegge la memoria di lavoro dal sovraccarico, permettendo di organizzare gli schemi cognitivi in una gerarchia efficiente. Al contrario, un approccio puramente operativo genera inevitabilmente una comprensione di tipo esclusivamente strumentale.

Per analizzare i motivi per cui il salto della reificazione fallisce, lasciando gli studenti ancorati a un livello puramente strumentale, risultano essenziali i costrutti di *concept image* e *concept definition* teorizzati da Tall e Vinner (1981). Essi spiegano che la *concept image* rappresenta la struttura cognitiva totale associata a un dato concetto nella mente dell’individuo, e include tutte le immagini mentali, le proprietà e i processi costruiti nel corso del tempo attraverso stimoli ed esperienze. La *concept definition*, invece, può corrispondere alla definizione formale accettata dalla comunità matematica, oppure rappresentare una ricostruzione personale dell’allievo. Il cervello umano non opera in modo puramente logico: le immagini concettuali di un individuo si sviluppano spesso in modi non globalmente coerenti (Tall e Vinner, 1981). Quando le esperienze didattiche evocano aspetti dell’immagine concettuale che entrano in contraddizione con

la definizione formale (o con altre parti dell'immagine stessa), si genera un conflitto cognitivo (Tall e Vinner, 1981). Un approccio didattico basato sull'insegnamento strumentale produce spesso immagini concettuali fortemente ristrette e distorte; in questo scenario, la definizione formale del concetto rimane disconnessa, trasformandosi in una nozione che lo studente impara a recitare meccanicamente senza reale comprensione (Tall e Vinner, 1981).

A favorire questa tendenza a rifugiarsi in un apprendimento puramente strumentale sono molto spesso le dinamiche di classe e, in particolar modo, il cosiddetto “*contratto didattico*”, formulato originariamente da Guy Brousseau (Baccaglini-Frank et al., 2018). Esso rappresenta l'insieme delle regole, per lo più non scritte e implicite, che assegnano le responsabilità attese sia dall'insegnante che dall'allievo rispetto a un determinato sapere matematico insegnato (Baccaglini-Frank et al., 2018). Durante la pratica scolastica, lo studente interpreta le richieste del docente basandosi fortemente sulle abitudini e su ciò che il professore solitamente si aspetta. Il contratto didattico, dunque, dirige i comportamenti dell'allievo, spingendolo ad affrontare i compiti applicando sequenze prestabilite, innescate dalla presenza di parole chiave nel testo, al solo scopo di fornire la “risposta attesa”, prescindendo totalmente dalla costruzione di un significato matematico coerente (Baccaglini-Frank et al., 2018).

Un chiaro esempio di questa dinamica è il celebre “problema del capitano”, ideato da Gustave Flaubert e ripreso negli studi francesi dell'IREM negli anni Ottanta (Baccaglini-Frank et al., 2018). Sottoposti a un problema irrisolvibile e privo di senso (“In una nave ci sono 26 pecore e 10 capre; qual è l'età del capitano?”), i bambini rispondono fornendo un'età numerica (36 anni) ottenuta combinando a caso i dati presenti, senza tentare di comprendere logicamente il testo del quesito. Le clausole implicite di questo patto, infatti, inducono nei bambini la convinzione che ogni problema sottoposto dall'insegnante debba rigorosamente avere una soluzione (Baccaglini-Frank et al., 2018).

Per contrastare questo fenomeno e riattivare un pensiero autentico, diventa essenziale per l'insegnante non solo riconoscere tali dinamiche, ma anche arrivare a provocare intenzionalmente una *rottura del contratto didattico* (Baccaglini-Frank et al., 2018). Questa rottura, attuata ad esempio tramite uno scambio di ruoli in cui si chiede agli allievi di inventare loro stessi un problema, si rivela una strategia didattica

fondamentale per far emergere i limiti dell'approccio meccanico e correggere le convinzioni che gli allievi avevano compreso in modo superficiale.

L'applicazione cieca di regole e calcoli per risolvere un esercizio, che caratterizza l'apprendimento strumentale, è dunque spesso una diretta conseguenza del contratto didattico. Lo studente si rifugia in uno svolgimento procedurale piuttosto che concettuale proprio per assecondare le aspettative che attribuisce all'insegnante, convinto che per accontentare il docente sia sempre e comunque necessario "svolgere dei calcoli" o applicare una formula (Zan, 2016, cit. in Baccaglini-Frank et al., 2018). Questa dinamica, infatti, è spesso alimentata dagli insegnanti stessi. Come si è visto, Zan (2007) evidenzia che la paura dell'errore non appartiene solo agli studenti, ma anche ai docenti: questi ultimi tendono frequentemente a evitare situazioni didattiche troppo aperte o complesse in cui la classe potrebbe sbagliare, poiché vivono l'insuccesso dell'alunno come un fallimento personale. Dunque, il tentativo di "proteggere" gli studenti dagli errori si traduce nella somministrazione di compiti fortemente standardizzati, i quali non fanno altro che rafforzare l'utilizzo di procedure meccaniche e convincere gli studenti che le aspettative dell'insegnante consistono nello svolgimento di calcoli come unico metodo risolutivo possibile.

I modelli teorici appena presentati, specialmente la contrapposizione tra apprendimento relazionale e strumentale di Skemp, costituiscono la chiave di lettura con cui verranno interpretate le difficoltà esaminate in questo lavoro di tesi. Come vedremo in seguito, infatti, l'adozione di un approccio puramente strumentale costituisce molto spesso l'origine degli ostacoli che gli studenti incontrano nell'apprendimento della matematica, poiché non permette di raggiungere una comprensione profonda degli oggetti manipolati.

1.4 Un esempio storico: la soluzione di Galileo al problema della brachistocrona

Come illustrato precedentemente, l'epistemologia dell'errore promossa da autori come Bachelard (1938) ed Enriques (1936) ci invita a considerare gli ostacoli in matematica come tappe fondamentali nella costruzione del sapere. Attraverso le riflessioni di Zan (2007), si è sottolineata l'importanza della dimensione temporale in questo processo: l'errore commesso "ieri" diventa la base per la consapevolezza di

“oggi”, rendendo l’apprendimento un’attività di continua destrutturazione delle certezze precedenti divenute inadeguate. Questa prospettiva ci ricorda, inoltre, che il rigore formale è un punto di arrivo nell’evoluzione della disciplina, e mai un punto di partenza (Zan, 2007).

Per comprendere a fondo questa dinamica, nel presente paragrafo verrà illustrato un esempio concreto tratto dalla storia. Emergerà come anche i più grandi matematici del passato abbiano commesso errori e formulato soluzioni inesatte, non per mancanza di logica, ma perché inevitabilmente vincolati agli strumenti e al linguaggio della loro epoca. I loro errori si sono rivelati ostacoli epistemologici fecondi e necessari per la successiva evoluzione e formalizzazione del pensiero matematico moderno.

Questa digressione storica assume anche una valenza pedagogica, poiché riconoscere che la matematica si è formata procedendo per tentativi, ostacoli e successive correzioni, permette di accogliere con occhi diversi le difficoltà degli alunni. Infatti, proprio come le inesattezze dei matematici del passato vanno comprese e contestualizzate alla luce degli strumenti di cui disponevano, allo stesso modo le risposte inesatte degli studenti devono essere accolte e interpretate dall’insegnante. Esse non rappresentano un fallimento da evitare, bensì tappe fisiologiche e necessarie che il pensiero individuale deve compiere per arrivare a padroneggiare la reale complessità della disciplina.

La ricostruzione storica che seguirà fa riferimento principalmente alle opere di Freguglia e Giaquinta (2010) e Goldstine (1980). Sebbene il Calcolo delle Variazioni si sia sviluppato prevalentemente nel corso del XVIII e XIX secolo, i metodi variazionali possiedono radici più antiche. La maggior parte degli storici concorda nel fissare l’origine formale della disciplina nel giugno del 1696, quando apparve sugli *Acta Eruditorum*, come appendice del lavoro di Bernoulli *Supplementum defectus*, l’annuncio *Problema novum ad cujus solutionem invitantur*. In esso, Johann Bernoulli invitava i geometri a risolvere il *problema della brachistocrona*, chiamato anche *problema della discesa nel tempo minimo*. Il quesito è così formulato:

“Dati due punti A e B in un piano verticale, trovare il cammino AMB che un punto mobile M deve compiere, in virtù della gravità, per passare da un punto A a B nel minor tempo possibile.” (Bernoulli, 1696)

L'attenzione sarà focalizzata in particolare sulla soluzione al problema fornita in precedenza da Galileo Galilei, per osservare come l'errore contenuto in essa costituisca una tappa necessaria per l'origine di una nuova disciplina.

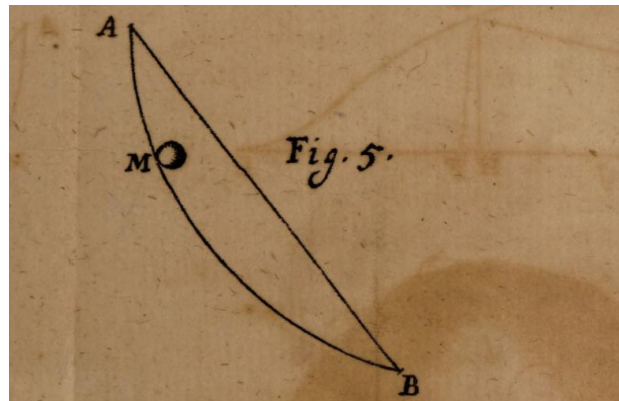


Figura 1.1: Rappresentazione grafica del problema della brachistocrona. Dettaglio tratto dalla Tavola V degli Acta Eruditorum (Bernoulli, giugno 1696, Tab. V). L'immagine illustra il percorso AMB che il punto mobile M deve compiere.¹

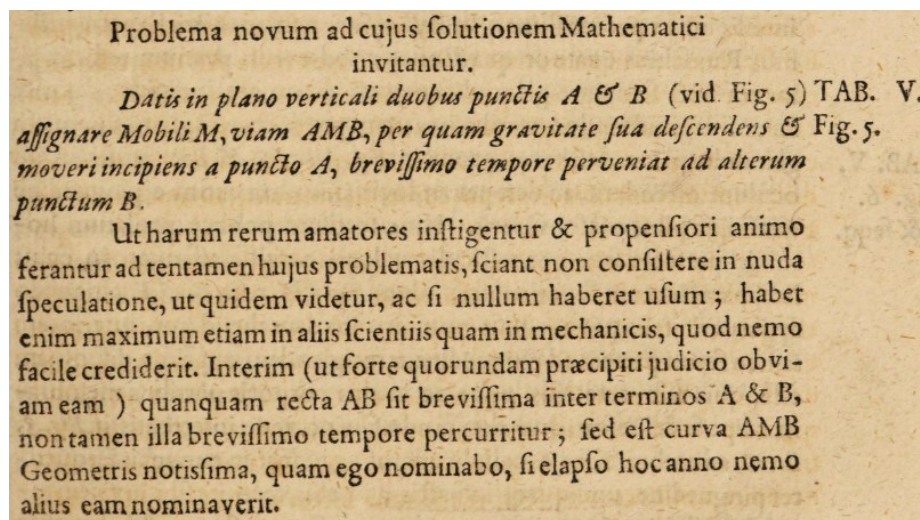


Figura 1.2: Formulazione originale del problema della brachistocrona, tratta dalla pubblicazione sugli Acta Eruditorum (Bernoulli, giugno 1696, p. 269)².

In aggiunta all'enunciato originale, Bernoulli inserì alcune precisazioni. Egli sottolineò la rilevanza del problema in ambito meccanico e, soprattutto, avvertì fin da

¹ Fonte originale digitalizzata consultabile su Internet Archive: <https://archive.org/details/s1id13206630/page/262/mode/2up>

² Fonte originale digitalizzata consultabile su Internet Archive: <https://archive.org/details/s1id13206630/page/268/mode/2up>

subito i lettori che la traiettoria più rapida non coincideva con la linea retta congiungente i punti A e B, ma consisteva in una curva già nota ai geometri. Il matematico lanciò così sfida pubblica: annunciò infatti che, se nessuno avesse trovato la risposta entro la fine dell'anno, avrebbe fornito lui stesso la soluzione. Il problema suscitò l'immediato interesse della comunità scientifica europea, tanto che Leibniz, dopo averlo risolto in pochi giorni in forma privata, suggerì a Bernoulli di posticipare la scadenza della sfida per permettere alla rivista di raggiungere anche gli studiosi fuori dalla Germania.

I retroscena legati a questa sfida furono raccontati dallo stesso Johann Bernoulli in una lettera indirizzata a Henry Basnage de Beauval (Bernoulli, 1697). Nel documento, il matematico ammetteva di aver originariamente pubblicato il quesito negli *Acta Eruditorum* credendolo inedito, “*senza sapere allora che era già stato tentato da Galileo*” (Bernoulli, 1697). Storicamente, dunque, lo scienziato italiano fu il primo a cimentarsi nella ricerca della discesa più veloce, affrontando la questione ben prima della sua formulazione ufficiale.

Tuttavia, il suo tentativo non andò a buon fine. Nella medesima lettera, infatti, Bernoulli riporta le osservazioni di Leibniz, il quale aveva individuato “*due notevoli difetti in Galileo*” (Bernoulli, 1697). Pur riconoscendolo apertamente come l'uomo “*senza dubbio il più perspicace del suo tempo in questa materia*”, Bernoulli sottolinea come Galileo fosse inevitabilmente limitato dagli strumenti matematici della sua epoca, in quanto “*privato della nostra nuova analisi*” (Bernoulli, 1697). Questa mancanza di strumenti adeguati lo portò a formulare due congetture inesatte: in primo luogo, egli ipotizzò che la curva descritta da una fune sospesa (la cosiddetta curva catenaria) fosse una parabola; in secondo luogo, in merito al problema della discesa più rapida, egli dedusse erroneamente che la traiettoria ottimale fosse un cerchio. Come avrebbero poi dimostrato Leibniz e lo stesso Bernoulli grazie ai nuovi metodi di calcolo, la curva brachistocrona non è circolare, bensì corrisponde a una cicloide (Bernoulli, 1697).

Galileo affrontò il problema della brachistocrona all'interno della sua celebre opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei, 1638). L'idea di fondo di Galileo si basa sullo studio della caduta dei gravi lungo i piani inclinati. Partendo dal Teorema di Merton (o Teorema della velocità media), secondo cui un corpo uniformemente accelerato percorre la stessa distanza di un corpo che ha velocità uniforme pari alla media tra velocità iniziale e finale, lo scienziato dimostra la cosiddetta “Legge

di Galilei sulle corde”. Secondo questo principio, i tempi di caduta lungo i piani inclinati tracciati dal punto più alto o verso il punto più basso di un cerchio verticale risultano tutti uguali.

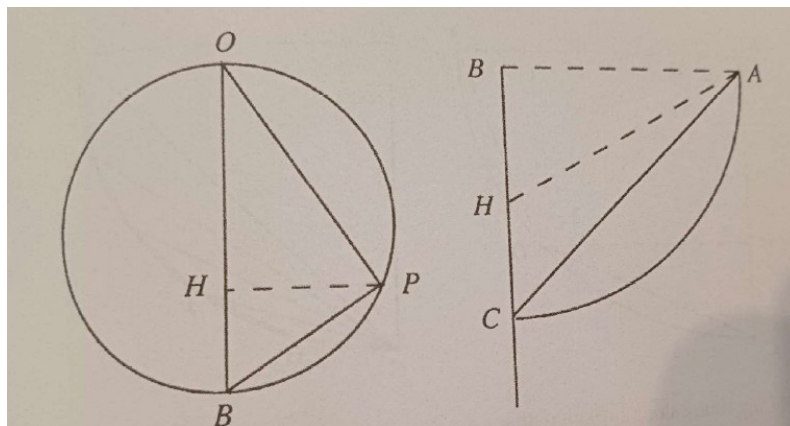


Figura 1.3: Rappresentazione geometrica della “Legge di Galilei sulle corde”. Come illustrato nel cerchio a sinistra, il tempo di discesa partendo da fermo lungo una qualsiasi corda inclinata (come OP o PB) risulta sempre identico al tempo di caduta libera lungo il diametro verticale OB. Immagine tratta dall’opera di Freguglia e Giaquinta (2010).

Sulla base di questo principio geometrico e cinematico, Galileo dimostra che il tempo di discesa lungo una linea spezzata composta da due segmenti (ad esempio la traiettoria ADC in figura 1.4) è inferiore rispetto al tempo impiegato per percorrere la singola retta che unisce gli stessi estremi (la corda AC), ipotizzando una partenza con velocità pari a zero.

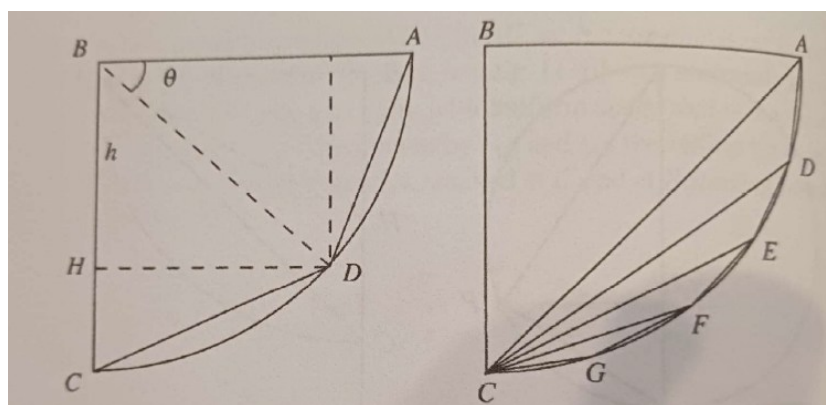


Figura 1.4: Rappresentazione geometrica di Galileo per il confronto dei tempi di caduta lungo le corde e le linee spezzate inscritte. Immagine tratta dall’opera di Freguglia e Giaquinta (2010).

Galileo nota formalmente che il tempo lungo la singola retta è maggiore della somma dei tempi sui due segmenti, ovvero, osservando la figura 1.4, $t_{AC} > t_{AD} + t_{DC}$. Estendendo e iterando questo ragionamento ai segmenti successivi, egli deduce che, allo stesso modo, $t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}$. Di conseguenza, frammentando ulteriormente il percorso per formare una spezzata con più vertici (ad esempio ADEFC), il tempo complessivo di discesa continua a diminuire rispetto alla spezzata precedente (come ADEC).

Questo processo porta Galileo a formulare la sua conclusione, espressa in un celebre passaggio dello *Scholium* del Terzo Dialogo (Galilei, 1638, p. 232): “Perciò, quanto più mediante poligoni inscritti ci avviciniamo alla circonferenza, tanto più rapidamente si compie il moto tra i due punti segnati A e C”.

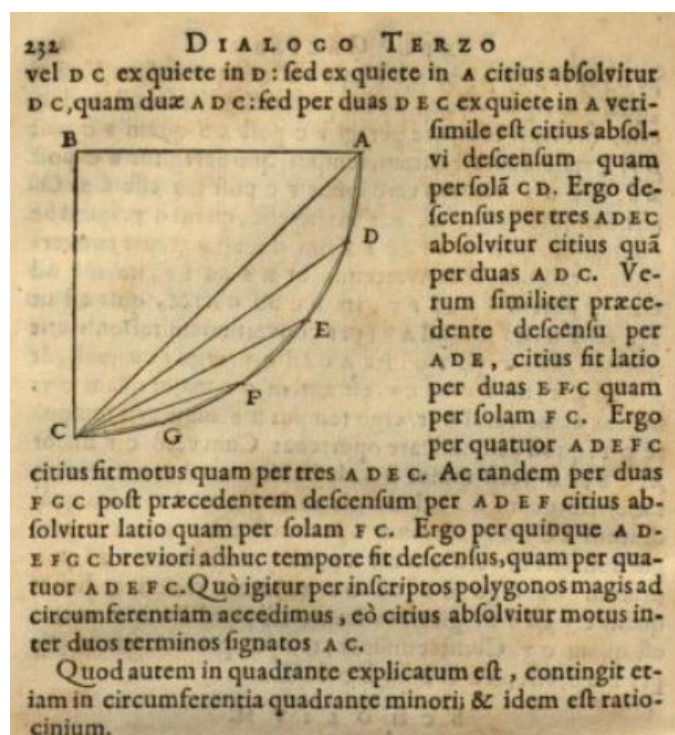


Figura 1.5: Estratto originale dello *Scholium* tratto dai “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali” di Galileo Galilei (1638, p. 232)³.

Conseguentemente, basandosi sull’idea che il tempo diminuisca all’aumentare dei lati del poligono, Galileo si convince che il tempo minore in assoluto per passare dal

³ Fonte originale digitalizzata consultabile su Internet Archive: https://archive.org/details/bub_gb_E9BhikF658wC/page/n245/mode/2up

punto A al punto C si ottenga quando il poligono diventa “infinitamente vicino” alla circonferenza stessa.

In realtà, questa deduzione nasconde un duplice ostacolo epistemologico che invalida l'intera soluzione. In primo luogo, dal punto di vista matematico, la formula finale a cui Galileo giunge per generalizzare il comportamento dei poligoni inscritti risulta essere falsa. In secondo luogo, si rileva un errore concettuale nel ragionamento fisico riguardante la scomposizione del moto: nel sommare e confrontare i tempi dei vari tratti che compongono la linea spezzata, lo scienziato non tiene correttamente conto delle velocità accumulate dal corpo. Egli calcola i tempi di discesa come se, all'inizio del secondo tratto e di tutti i segmenti successivi al primo, la velocità iniziale fosse nuovamente pari a zero, trascurando del tutto l'accelerazione pregressa.

In conclusione, l'errore commesso da Galileo non invalida la portata del suo ingegno, ma rappresenta un esempio emblematico di come le conoscenze già acquisite possano trasformarsi in un ostacolo alla scoperta, come teorizzato da Bachelard (1938). Il limite della sua deduzione geometrica non risiedeva infatti in una mancanza di logica, bensì nell'inadeguatezza degli strumenti matematici a sua disposizione, i quali non permettevano ancora di maneggiare formalmente la complessità della variazione continua della velocità. La sua intuizione, dunque, non va vista come fallimento, ma come tappa naturale all'interno del processo di evoluzione del pensiero matematico: solo decenni dopo, la destrutturazione di queste prime certezze ha fornito l'impulso necessario a menti come Leibniz, Newton e i fratelli Bernoulli per fondare i nuovi metodi analitici del Calcolo delle Variazioni.

Questo parallelismo storico richiama direttamente le riflessioni pedagogiche tracciate nel corso del capitolo. Proprio come la disciplina matematica si è evoluta attraversando e superando i propri fisiologici ostacoli concettuali prima di giungere all'attuale rigore formale, allo stesso modo lo studente costruisce il proprio sapere procedendo per tentativi, ipotesi e inevitabili difficoltà. Riconoscere questa dinamica permette all'insegnante di accogliere e contestualizzare gli errori dei propri studenti tenendo conto degli strumenti cognitivi di cui egli dispone in quel momento. Permettendo agli studenti di errare per imparare a correggersi (Enriques, 1936), è possibile allontanarsi dalle rigidità di un apprendimento puramente strumentale, trasformando le difficoltà in un motore per la costruzione di una conoscenza relazionale.

Capitolo 2

Disequazioni e valore assoluto: analisi delle difficoltà degli studenti

In continuità con la riflessione sull'errore affrontata precedentemente, questo secondo capitolo si concentra sull'analisi di due concetti essenziali per l'apprendimento dell'algebra: le disequazioni e il valore assoluto. La scelta di focalizzarsi su questi specifici argomenti non è casuale, ma legata al loro ruolo di prerequisiti fondamentali per la costruzione di gran parte della matematica avanzata. Una loro comprensione parziale o errata, infatti, compromette l'assimilazione di concetti successivi ben più complessi, affrontati in ambito scolastico e universitario.

L'obiettivo del capitolo è quindi quello di mappare e comprendere le radici di queste difficoltà, analizzando nel dettaglio gli ostacoli cognitivi più diffusi tra gli studenti. Sarà dunque possibile osservare come gran parte degli errori derivi da un approccio allo studio di tipo prevalentemente meccanico e procedurale, che finisce per ostacolare la reale comprensione di ciò che gli oggetti matematici rappresentano.

2.1 Il quadro normativo: dalle Indicazioni Nazionali alla transizione universitaria

Le Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010a) tracciano una direttiva ben precisa per l'insegnamento della matematica. Fin dal primo biennio, emerge la necessità di superare la pura esecuzione di procedure, abbandonando la sterile risoluzione meccanica di infinite casistiche astratte. Gli obiettivi specifici di apprendimento per il biennio, orientati verso un approccio modellistico, sono espliciti e identici per tutti gli indirizzi: in entrambe le sezioni dedicate ad *“Algebra e aritmetica”* e a *“Relazioni e funzioni”*, si legge che lo studente deve apprendere a *“descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni”*. Inoltre, si introduce formalmente lo studio della funzione $f(x) = |x|$. La disequazione e il valore assoluto smettono quindi di essere visti come puri esercizi di calcolo per diventare strumenti concreti di traduzione e interpretazione della realtà.

Questo approccio accomuna tutti i percorsi liceali, sottolineando quindi che le disequazioni sono un prerequisito fondamentale che ogni studente deve saper padroneggiare già nei primi due anni. Le differenze tra i vari indirizzi risiedono solo nel livello di astrazione e di approfondimento richiesto. Nel liceo scientifico, ad esempio, l'uso delle disequazioni letterali è finalizzato a dimostrare risultati generali.

Nella sezione *“Linee generali e competenze”*, le Indicazioni Nazionali raccomandano esplicitamente per tutti i licei di *“evitare tecnicismi ripetitivi che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi”* privilegiando invece gli aspetti concettuali della disciplina. Queste direttive vengono ribadite anche in seguito per i singoli argomenti, sottolineando come l'obiettivo centrale sia l'utilizzo consapevole dello strumento matematico.

Inoltre, da una analisi organica del documento, emerge il peso che disequazioni e valore assoluto assumono al termine del percorso di studi. Nelle Indicazioni Nazionali per il quinto anno, infatti, questi strumenti non vengono mai menzionati in modo diretto, poiché la loro padronanza è ormai data per acquisita. Tuttavia, essi costituiscono un'impalcatura indispensabile per affrontare l'intera Analisi Matematica: senza una loro conoscenza solida, concetti cardine come la definizione formale di limite o lo studio del segno per determinare l'andamento di una funzione risultano inaccessibili.

La normativa appena descritta trova conferme nella recente bozza di revisione delle Indicazioni Nazionali per i licei (MIM, 2026). Il nuovo documento ministeriale ribadisce lo studio delle disequazioni e l'introduzione della funzione $y = |x|$ fin dal primo biennio, in un'ottica orientata alla modellizzazione e all'esplorazione grafica. L'aspetto più innovativo risiede tuttavia nella nuova visione delle difficoltà cognitive: il documento sottolinea infatti l'esigenza di abituare gli allievi a riconoscere l'errore come un'occasione di crescita, specificando che esso *“non viene considerato un fallimento, bensì un'opportunità di apprendimento e di confronto”* (MIM, 2026, p. 33). Tale orientamento appoggia in pieno l'approccio scelto per questo studio, riconoscendo ufficialmente che gli errori non vanno ignorati, ma usati come punto di partenza per sviluppare competenze.

Spostando l'attenzione invece sulle Linee Guida per gli Istituti Tecnici (MIUR, 2010b), suddivise in settore tecnologico e settore economico, l'analisi dei documenti ministeriali fa emergere similitudini con i licei, sebbene l'impostazione sia maggiormente

operativa e visuale. Nonostante ciò, fin dal primo biennio, sia per il settore economico che per quello tecnologico, la risoluzione di disequazioni di primo e secondo grado non è concepita come una pura abilità algebrica. Al contrario, essa viene strettamente legata allo studio delle funzioni lineari e quadratiche e alla loro rappresentazione sul piano cartesiano. La direttiva richiede infatti di risolvere problemi e sistemi “*anche per via grafica*”, ad esempio utilizzando la parabola o la retta per tradurre visivamente una disuguaglianza. Questo approccio promuove esplicitamente quindi l'utilizzo di diversi registri di rappresentazione semiotica, in modo da favorire la comprensione profonda degli oggetti matematici.

Il taglio applicativo si ritrova anche negli obiettivi del secondo biennio (MIUR, 2012), dove l'attenzione si concentra sull'efficacia risolutiva, sfruttando ancora metodi grafici, numerici e strumenti informatici. Nel settore tecnologico, in particolare, le Linee Guida richiedono esplicitamente di risolvere disequazioni e sistemi legati alla “*funzione modulo*”. Nel settore economico, invece, la gestione delle disuguaglianze si applica direttamente in problemi di massimo e minimo o nella costruzione di modelli per le scienze sociali.

Pur con queste differenze metodologiche, le necessità del triennio si allineano con quelle dei licei. Anche negli istituti tecnici, infatti, le disequazioni e il valore assoluto si confermano un prerequisito essenziale. Qualsiasi operazione avanzata dell'Analisi Matematica, come la ricerca dei punti di discontinuità o l'ottimizzazione di un modello economico tramite le derivate, richiede una gestione sicura del segno e delle disuguaglianze. Queste competenze ormai considerate acquisite rappresentano la base su cui si fonda lo studio delle funzioni negli ultimi anni di corso.

Il salto dalla scuola superiore all'università conferma il percorso tracciato dalle direttive ministeriali. Infatti, analizzando i syllabus dei corsi di laurea di area tecnico-scientifica, dalle varie diramazioni dell'Ingegneria fino a Informatica, il quadro è chiaro e uniforme. Considerando come esempio rappresentativo il programma di Analisi Matematica per Ingegneria del Veicolo (svolto presso l'Università di Modena e Reggio Emilia⁴), si evince che la risoluzione di equazioni e disequazioni e la padronanza delle

⁴ Syllabus del corso di Analisi Matematica I, Università di Modena e Reggio Emilia, anno 2024/2025. Consultabile nel sito:
<https://unimore.coursecatalogue.cineca.it/corsi/2024/10667/insegnamenti/2024/24536/2018/10000?schemaid=21848>

funzioni elementari costituiscono proprio i prerequisiti del corso, senza più comparire in modo esplicito tra i contenuti.

Gli insegnamenti universitari non riprendono la teoria di base su questi argomenti, ma li utilizzano come strumenti operativi indispensabili. Il corso infatti affronta da subito concetti avanzati come la topologia dei numeri reali, il calcolo differenziale e l'analisi della continuità, settori in cui la gestione delle disuguaglianze e del valore assoluto è essenziale.

L'esempio più lampante di questa dinamica si incontra già nelle primissime lezioni con la definizione formale di limite. La scrittura $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ richiede che, scelto un qualsiasi $\varepsilon > 0$, esista un $\delta > 0$ tale che la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ sia verificata ogni volta che $0 < |x - x_0| < \delta$. Questa formulazione si basa interamente sulla risoluzione di disequazioni con il valore assoluto. La capacità di gestire queste disuguaglianze è condizione necessaria per mostrare di aver interiorizzato la definizione di limite e saperla applicare nella pratica. Per esempio, la scrittura $|f(x) - l| < \varepsilon$ richiede allo studente di muoversi agilmente tra diversi registri di rappresentazione: deve saper tradurre la condizione algebrica del modulo nel suo equivalente grafico e topologico, riconoscendola anche visivamente come un intorno aperto sul piano cartesiano. Senza queste capacità, la definizione di limite rischia di ridursi a una formula imparata a memoria e l'accesso ai concetti successivi dell'Analisi Matematica risulta precluso.

La conferma più evidente di questa dinamica nel passaggio tra scuola e università arriva dall'analisi degli Obblighi Formativi Aggiuntivi (OFA), ovvero lo sbarramento formale previsto dagli atenei per chi immatricolandosi non dimostra di possedere le competenze di base. È prevista infatti una prova di compensazione organizzata dal Dipartimento per gli studenti che non hanno ottenuto un punteggio sufficiente nell'area matematica del TOLC-I, ovvero il test d'ingresso per la facoltà di Ingegneria. Il Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari" di UNIMORE mette a disposizione videolezioni e materiali utili alla preparazione della prova di compensazione. Esaminando il documento⁵ relativo agli argomenti la cui conoscenza è necessaria per sostenere la prova, emerge ancora più nettamente quali siano i prerequisiti fondamentali richiesti per

⁵ <https://www.ingmo.unimore.it/sites/dip02/files/2024-03/19404MatematicaMateri.pdf>

poter affrontare gli esami successivi. Il programma di recupero non si limita a un ripasso generale, ma entra nel dettaglio tecnico affrontando sistematicamente lo studio di equazioni e disequazioni, declinate in tutte le loro forme: fratte, irrazionali, esponenziali e trigonometriche. Inoltre, il syllabus dedica uno spazio specifico e isolato alle disequazioni con valore assoluto, confermando quanto l'uso congiunto della disuguaglianza e del modulo rappresenti lo scoglio operativo più critico. L'OFA certifica dunque che senza una padronanza solida di questi strumenti algebrici, l'università blocca l'accesso effettivo al percorso ingegneristico, rendendo obbligatorio il loro recupero formale prima di poter sostenere qualsiasi esame di Analisi.

2.2 Le disequazioni: ostacoli cognitivi e procedurali

Per analizzare le difficoltà tipiche che gli studenti incontrano con le disequazioni, si farà riferimento a uno studio condotto da Mutodi et al. (2023) su un campione di 50 studenti del grado 12 in Sudafrica. Questa ricerca, tramite un approccio che combina test scritti e interviste, evidenzia come le disequazioni non rappresentino solo un ostacolo procedurale, ma una vera sfida cognitiva dovuta alla loro natura più complessa rispetto alle equazioni.

Secondo lo studio, infatti, gran parte degli errori su questo tema non è frutto di distrazione, ma deriva dalla maggiore difficoltà rispetto alle equazioni, dove lo studente cerca spesso un singolo valore o un numero limitato di soluzioni. Le disequazioni, invece, richiedono di comprendere il concetto di insieme di soluzioni infinite e di gestire relazioni d'ordine che non sempre si comportano in modo intuitivo.

A questo proposito, Mutodi et al. (2023) riprendono le ricerche di Vaiyavutjamai e Clements (2006), sottolineando come le difficoltà sperimentate dagli studenti derivino principalmente dalla complessità semantica del compito. Come spiegano nel dettaglio Vaiyavutjamai e Clements (2006, p.51), il vero *“problema è di natura semantica, e viene mascherato dalla partecipazione degli studenti alle manipolazioni rituali necessarie per trovare le soluzioni”*. In altre parole, gli allievi applicano procedure algebriche senza comprendere il reale significato logico dei simboli che stanno manipolando.

Questa assenza di significato concettuale genera, nel caso delle disequazioni, due credenze *“fossilizzate”* (Mutodi et al., 2023, p.137): la prima è l'aspettativa errata che esista un solo valore reale in grado di rendere vera la disuguaglianza, ignorando il

concetto di intervallo; la seconda è la tendenza a fornire come risposta il risultato dell'equazione corrispondente.

Uno dei problemi centrali individuati è la tendenza alla generalizzazione delle procedure tipiche delle equazioni. Gli studenti spesso trattano i simboli di disuguaglianza come se fossero un segno di uguale, applicando meccanicamente quello che viene definito il “metodo della bilancia” (Balomenou et al. 2017). Sebbene questo principio di equivalenza sia valido per le equazioni, la sua applicazione impropria alle disequazioni porta a errori critici, come la mancata inversione del verso della disuguaglianza quando si moltiplica o si divide per un numero negativo o per una variabile dal segno ignoto.

Inoltre, lo studio evidenzia come l'insegnamento delle disequazioni “senza tenere debitamente conto del concetto di funzione implica una banalizzazione della materia, che sfocia in una sequenza di procedure di routine non facili da comprendere per gli studenti” (Boero & Bazzini, 2004, p.140). Questo approccio puramente algoritmico fa sì che le disequazioni vengano percepite come “*stringhe di simboli prive di significato a cui vengono regolarmente applicate alcune procedure ben definite*” (Ward, 2016, p.17). Di conseguenza, gli studenti possono essere in grado di individuare i “valori critici”, ovvero i punti in cui l'espressione si annulla, ma falliscono nel passaggio successivo, cioè faticano a valutare come varia il segno dell'espressione negli intervalli della retta reale compresi tra questi punti. Mancando di questa visione globale, si limitano a fornire risposte parziali o focalizzate solo sui numeri interi.

Tale scenario risulta in contrasto rispetto al quadro analizzato nei documenti ministeriali (Indicazioni Nazionali e Linee Guida), i quali raccomandano esplicitamente di legare la risoluzione di equazioni e disequazioni alla rappresentazione grafica e allo studio delle funzioni. L'alta frequenza di errori dovuti a un'impostazione puramente algebrica suggerisce, invece, un disallineamento tra le direttive istituzionali e le prassi didattiche effettive. È lecito domandarsi, quindi, se le Indicazioni Ministeriali faticino ancora a trovare un'applicazione concreta nelle aule, lasciando il posto al più usuale calcolo meccanico.

In sintesi, si è visto come l'ostacolo principale nella risoluzione di una disequazione non sia l'esecuzione del calcolo algebrico in sé, ma l'incapacità degli studenti di attribuire un significato logico e spaziale ai simboli matematici che manipolano. Sulla base di questo quadro teorico, nei paragrafi successivi verranno

analizzate nel dettaglio le specifiche tipologie di errore riscontrate dai risultati dello studio di Mutodi et al. (2023).

2.2.1 L'ostacolo dei simboli: la confusione tra equazioni e disequazioni

Il primo ostacolo significativo emerso dall'analisi riguarda l'interpretazione dei simboli di disuguaglianza. Molti studenti, infatti, non possiedono una comprensione solida del significato di “maggiore” ($>$) o “minore” ($<$). Di fronte a una disequazione, specialmente se di secondo grado o di grado superiore, la tendenza più diffusa è quella di aggirare l'ostacolo visivo sostituendo sistematicamente il simbolo di disuguaglianza con un segno di uguale ($=$), trasformando di fatto l'esercizio in un'equazione.

Per esempio, nel tentativo di trovare le soluzioni di $(5x - 1)(x - 4) > 0$, gli studenti dimostrano spesso di saper applicare correttamente le procedure algebriche di base. Essi impostano le equazioni $5x - 1 = 0$ e $x - 4 = 0$ per trovare i punti in cui l'espressione si annulla, arrivando ai risultati $x = \frac{1}{5}$ e $x = 4$. A questo punto, tuttavia, il processo si blocca, dando origine a due diverse tipologie di errore.

La prima consiste nel fermarsi esattamente a questo passaggio: molti studenti, infatti, considerano i due risultati appena trovati come la soluzione definitiva del problema. In questo modo, interpretano erroneamente i “valori critici” come le soluzioni effettive della disequazione, fornendo una risposta parziale e puntuale al posto di un intervallo di valori. Questa dinamica è stata confermata anche da altri studi in letteratura, i quali sottolineano come gli studenti faticino a spingersi oltre il calcolo delle radici (Luneta & Makonye, 2010).

La seconda tipologia di errore, ancora più indicativa, si verifica quando lo studente cerca di reintrodurre i segni di disuguaglianza nella risposta finale, ma lo fa assemblando i simboli in modo casuale. Nello studio di Mutodi et al. (2023), ad esempio, alcuni ragazzi hanno unito i valori critici scrivendo soluzioni come $\frac{1}{5} > x > 4$. Questa scrittura è matematicamente priva di significato, poiché per la proprietà transitiva implicherebbe che $\frac{1}{5}$ sia maggiore di 4, che è ovviamente falso.

2.2.2 Il prevalere dell'automatismo sulla comprensione della richiesta

La mancanza di significato concettuale nell'uso dei valori critici si lega direttamente a un secondo ostacolo molto frequente: la mancata comprensione della

domanda posta dal problema. Molti studenti, infatti, affrontano l'esercizio applicando automatismi senza avere chiaro quale sia l'obiettivo finale richiesto dalla disequazione.

Un esempio lampante di questa dinamica emerge dall'analisi delle disequazioni fratte, come nel caso di $\frac{x-3}{x^2-8x-20} > 0$. Anche qui, molti riescono a fattorizzare correttamente il denominatore in $(x-10)(x+2)$ e a ricavare i tre valori critici associati, ovvero $x = 3$, $x = 10$ e $x = -2$. Tuttavia, invece di procedere con lo studio dei segni per individuare gli intervalli in cui la frazione risulta positiva, stravolgono il senso della richiesta. L'errore in assoluto più diffuso (riscontrato nel 64% dei casi dello studio di Mutodi et al., 2023) consiste nel confrontare tra loro i valori critici appena trovati per scegliere semplicemente quello minore. Molti studenti indicano infatti $x = -2$ come risposta finale e definitiva, convinti che risolvere la disequazione significhi semplicemente scovare il numero più piccolo tra quelli calcolati.

Un'altra tendenza altrettanto problematica, indice della medesima incomprensione di fondo, riguarda la manipolazione algebrica della frazione. Alcuni studenti trattano il denominatore esattamente come farebbero in un'equazione numerica, moltiplicando entrambi i membri per il polinomio $x^2 - 8x - 20$ pur di "eliminarlo" visivamente. Questo passaggio errato riduce l'esercizio alla forma $x - 3 > 0$, portando alla soluzione inesatta $x > 3$. L'utilizzo ingiustificato di questa semplificazione, che non si preoccupa dell'incidenza del segno del denominatore, dimostra come la priorità dello studente sia sbarazzarsi della complessità della frazione, perdendo di vista la logica del problema.

Quest'ultima procedura fallimentare si ricollega direttamente a un'altra pratica errata estremamente diffusa, ovvero la moltiplicazione di entrambi i membri per una variabile. Come evidenziato dallo studio di Mutodi et al. (2023), ben il 75% degli studenti applica questo procedimento quando affronta disequazioni fratte o contenenti incognite al denominatore.

Un esempio classico si osserva nella risoluzione di $x - \frac{2}{x} > 5$. La maggior parte degli studenti, applicando in modo acritico le regole apprese per le equazioni, moltiplica l'intera espressione per x ottenendo $x^2 - 2 > 5x$, per poi procedere con il calcolo dei valori critici tramite la formula quadratica. L'errore nasce dalla mancata consapevolezza che, in una disequazione, moltiplicare per una quantità incognita è un'operazione illecita a meno che non si pongano condizioni rigorose sul suo segno. Senza sapere se la variabile

è positiva o negativa, è infatti impossibile determinare se il verso della disuguaglianza debba essere mantenuto o invertito. In letteratura, Banerjee e Subramaniam (2012, p.352) definiscono questi comportamenti come “errori di distacco”: gli studenti applicano meccanicamente le proprietà valide per i numeri interi alle frazioni algebriche, perdendo completamente il contatto con la struttura logica e concettuale del problema.

2.2.3 Errori sistematici nell’inversione del segno di disuguaglianza

Un’ulteriore conseguenza di un approccio puramente meccanico sono gli errori sistematici legati all’inversione del verso della disuguaglianza. Quando occorre spostare i termini da un membro all’altro per raggrupparli, qualcuno crede che il semplice spostamento di un termine negativo comporti l’inversione del simbolo di disuguaglianza. Altri invece dividono o moltiplicano per un numero negativo entrambi i membri della disequazione senza invertire il verso del segno. Questi errori hanno un’origine prettamente didattica e linguistica: come osserva Powell (2012), gli insegnanti sono soliti ripetere regole pratiche mnemoniche che vengono utilizzate dagli studenti in modo arbitrario senza capirne il significato. Per esempio, la frase “quando si sposta un numero dall’altra parte dell’uguale, il segno cambia” porta talvolta gli studenti a capovolgere il verso del simbolo di disuguaglianza anche quando si trasporta da una parte all’altra della disequazione un termine additivo negativo. Come mostra lo studio di Mutodi et al. (2023), infatti, talvolta la disequazione $5x - 1 > 0$ viene trasformata in $5x < 1$.

Il vero principio matematico, ovvero il fatto che il verso si inverte esclusivamente quando si moltiplicano o si dividono entrambi i membri per una quantità negativa, viene così ignorato o sovrapposto ad altre regole. Per correggere questa abitudine, come suggerisce lo studio, sarebbe molto più efficace evitare di far memorizzare l’inversione del verso come una regola astratta, proponendo invece esempi numerici inconfutabili. Ad esempio, partendo dal fatto che $6 < 8$, dividendo entrambi i membri per -2 si ottengono i valori -3 e -4 ; confrontando i risultati, diventa intuitivamente ovvio che $-3 > -4$, rendendo logica e comprensibile la necessità di invertire il simbolo.

2.2.4 Il rifiuto delle soluzioni “anomale”

In un altro studio condotto da Tsamir e Bazzini (2001) su un campione di studenti italiani e israeliani, emerge un’ulteriore difficoltà frequente legata a quelle che possono essere definite soluzioni “anomale”. Molti allievi, infatti, faticano ad accettare che il

risultato di una disequazione possa essere un singolo valore numerico (del tipo $x = a$) anziché un intervallo di numeri. Questa difficoltà nasce da una convinzione radicata secondo cui le equazioni servono a trovare “un numero”, mentre le disequazioni devono necessariamente produrre “una regione” o un insieme infinito di valori. Ciò apre una riflessione interessante se si pensa che nei paragrafi precedenti è stato illustrato l’errore “opposto”, ovvero la tendenza a riportare le soluzioni dell’equazione associata invece che della disequazione. L’insegnante, dunque, deve sì prestare attenzione a chiarire da subito le differenze tra equazioni e disequazioni, ma è necessario che dia sempre importanza anche allo studio dei casi particolari.

Ad esempio, analizzando la risoluzione della disequazione $5x^4 \leq 0$, molti studenti, pur arrivando correttamente a capire che l’unica possibilità è che $5x^4$ sia uguale a zero, tendono a rifiutare la soluzione $x = 0$. Altri invece, pur accettando $x = 0$ come soluzione di $5x^4 \leq 0$, affermano che $x = 3$ non potrebbe essere soluzione di alcuna disequazione. Le interviste condotte dai ricercatori (Tsamir & Bazzini, 2001, p.308) hanno evidenziato che gli studenti spesso commentano con frasi del tipo: “un risultato che contiene un’uguaglianza può essere solo la soluzione di un’equazione” e “un risultato con disuguaglianza può essere solo la soluzione di una disequazione”. Di fronte a questo risultato “anomalo”, lo studente tende a pensare di aver commesso un errore procedurale o che la domanda stessa sia posta in modo sbagliato, proprio perché il risultato non corrisponde all’immagine mentale che ha dell’oggetto matematico “disequazione”.

2.2.5 L’estensione illecita della legge di annullamento del prodotto

Un’ulteriore problematica ricorrente emerge quando gli allievi si trovano ad affrontare disequazioni di grado superiore al primo, come ad esempio quelle di secondo grado già fattorizzate o facilmente fattorizzabili. In questi casi, la tendenza comune è quella di estendere in modo illecito la cosiddetta “legge di annullamento del prodotto”, valida esclusivamente per le equazioni (Tsamir et al., 1998). Nella risoluzione di queste ultime, gli studenti hanno interiorizzato la regola secondo cui se $ab = 0$, allora necessariamente $a = 0$ oppure $b = 0$.

Trasferendo questa procedura meccanicamente alle disequazioni, di fronte a un’espressione come $ab > 0$, deducono che debba essere contemporaneamente $a > 0$

e $b > 0$. Così facendo, ignorano completamente la seconda casistica matematicamente valida, ovvero quella in cui entrambi i fattori sono negativi.

Allo stesso modo, di fronte a un prodotto strettamente minore di zero, essi concludono erroneamente che entrambi i singoli fattori debbano essere negativi, ponendo $a < 0$ e $b < 0$. La letteratura (Tsamir et al., 2004) ha documentato numerosi esempi di questo fenomeno: di fronte a compiti come $(x - 2)(x + 5) \geq 0$, molti studenti scrivono semplicemente $x - 2 \geq 0$ e $x + 5 \geq 0$, senza fornire una connessione logica tra le due espressioni e senza affrontare il caso in cui i fattori siano entrambi negativi. Questo errore non fa che confermare l'applicazione cieca di regole pregresse ed evidenzia una forte fragilità nella gestione dei connettivi logici. Gli studenti perdono di vista il significato semantico della richiesta originaria, faticando a distinguere l'uso delle congiunzioni “e” ed “oppure”.

2.2.6 L'estrazione di radice e la rimozione dell'intervallo negativo

Un'ulteriore criticità riguardante le espressioni di grado superiore al primo emerge nella gestione delle potenze e nell'estrazione di radice all'interno di una disuguaglianza. Come evidenziato nelle ricerche di Almog e Ilany (2012), molti allievi tendono a risolvere espressioni come $x^2 > 9$ (o la forma corrispondente con il valore assoluto $|x| > 3$) creando di nuovo un'analogia con il procedimento risolutivo delle equazioni. In questi casi, lo studente applica la radice quadrata a entrambi i membri e, ricordando in modo frammentario la regola del “doppio segno”, giunge a risposte matematicamente prive di senso come $x > \pm 3$. Questa notazione nasconde un'incomprensione profonda: lo studente non solo ignora la necessità di definire un intervallo, ma non percepisce l'incoerenza logica di porre una variabile contemporaneamente maggiore di un numero positivo e di uno negativo.

In altre situazioni, il ricorso a procedure mnemoniche porta a una semplificazione ancora più marcata, in cui l'intero intervallo negativo della soluzione viene omissso. Analizzando le risposte degli studenti a compiti che coinvolgono potenze quadratiche, Almog e Ilany (2012) osservano che molti allievi forniscono come unica soluzione $x > 3$, senza minimamente considerare la seconda soluzione $x < -3$. Questo comportamento indica che il simbolo di disuguaglianza viene spesso svuotato della sua funzione di confronto tra grandezze e ridotto a un semplice operatore di separazione

(Boero & Bazzini, 2004). Tali errori confermano che l'uso dei simboli algebrici, visti come stringhe di simboli prive di significato, avviene spesso per imitazione di procedure viste in precedenza (Mutodi et al., 2023), senza che vi sia una reale consapevolezza della struttura dell'asse reale.

2.2.7 L'interpretazione arbitraria del valore assoluto

La maggior frequenza di incomprensioni concettuali si riscontra quando gli studenti si trovano ad affrontare le disequazioni con il valore assoluto. I risultati analizzati rivelano che la maggioranza del campione (circa l'80%) non ha alcuna nozione del reale significato della funzione modulo, un dato allarmante confermato anche da altre ricerche del settore (El-khateeb, 2016). Di fronte a un'espressione come $|2x - 1| < 5$, gli studenti ricorrono ad interpretazioni del tutto arbitrarie pur di rimuovere le linee verticali: alcuni le ignorano del tutto trattandole come normali parentesi (scrivendo $2x - 1 < 5$), altri le interpretano sistematicamente come un'istruzione per elevare al quadrato il binomio, e altri ancora cambiano in positivo tutti i segni negativi che vedono (trasformando l'espressione in $2x + 1 < 5$). Vista la specificità e la complessità degli ostacoli cognitivi legati a questo particolare oggetto matematico, l'analisi dettagliata degli errori relativi al valore assoluto verrà affrontata in maniera esaustiva nel successivo paragrafo 2.3.

2.2.8 Sintesi delle criticità e implicazioni didattiche

In sintesi, i risultati degli studi presi in analisi confermano che le difficoltà degli studenti non sono dovute a semplici disattenzioni, ma a vere e proprie false credenze legate a come hanno appreso la matematica negli anni precedenti. Come fa notare Switzer (2014), alla base c'è anche un problema didattico: spesso né le lezioni né i libri di testo chiariscono a sufficienza la differenza tra equazioni e disequazioni. Di conseguenza, gli studenti tentano di applicare regole che già conoscono pensate per trovare un singolo valore numerico a un concetto matematico che funziona in modo molto diverso.

Tutto questo ha delle ricadute importanti per l'insegnamento. Per superare questi blocchi, non è sufficiente intensificare la pratica algoritmica o far memorizzare nuove regole. È necessario che i docenti trasformino l'analisi delle difficoltà matematiche in un vero e proprio strumento didattico, discutendo le misconcezioni prima che esse si stabilizzino in ostacoli cognitivi più difficili da superare. A livello pratico, ciò si traduce

nell'esigenza di trovare un equilibrio tra un approccio procedurale con la reale comprensione concettuale (Skemp, 1976).

Diventa quindi essenziale evidenziare bene la differenza tra equazioni e disequazioni, spiegando con cura il passaggio da una soluzione unica a un insieme di valori infiniti e promuovere la riflessione sul significato delle diverse manipolazioni algebriche che si compiono nella risoluzione di una disequazione. Inoltre, in linea con quanto suggerito da Mutodi et al. (2023) e dalle stesse indicazioni ministeriali viste in precedenza, è necessario andare oltre il solo calcolo algebrico. In quest'ottica, risulta fondamentale promuovere la coordinazione tra i diversi registri di rappresentazione semiotica (Duval, 1993): favorire il passaggio costante tra l'approccio algebrico, quello grafico e la retta dei numeri rappresenta la strada migliore per far emergere il significato dei simboli matematici e aiutare gli studenti a capire le disequazioni in modo consapevole.

2.3 Criticità didattiche legate al concetto di valore assoluto

L'analisi delle difficoltà tipiche che gli studenti incontrano con il valore assoluto farà riferimento alla recente revisione sistematica condotta da Papadouris et al. (2024), che offre una mappatura completa degli ostacoli cognitivi legati a questo argomento. Ad essa si affiancheranno le evidenze emerse dallo studio di El-khateeb (2016) condotto su studenti universitari. Queste ricerche evidenziano infatti come anche il valore assoluto, al pari delle disequazioni, non rappresenti solo un ostacolo procedurale, ma un concetto difficile da padroneggiare poiché possiede una natura multidimensionale.

Sembra infatti che gran parte delle difficoltà non derivi da semplici disattenzioni nel calcolo, ma dalla necessità di coordinare contemporaneamente tre diverse prospettive: quella aritmetica (come operazione sui numeri), quella geometrica (come distanza sulla retta reale) e quella algebrico-funzionale (come funzione definita a tratti). I ricercatori concordano sul fatto che gli studenti spesso non riescono a compiere questa integrazione e sviluppano false credenze profonde, legate soprattutto all'incapacità di generalizzare le regole apprese nei primi anni di scuola (Papadouris et al., 2024).

La tendenza a interpretare il valore assoluto in modo puramente algoritmico porta gli allievi a concepirlo quasi come una “macchina” che omette il segno o che trasforma ogni numero nella sua controparte positiva (El-khateeb, 2016). Sebbene questa visione semplificata possa funzionare quando si manipolano numeri (cioè $|-5| = 5$), la sua

applicazione in ambito algebrico, in presenza di variabili, porta a errori critici e allo svuotamento del significato geometrico di distanza.

2.3.1 L'ostacolo della notazione nel dominio numerico

Il primo ostacolo significativo emerso riguarda il modo in cui gli studenti percepiscono e la notazione stessa del valore assoluto. Un evidente segnale di ciò si osserva già nel dominio numerico, dove la notazione del modulo (ovvero le due barre verticali $| \cdot |$) talvolta viene confusa con delle normali parentesi. Esempio significativo di questo fraintendimento (Papadouris et al., 2024) si trova nell'espressione $| - 3 - 6 | + | 7 - 5 |$, della quale gli studenti calcolano prima i contenuti ottenendo (-9) e $(+2)$, e poi li sommano algebricamente scrivendo $(-9) + 2 = -7$. In altri casi, viene alterato l'ordine delle operazioni: di fronte alla somma $| 7 | + | - 9 |$, talvolta viene eseguita prima l'addizione aritmetica tra gli argomenti $(7 - 9 = -2)$ e solo alla fine viene applicato il valore assoluto, ottenendo erroneamente 2 come risultato finale.

2.3.2 Il passaggio all'algebra e il bias dei numeri naturali

Se le incomprensioni sono già presenti nel campo numerico, i veri problemi emergono ancora di più nel passaggio al dominio algebrico. Numerosi studiosi citati nello studio di Papadouris et al. (2024) concordano sul fatto che le maggiori difficoltà con il valore assoluto iniziano proprio quando si inserisce la variabile x all'interno del modulo.

All'interno di questo passaggio, la criticità principale riguarda la percezione della variabile, che spesso non viene intesa come un numero generalizzato ma come un'entità a cui applicare proprietà tipiche dei numeri naturali (Chiarugi et al., 1990). Questo approccio, denominato in letteratura come “bias dei numeri naturali” (Vamvakoussi et al., 2012) e definibile una misconcezione, spinge gli studenti a proiettare le caratteristiche dei numeri positivi e discreti sulle lettere, ostacolando la comprensione del valore assoluto in ambito reale. Una delle conseguenze più comuni di ciò è l'errata interpretazione del segno: come osservato da Chiarugi et al. (1990), molti allievi considerano il segno che precede la variabile come indicativo del valore numerico stesso, ritenendo x intrinsecamente positivo e $-x$ negativo. Questa misconcezione emerge sistematicamente nel trattamento di $| - x |$ come se fosse il modulo di un valore negativo, portando alla conclusione errata che il risultato debba essere sempre x .

La tendenza a percepire la variabile come un numero e non come un elemento continuo influenza, inoltre, l'interpretazione stessa della notazione simbolica. Invece di riconoscere in $|x - 1|$ una funzione, gli studenti tendono a leggervi esclusivamente la rappresentazione di due numeri distinti (Chiarugi et al., 1990). Questo spiega anche il motivo per cui nella risoluzione della disequazione $|x - 2| < 1$, ad esempio, l'insieme delle soluzioni viene spesso limitato ai soli valori interi, escludendo del tutto l'esistenza di soluzioni continue nell'ambito dei numeri reali (Almog & Ilany, 2012). Questo errore, dovuto all'abitudine di affrontare esercizi basati quasi esclusivamente su numeri naturali, conferma quanto sia difficile per lo studente slegarsi dal dominio dell'aritmetica elementare per approdare a una reale comprensione funzionale del valore assoluto.

2.3.3 Abbandono dell'astrazione tramite sostituzione numerica

Gli studi riportano che questo limite concettuale spinge gli studenti ad utilizzare strategie meno astratte, come la sostituzione numerica per tentativi. Invece di analizzare le proprietà generali di una funzione, si tende a verificare la validità di un'espressione testando solo alcuni valori interi specifici. Una prova evidente di ciò emerge nella frequente scrittura $|x - 1| = x - 1$ per $x > 0$: gli studenti verificano l'uguaglianza per numeri come 2 o 3, ma trascurano completamente l'intervallo compreso tra 0 e 1 dove l'identità è falsa (Chiarugi et al., 1990).

Anche in compiti di semplificazione più complessi, come nella richiesta di ridurre l'espressione $|x - 1| + |x| + 3$ sotto la condizione $x < 0$, molti allievi tendono ad abbandonare l'analisi algebrica per sostituire la variabile con un valore negativo arbitrario (come ad esempio -2), giungendo però ad errori di segno che portano a risultati incoerenti. La netta preferenza per il dato concreto trasforma conseguentemente la risoluzione di equazioni del tipo $|x - a| = b$ in un mero processo per tentativi ed errori, impedendo allo studente di acquisire un metodo risolutivo generale e consapevole (Papadouris et al., 2024).

2.3.4 Il modulo come operatore meccanico che cambia il segno

Come già accennato, uno degli errori maggiormente documentati riguarda la riduzione del valore assoluto a una semplice procedura meccanica per “omettere il segno” o forzare ogni quantità a diventare positiva (Elia et al., 2016). Questo approccio procedurale spinge molti studenti a trasformare arbitrariamente in positivo qualsiasi

segno “meno” presente all’interno dell’argomento. In ambito numerico, ad esempio, espressioni irrazionali come $|2 - \sqrt{5}|$ vengono calcolate rovesciando il segno e scrivendo $2 + \sqrt{5}$. In ambito algebrico, equazioni come $|2x - 3| + |y + 3| + |z - 4| = 0$ vengono risolte imponendo erroneamente le condizioni $2x + 3 = 0$, $y + 3 = 0$ e $z + 4 = 0$ (Demetgul & Baki, 2020). Seguendo una logica simile, frazioni algebriche come $\frac{|a|}{-a}$ vengono calcolate scrivendo direttamente -1 , senza porre alcuna condizione sul segno iniziale di a (Chiarugi et al., 1990). Questo ostacolo può essere considerato una misconcezione poiché il modello mentale di valore assoluto costruito dallo studente permette di ottenere risultati corretti con i numeri, dunque viene esteso deliberatamente al caso di variabili o espressioni algebriche, dove invece emerge la sua fallacia.

2.3.5 La complessità del valore assoluto come funzione: definizione, dominio e rappresentazione

Un’ulteriore fonte di ostacoli cognitivi risiede nella definizione formale del valore assoluto come funzione definita a tratti. Come teorizzato negli studi sull’argomento (Tall & Vinner, 1981), questa struttura logica risulta particolarmente complessa da assimilare. Inoltre, è radicata la convinzione che l’espressione $|x|$ non restituisca un singolo output in base a una condizione di dominio, ma che possieda simultaneamente due valori, costringendo lo studente a interpretarla sempre come $\pm x$ (Gagatsis & Panaoura, 2014).

Questa concezione errata si riversa inevitabilmente nella risoluzione delle equazioni. Nelle forme standard come $|x - a| = b$ (con $b \geq 0$), molti individuano correttamente una prima radice x per poi dedurre in modo automatico che la seconda soluzione sia semplicemente il suo opposto $-x$, senza svolgere il secondo caso dell’equazione (Elia et al., 2016).

Un’ulteriore criticità analizzata in letteratura riguarda la confusione tra il dominio di definizione e il dominio dei valori (codominio) della funzione valore assoluto. Molti studenti faticano a distinguere quali siano i valori ammessi per la variabile indipendente e quali quelli effettivamente assunti dal modulo (Chiarugi et al., 1990). Questo emerge graficamente quando, nel rappresentare funzioni del tipo $|f(x)|$, gli allievi tendono a disegnare la curva limitandola al solo quadrante delle ascisse positive (Chiarugi et al., 1990). Questa idea si estende alle equazioni, dove spesso non vengono considerate le soluzioni negative poiché si crede che l’argomento del valore assoluto debba essere

positivo, confondendo anche in questo caso dominio e codominio della funzione modulo (Almog & Ilany, 2012). Risolvendo l'equazione $|x + 3| = 2$, ad esempio, lo studente si limita a valutare il caso $x + 3 = 2$, escludendo a priori l'uguaglianza $x + 3 = -2$.

Ritenere che il valore assoluto renda positivo il dominio della funzione può essere considerata una misconcezione, poiché deriva dalla *concept image* temporanea di valore assoluto che lo studente ha creato nella sua mente, secondo cui il modulo “rende tutto positivo”. Questo modello viene quindi applicato erroneamente anche al dominio della funzione oltre che al codominio.

2.4 L'intersezione tra l'ostacolo del modulo e la logica delle disequazioni

2.4.1 Rigidità procedurali: ramo negativo e casi impossibili

L'idea che le quantità associate al valore assoluto debbano essere strettamente positive si ritrova anche nel caso delle disequazioni della forma $|x - a| < b$: nel caso specifico di $|x - 2| < 3$, l'allievo pone unicamente la condizione $x - 2 < 3$, ignorando la disuguaglianza $-3 < x - 2$. Questa seconda casistica viene scartata perché implicherebbe accettare che l'argomento $x - 2$ possa assumere valori minori di zero, contraddicendo l'immagine mentale del modulo come operatore esclusivamente positivo (Almog & Ilany, 2012).

Un altro aspetto rilevante è la difficoltà nel riconoscere equazioni o disequazioni impossibili. Invece di individuare da subito l'incongruenza, gli studenti tendono ad applicare procedure algoritmiche standard anche a forme come $|x - 4| < -2$ (Demetgul & Baki, 2020). Di fronte a somme di moduli, come $|x + 2| + |x + 6| = 0$, si riscontrano tentativi di risoluzione che portano a indicare $x = -2$ o $x = -6$ come soluzioni, senza comprendere che l'uguaglianza richiederebbe la validità simultanea di entrambe le condizioni (Gagatsis & Panaoura, 2014).

2.4.2 Riduzione a equazione e difficoltà legate ai connettivi logici

Come già esaminato precedentemente, anche con i valori assoluti emerge una mancata distinzione chiara tra i modelli risolutivi di equazioni e disequazioni, dovuta alla percezione che le seconde siano semplici varianti delle prime (Almog & Ilany, 2012). Questo porta a trattare le disuguaglianze ignorando il segno di relazione, come nel caso

di $|x - 2| < 1$ che viene risolta tramite l'equazione associata per poi fornire risposte errate come $x < 3$ o $x > 1$ (Almog & Ilany, 2012). In questi casi, come evidenziato da Tall e Vinner (1981), l'allievo richiama alla mente una *concept image* puramente procedurale che oscura la definizione formale e il significato di distanza sulla retta.

Un'ulteriore criticità specifica che emerge trattando le disequazioni con valore assoluto riguarda la profonda incomprensione dei connettivi logici di disgiunzione (“o”) e di congiunzione (“e”). Lo studio di Almog e Ilany (2012) evidenzia come molti studenti non padroneggino i concetti di intersezione e unione, compiendo errori strutturali nella stesura della soluzione. Ad esempio, nella risoluzione di $|x| > 3$, gli allievi spesso affiancano i risultati “ $x < -3, x > 3$ ” omettendo qualsiasi connettivo logico, oppure inseriscono il connettivo “o” ma tentano poi di calcolare un'intersezione, non trovando punti in comune. Al contrario, nella disequazione $|x - 2| < 1$, molti risolvono correttamente l'equazione associata sbagliando tuttavia il connettivo, scrivendo $x < 3 \vee x > 1$; questo li porta ad accettare erroneamente qualsiasi numero reale come soluzione valida. Un comportamento analogo che portava alla luce confusione tra i concetti di intersezione e unione era stato anche evidenziato nello studio delle difficoltà inerenti alle disequazioni (Tsamir et al., 2004).

Infine, gioca un ruolo determinante quella che in letteratura viene definita “l'influenza della struttura” (Almog & Ilany, 2012, p.361): gli studenti assumono intuitivamente che la struttura finale della soluzione debba rispecchiare visivamente la struttura della disequazione di partenza. Questa regola intuitiva fa sì che gli allievi si aspettino di ritrovare lo stesso segno di disuguaglianza nella risposta finale: ad esempio, deducono frettolosamente che la soluzione di $|x| > 3$ sia esclusivamente $x > 3$, omettendo la parte negativa perché guidati dall'aspetto visivo del simbolo “maggiore”.

2.5 Origine degli errori: un'interpretazione alla luce della letteratura didattica

L'analisi complessiva degli ostacoli incontrati dagli studenti evidenzia come le difficoltà riscontrate con le disequazioni e con il valore assoluto non siano fenomeni isolati, ma condividano le stesse radici. Come sottolineato dagli studi condotti da Mutodi et al. (2023) e Papadouris et al. (2024), l'origine del fallimento risiede in un'istruzione che privilegia l'acquisizione di abilità procedurali, come la memorizzazione di algoritmi

e regole, a discapito di una reale comprensione concettuale e semantica (Skemp, 1976). Questo approccio porta gli allievi a percepire la matematica come un insieme di protocolli privi di significato, dove l'obiettivo principale non è comprendere la relazione tra gli oggetti matematici, ma applicare correttamente una procedura per ottenere un risultato (Mutodi et al., 2023).

Dal punto di vista cognitivo, questo limite si manifesta nell'incapacità di compiere la transizione dalla fase "operativa" a quella "strutturale". Infatti, secondo la teoria di Sfard (1991), gli studenti rimangono bloccati in un pensiero orientato al processo: nel nostro studio, infatti, si è mostrato che essi vedono la disequazione o il modulo solo come un'operazione da compiere in un certo numero di passi e non come un oggetto matematico con determinate proprietà. Tale rigidità è alimentata dalle clausole del "contratto didattico" (D'Amore, 1999), per cui lo studente, nel tentativo di rispondere alle aspettative del docente, si sente obbligato a utilizzare modelli risolutivi già noti (come quelli delle equazioni), anche quando sono chiaramente inadeguati al contesto delle disuguaglianze o del valore assoluto. Un'altra dimostrazione di questa dinamica si riscontra quando un problema viene risolto con numerosi calcoli e procedure, anche quando essi non sarebbero necessari.

A ciò si aggiunge la difficoltà nel coordinare diversi registri di rappresentazione semiotica. Duval (1993) evidenzia come la reale comprensione avvenga solo quando lo studente è in grado di passare dal registro algebrico a quello grafico; tuttavia, la didattica tradizionale tende a isolare il calcolo simbolico, rendendo il valore assoluto e le disequazioni inaccessibili dal punto di vista concettuale. Ciò impedisce agli studenti di integrare la visione algebrica con quella geometrica di distanza, causando quel blocco cognitivo che Tall e Vinner (1981) descrivono come la discrepanza tra la *concept image*, cioè l'idea costruita nella mente dello studente, e la *concept definition* (la definizione rigorosa). Ad esempio, di fronte all'espressione $|-x|$ l'immagine mentale dello studente suggerisce che il modulo agisca come una semplice operazione che cancella il segno "meno" visibile, portandolo a scrivere d'istinto $|-x| = x$; tuttavia, questa intuizione procedurale entra in pieno conflitto con la definizione formale non appena si realizza che la variabile x potrebbe rappresentare un numero negativo, rendendo il risultato chiaramente errato.

Questa tendenza a favorire un approccio procedurale e meccanico trova conferma nelle ricerche focalizzate sul contesto scolastico italiano. Malara (2012) evidenzia come l'insegnamento tradizionale sia spesso legato a un approccio all'algebra "puramente sintattico e cieco in sé" (Malara, 2012, p.52), in cui la pratica in classe si concentra quasi esclusivamente sull'allenamento al calcolo letterale e sulla manipolazione di simboli. In questo modo si finisce per trascurare il significato delle formule e si ostacola la "messa in formula" (Malara, 2012, p.52), ossia la capacità di tradurre una situazione in linguaggio matematico. Questa abitudine a imparare solo regole meccaniche emerge in modo evidente proprio nello studio delle disequazioni. Analizzando le strategie degli allievi italiani, Tsamir e Bazzini (2002) hanno notato un utilizzo costante di rigidi modelli algoritmici. Gli studenti, infatti, tendono a risolvere le disequazioni riproducendo in automatico gli stessi passaggi imparati per le equazioni. Così facendo si trovano in difficoltà non appena l'esercizio richiede un vero ragionamento logico, come per l'analisi del segno in una disequazione di grado superiore al primo o in una fratta.

Questa situazione appare particolarmente critica se confrontata con le Indicazioni Nazionali (MIUR, 2010a) analizzate in precedenza. Sebbene le linee guida ministeriali promuovano un approccio funzionale e l'uso della modellizzazione per dare significato all'algebra, la realtà scolastica sembra ancorata a una visione meccanica. Come osservato da Garuti et al. (2001), gli studenti avrebbero in realtà le capacità cognitive per comprendere appieno concetti complessi come le disequazioni, se guidati a interpretarle come relazioni logiche o grafiche tra grandezze. Tuttavia, questo potenziale viene soffocato da un approccio didattico che frammenta l'argomento in una rigida classificazione di casi particolari: anziché promuovere una visione unitaria, si finisce per insegnare una regola meccanica diversa per ogni singola tipologia di esercizio (disequazioni lineari, fratte, con modulo), impedendo agli allievi di cogliere il senso globale di ciò che stanno facendo.

Il divario tra come la matematica dovrebbe essere insegnata secondo le Indicazioni e come viene effettivamente recepita evidenzia la necessità di un cambio di paradigma: i libri di testo e la pratica d'aula dovrebbero favorire un approccio basato sul significato degli oggetti matematici affrontati (Garuti et al., 2012).

Possiamo concludere questa analisi evidenziando che intervenire proponendo un numero maggiore e variegato di esercizi assegnati non è sufficiente per evitare gli errori

osservati. Come si vedrà in seguito, è necessario agire in profondità sulle false credenze createsi nel tempo, portando alla luce e destrutturando i meccanismi procedurali fossilizzati nella mente di ogni studente. L'errore non deve essere visto come un fallimento, ma come il punto di partenza per una ricostruzione concettuale che permetta allo studente di giungere ad una consapevole e matura padronanza concettuale.

Capitolo 3

Metodologia della ricerca

3.1 Obiettivi e disegno della ricerca

L'indagine empirica presentata in questo lavoro di tesi nasce in continuità con la trattazione teorica affrontata nel secondo capitolo. L'obiettivo principale dello studio è quello di verificare se gli ostacoli cognitivi, le rigidità procedurali e le false credenze ampiamente documentati dalla letteratura didattica per gli studenti della scuola secondaria di secondo grado permangano anche a livello universitario. In particolare, la ricerca mira a indagare se e in quale misura queste criticità riemergano tra le matricole, trasformandosi in un effettivo scoglio per il superamento degli esami di matematica di base.

Spesso, infatti, argomenti come le disequazioni e il valore assoluto vengono considerati dei prerequisiti consolidati all'ingresso dell'università; in realtà si mostrerà come l'acquisizione profonda di queste competenze venga spesso ostacolata dall'applicazione di automatismi e regole mnemoniche anche da parte di studenti che hanno scelto un percorso di studi scientifico.

L'impostazione metodologica di questo studio è stata guidata dalla natura del materiale a disposizione. La ricerca si basa infatti sull'analisi di prove d'esame reali e già svolte in passato, che non sono state strutturate appositamente per questa indagine. Lavorare su un corpus di dati preesistente ha reso naturale l'adozione di un disegno di ricerca misto, che combina l'approccio qualitativo e quello quantitativo.

La componente qualitativa è stata necessaria per una comprensione profonda dei dati raccolti. Come si è visto nel primo capitolo, infatti, in didattica della matematica l'errore non viene considerato una semplice distrazione o una mancanza da penalizzare, ma il segnale di un ragionamento ben preciso, anche se basato su un'idea di partenza sbagliata. L'analisi qualitativa permette quindi di andare oltre, concentrandosi sul modo in cui lo studente ha costruito la sua risposta e sulle possibili motivazioni degli sbagli commessi. Attraverso una lettura attenta dei passaggi scritti di un esercizio, è possibile tentare di ricostruire la logica seguita dal ragazzo e ipotizzare le origini dell'errore che è stato osservato.

A questa prima fase segue un'analisi di tipo quantitativo, essenziale per dare solidità scientifica ai risultati emersi. Una volta isolate e categorizzate le diverse tipologie di errore attraverso una griglia standardizzata, la componente quantitativa permette di misurare l'incidenza e la frequenza di ciascuna criticità all'interno del campione analizzato. Questo duplice approccio consente di ipotizzare le motivazioni per cui gli studenti sbagliano, sulla base dello studio della letteratura scientifica, ma anche di stabilire su larga scala quali siano gli errori più diffusi e radicati, offrendo una base di dati oggettiva per future riflessioni didattiche e interventi di recupero mirati.

Prima di procedere, è necessario chiarire una precisazione sulla natura di questo studio. Come ampiamente documentato da Rosetta Zan nel suo testo "Difficoltà in matematica" (Zan, 2007), l'atto di correggere e interpretare un errore non è mai un'operazione del tutto neutra o oggettiva. Ogni insegnante o ricercatore, infatti, tende a interpretare lo stesso errore in modo differente, attribuendogli una gravità maggiore o minore e legandolo a cause e motivazioni diverse a seconda del proprio quadro di riferimento e della propria esperienza.

Di conseguenza, l'analisi che verrà presentata più avanti non ha la pretesa di essere una diagnosi assoluta, ma rappresenta una lettura interpretativa dalla letteratura didattica esaminata. Questo studio risulterebbe indubbiamente molto più preciso e affidabile se fosse stato possibile affiancare all'analisi degli scritti delle interviste mirate con gli studenti che hanno commesso quegli errori, l'unico strumento che consente di comprendere con certezza l'origine profonda di un comportamento osservato. Poiché la natura d'archivio del materiale a disposizione non ha permesso questo canale diretto, l'analisi si concentrerà sulla ricostruzione delle logiche scritte sui fogli, proponendo le spiegazioni e le cause che appaiono più plausibili.

3.2 Il contesto e la selezione del campione

L'indagine sul campo è stata condotta all'interno dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (UNIMORE), prendendo in esame le prove scritte del corso di Analisi Matematica I per il Corso di Laurea in Ingegneria del Veicolo, tenuto dalla Prof.ssa Michela Eleuteri. Il corpus complessivo dei dati raccolti è costituito da 238 compiti d'esame, svolti dagli studenti durante gli appelli ufficiali degli anni accademici passati.

Poiché un tipico esame scritto di Analisi Matematica I comprende tracce articolate, che spaziano dal calcolo differenziale a quello integrale avanzato, per questa ricerca è stato necessario effettuare un lavoro di selezione mirato. L'analisi non ha riguardato l'intera prova d'esame, ma si è concentrata esclusivamente su specifici esercizi, come la determinazione del dominio di una funzione, lo studio del segno o la risoluzione di disequazioni. Questi quesiti, infatti, sono proprio quelli che richiedono di operare con disequazioni e valori assoluti. Inoltre, questa scelta deriva dal fatto che la risoluzione di tali richieste prevedeva unicamente il possesso dei prerequisiti della scuola secondaria di secondo grado. In questo modo, dalle possibili cause degli errori osservati, è stata esclusa l'ipotesi di influenza di concetti universitari più complessi.

Oltre alla selezione delle specifiche tracce d'esame, un secondo livello di scrematura ha riguardato i criteri di inclusione e di esclusione degli stessi elaborati. Al fine di ottimizzare la raccolta dei dati, si è scelto di adottare un campionamento ragionato, basato sull'esito finale conseguito dagli studenti. Nello specifico, i 238 compiti analizzati sono frutto di una precisa selezione effettuata su centinaia di prove da cui sono stati interamente esclusi i pacchi di esami caratterizzati da una concentrazione quasi esclusiva di votazioni eccellenti, come i 30/30 o i 30 e lode. Questa scelta si è resa necessaria in quanto una popolazione composta quasi unicamente da studenti eccellenti avrebbe mostrato una bassissima incidenza di errori, rendendo l'attività di monitoraggio e tabulazione di fatto inefficace rispetto agli scopi dichiarati della ricerca.

L'attenzione si è focalizzata, dunque, su quelle sessioni d'esame che presentavano una distribuzione di voti più eterogenea, caratterizzata da esiti misti, dai più alti fino alle insufficienze. Concentrare lo studio su questo secondo tipo di campioni ha permesso di far emergere in modo spontaneo e diffuso le reali criticità concettuali delle matricole. È proprio in questa fascia di elaborati, quindi, è stato possibile osservare con chiarezza le effettive difficoltà di transizione tra la scuola superiore e l'università.

3.3 Strumento di codifica: la griglia di classificazione degli errori

Per poter esaminare in modo oggettivo e sistematico un corpus così ampio di elaborati scritti, è necessario definire uno strumento di misura standardizzato. La sola correzione dei compiti, infatti, non sarebbe stata sufficiente per mappare le reali difficoltà

degli studenti. Occorreva infatti un sistema che permettesse di catalogare ogni singolo errore sotto una categoria concettuale ben definita. A questo scopo è stata sviluppata una griglia di codifica, la cui costruzione ha unito le fondamenta teoriche della letteratura didattica alle evidenze empiriche riscontrate durante l'analisi delle prove d'esame. Dal punto di vista operativo, l'applicazione di questa griglia sui 238 compiti d'esame è avvenuta in due momenti distinti, separando la fase di indagine da quella di misurazione.

In una prima fase, sono state scelte 50 prove d'esame dalle quali sono state individuate le diverse tipologie di errori sistematici, i bias e gli ostacoli algebrici già ampiamente noti e documentati in letteratura. A partire da questi è stata costruita la griglia di codifica. L'obiettivo principale è stato quello di verificare se le categorie estratte dalla letteratura fossero adatte a descrivere i comportamenti degli studenti universitari. In seguito, una volta conclusa questa mappatura, le 50 prove iniziali sono state isolate e messe da parte in modo da non influenzare la successiva statistica.

La vera e propria analisi quantitativa si è sviluppata basandosi sui 188 elaborati rimanenti, su cui è stato effettuato il conteggio vero e proprio delle frequenze, registrando quante volte ogni singolo errore prototipico si ripresentasse all'interno dei testi. In questa fase, la griglia è stata progressivamente integrata e perfezionata. Questo ha permesso di includere comportamenti inattesi o sfumature d'errore specifiche che non erano esplicitamente dettagliate nei modelli teorici di partenza e di evitare sovrapposizioni tra la fase di costruzione dello strumento e quella di conteggio.

Ogni elaborato esaminato conteneva esattamente un quesito costituito dalla risoluzione di una disequazione o da uno studio di funzione. Pertanto, il conteggio è stato effettuato su un totale di 188 quesiti che corrisponde esattamente al numero delle prove d'esame. Inoltre, alcuni esercizi sono stati catalogati in più di una tipologia di errore, poiché contenenti testimonianze di ostacoli cognitivi differenti.

A partire dal quadro teorico analizzato nel Capitolo 2, la griglia di classificazione associa a ciascun errore prototipico un codice identificativo, una breve descrizione del fenomeno e un esempio matematico esplicativo, accompagnati dai relativi riferimenti bibliografici. Questa strutturazione permette di trasformare l'analisi qualitativa dei singoli passaggi algebrici in dati discreti, ponendo le basi per la successiva quantificazione e tabulazione delle frequenze.

Di seguito viene presentata la griglia utilizzata come riferimento per l'intera attività di codifica. Essa costituisce la base per l'analisi dei dati che verrà effettuata nel capitolo successivo. Nella colonna di sinistra è stato scelto un codice identificativo per ciascun errore studiato nella letteratura. I codici verranno ripresi in seguito per riferirsi a ciascun preciso ostacolo esaminato.

Tabella 3.1: Ostacoli riguardanti la risoluzione delle disequazioni

Codice errore	Descrizione	Esempi presi dalla letteratura	Riferimenti bibliografici
EA1	Ostacolo legato alla risoluzione dell'equazione associata: interpretazione dei "valori critici" trovati come le soluzioni effettive della disequazione	$(5x - 1)(x - 4) > 0$ soluzioni: $x = \frac{1}{5}, x = 4$	Mutodi et al., 2023
EA2	Ostacolo legato alla risoluzione dell'equazione associata: combinazione dei "valori critici" trovati in modo casuale, ottenendo scritture prive di significato	$(5x - 1)(x - 4) > 0$ soluzioni: $\frac{1}{5} > x > 4$	Mutodi et al., 2023
CR1	Ostacolo legato alla mancata comprensione della richiesta: si crede che risolvere una disequazione significhi individuare il numero più piccolo tra i "valori critici" calcolati	$\frac{x - 3}{x^2 - 8x - 20} > 0$ soluzione: $x = -2$ ovvero la minore tra $x = 3, x = 10$ e $x = -2$	Mutodi et al., 2023
ED1	Errore di distacco (proprietà valida in un altro contesto viene applicata meccanicamente senza comprenderne il significato): moltiplicazione di entrambi i membri di una disequazione per una variabile senza preoccuparsi del suo segno	$x - \frac{2}{x} > 5$ diventa $x^2 - 2 > 5x$ moltiplicando entrambi i membri per x	Mutodi et al., 2023

ED2	Errore di distacco (proprietà valida in un altro contesto viene applicata meccanicamente senza comprenderne il significato): non viene studiato il segno del denominatore di una frazione algebrica, “eliminandolo” come in un’equazione	$\frac{x-3}{x^2-8x-20} > 0$ diventa $x-3 > 0$	Mutodi et al., 2023
ISD1	Ostacolo legato all’inversione del segno di disuguaglianza: credenza che lo spostamento di un termine negativo comporti l’inversione del segno di disuguaglianza	$5x-1 > 0$ diventa $5x < 1$	Mutodi et al., 2023
ISD2	Ostacolo legato all’inversione del segno di disuguaglianza: dividere o moltiplicare per un numero negativo entrambi i membri della disequazione senza invertire il segno	$-5x > 1$ diventa $5x > -1$	Mutodi et al., 2023
SA1	Ostacolo legato all’individuazione di “soluzioni anomale”: non si accetta che il risultato di una disequazione possa essere un singolo valore numerico	rifiuto di $x = 0$ come soluzione di $5x^4 \leq 0$	Tsamir & Bazzini, 2001
AP1	Ostacolo legato all’estensione della legge di annullamento del prodotto: di fronte ad un prodotto maggiore di zero si pongono entrambi i fattori maggiori di zero, senza fornire tra essi connessione logica di congiunzione o disgiunzione	$(x-2)(x+5) \geq 0$ diventa $x-2 \geq 0, x+5 \geq 0$	Tsamir et al., 2004
SG1	Ostacolo legato alla risoluzione di disequazioni di secondo grado: vengono determinate correttamente le due radici ma esse vengono unite con scritture prive di significato	$x^2 > 9$ soluzione: $x > \pm 3$	Almog & Ilany, 2012

SG2	Ostacolo legato alla risoluzione di disequazioni di secondo grado: viene determinata solo la radice positiva, ignorando l'intervallo negativo	$x^2 > 9$ soluzione: $x > 3$	Almog & Ilany, 2012
-----	---	---------------------------------	---------------------

Tabella 3.2: Ostacoli riguardanti il valore assoluto

DN1	Ostacoli nel dominio numerico: la notazione del valore assoluto viene confusa con le normali parentesi	$ -3 - 6 + 7 - 5 $ diventa: $(-9) + 2$	Papadouris et al., 2024
DN2	Ostacoli nel dominio numerico: vengono eseguite le operazioni tra numeri senza considerare il valore assoluto, e solo alla fine il risultato viene trasformato in positivo	$ 7 + -9 $ diventa $7 - 9 = -2$ soluzione: 2	Papadouris et al., 2024
BN1	Bias dei numeri naturali: il valore assoluto di una variabile (di cui non si conosce il segno) viene trattato come si tratta il valore assoluto di un numero naturale	$ -x = x$	Chiarugi et al., 1990
RT1	Ostacolo legato ad una risoluzione per tentativi: si sostituisce la variabile con alcuni valori numerici e se l'uguaglianza è valida per questi valori, allora si crede sia sempre valida	$ x - 1 = x - 1$	Chiarugi et al., 1990
OS1	Ostacolo legato all'interpretazione del valore assoluto come procedura meccanica che "omette il segno" di una certa quantità: caso del dominio numerico	$ 2 - \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$	Elia et al., 2016

OS2	Ostacolo legato all'interpretazione del valore assoluto come procedura meccanica che "omette il segno" di una certa quantità: caso di un'espressione algebrica	$ 2x - 3 = 2x + 3$	Demetgul & Baki, 2020
FVA1	Ostacolo legato alla comprensione della funzione valore assoluto: si crede che questa funzione possa assumere contemporaneamente due valori, uno positivo e uno negativo	$ x = \pm x$	Gagatsis & Panaoura, 2014
FVA2	Ostacolo legato alla comprensione della funzione valore assoluto: confusione tra il dominio e il codominio della funzione scambiando la positività della funzione con la positività dei valori del dominio	grafico della funzione valore assoluto limitato solo al primo quadrante	Chiarugi et al., 1990
FVA3	Ostacolo legato alla comprensione della funzione valore assoluto: confusione tra il dominio e il codominio della funzione scambiando la positività della funzione con la positività dei valori del dominio. Caso della risoluzione di un'equazione	$ x + 3 = 2$ diventa $x + 3 = 2$ omettendo la seconda soluzione $x + 3 = -2$	Almog & Ilany, 2012
FVA4	Ostacolo legato alla comprensione della funzione valore assoluto: confusione tra il dominio e il codominio della funzione scambiando la positività della funzione con la positività dei valori del dominio. Caso delle disequazioni	$ x - 2 < 3$ diventa $x - 2 < 3$ omettendo la seconda soluzione $-3 < x - 2$	Almog & Ilany, 2012
RDI1	Ostacolo legato al riconoscimento dei casi impossibili: vengono applicate procedure algoritmiche anche alle disequazioni che risultano impossibili già dal primo passaggio	$ x - 4 < -2$ viene risolta come una qualunque altra disequazione con valore assoluto	Demetgul & Baki, 2020

EA3	Ostacolo legato alla risoluzione dell'equazione associata: vengono trovati correttamente i "valori critici" ma vengono poi combinati nella soluzione in modo arbitrario	$ x - 2 < 1$ vengono individuati i valori 1 e 3 e combinati arbitrariamente, come " $x < 3$ o $x > 1$ "	Almog & Ilany, 2012
CL1	Ostacolo legato all'utilizzo dei connettivi logici: essi vengono omessi o viene scambiata l'unione con l'intersezione degli intervalli che costituiscono le soluzioni	$ x > 3$ soluzione: $x < -3, x > 3$ oppure: $x < -3 \wedge x > 3$	Almog & Ilany, 2012
IS1	Ostacolo legato all' "influenza della struttura": si ritiene che la struttura finale della soluzione debba rispecchiare visivamente la struttura della disequazione di partenza	$ x > 3$ soluzione: $x > 3$	Almog & Ilany, 2012

Capitolo 4

Analisi dei dati e discussione dei risultati

Il presente capitolo è dedicato all'esposizione, all'analisi e alla discussione dei risultati emersi dall'indagine empirica condotta sugli elaborati scritti di Analisi Matematica I degli studenti del Corso di Laurea in Ingegneria del Veicolo dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia. In accordo con l'impostazione metodologica delineata nel capitolo precedente, l'obiettivo principale di questa sezione è mostrare in quale misura le difficoltà evidenziate dallo studio della letteratura scientifica nella scuola secondaria persistano anche tra le matricole universitarie, trasformandosi in reali ostacoli per il superamento degli esami di base. Come già anticipato, l'analisi ha riguardato l'intero corpus dei compiti, ma con finalità diverse: un primo blocco di 50 prove è stato isolato per lo studio esplorativo e la messa a punto della griglia, mentre le restanti 188 prove sono state utilizzate per il conteggio statistico vero e proprio.

In una prima analisi, verrà presentata una panoramica quantitativa attraverso la tabulazione delle frequenze dei vari errori riscontrati nelle 188 prove del conteggio. Questa sezione permetterà di misurare numericamente la diffusione di ciascuna criticità, evidenziando quali ostacoli si rivelino statisticamente più resistenti e diffusi all'interno del campione complessivo.

In una seconda parte, l'attenzione si sposterà sull'analisi qualitativa dei singoli elaborati. Verranno commentate le difficoltà incontrate direttamente nelle prove scritte degli studenti, cercando di interpretare i processi risolutivi e l'origine di tali ostacoli. L'obiettivo non sarà semplicemente quello di catalogare le risposte errate, ma di portare alla luce anche interpretazioni delle loro possibili origini, legate ad esempio all'applicazione di un approccio puramente procedurale. Per rendere questa analisi concreta e trasparente, ogni commento verrà supportato dalle immagini dei passaggi più significativi estratti dai compiti reali.

Verranno infine presentate alcune criticità nuove, emerse spontaneamente durante la correzione ma non esplicitamente codificate all'interno dei modelli teorici della letteratura di riferimento.

4.1 Analisi quantitativa e diffusione degli errori

L'indagine quantitativa condotta sui 188 elaborati ha permesso di misurare l'incidenza delle singole tipologie di errore all'interno del campione. La seguente tabella riassume le frequenze assolute e relative per ciascun codice della griglia, offrendo una mappatura numerica oggettiva degli ostacoli riscontrati prima di procedere con l'analisi qualitativa dei singoli casi. La frequenza relativa è stata calcolata rispetto al totale dei 188 elaborati, che corrisponde al numero dei quesiti esaminati poiché in ogni prova era presente solo un esercizio riguardante disequazioni o studi di funzione. Inoltre, alcuni esercizi sono stati conteggiati in più di una tipologia di errore poiché contenenti ostacoli diversi tra loro.

Tabella 4.1: Frequenza assoluta e relativa dei dati analizzati

Codice errore	Breve descrizione	Frequenza assoluta	Frequenza relativa
RDI1	Mancato riconoscimento dei casi impossibili di una disequazione	11	5,9%
AP1	Legge di annullamento del prodotto estesa alle disequazioni	10	5,3%
SG2	Disequazioni di secondo grado: esclusione della radice negativa	10	5,3%
SG1	Disequazioni di secondo grado: soluzioni prive di significato	5	2,7%
FVA2	Confusione tra dominio e codominio del valore assoluto	5	2,7%
FVA4	Disequazioni: confusione tra dominio e codominio del valore assoluto	5	2,7%
ED2	Eliminazione del denominatore in una disequazione fratta	4	2,1%

BN1	Bias dei numeri naturali nel valore assoluto	4	2,1%
EA2	Combinazione casuale dei “valori critici” in una disequazione	3	1,6%
EA1	“Valori critici” assunti come soluzioni effettive della disequazione	2	1,0%
ED1	Moltiplicazione per una variabile dei membri di una disequazione	2	1,0%
OS2	Valore assoluto come procedura che “omette il segno” di una variabile	2	1,0%
FVA1	La funzione modulo assume due valori contemporaneamente	1	0,5%
EA3	Combinazione casuale dei “valori critici” in una disequazione con modulo	1	0,5%
CR1	Individuazione del “valore critico” minore	0	0,00%
ISD1	Inversione del segno di disuguaglianza per ogni quantità negativa	0	0,00%
ISD2	Mancata inversione del segno di disuguaglianza	0	0,00%
SA1	Rifiuto di un singolo valore come soluzione di una disequazione	0	0,00%
DN1	Valore assoluto di un numero confuso con parentesi	0	0,00%
DN2	Somma di valori assoluti tra numeri scambiata per il modulo della somma	0	0,00%

RT1	Risoluzione di un valore assoluto per tentativi	0	0,00%
OS1	Valore assoluto come procedura che “omette il segno” ad un numero	0	0,00%
FVA3	Equazioni: confusione tra dominio e codominio del valore assoluto	0	0,00%
CL1	Confusione tra connettivi logici nelle disequazioni con valore assoluto	0	0,00%
IS1	Influenza della struttura del valore assoluto	0	0,00%

Dall’analisi complessiva dei dati emergenti dalla Tabella 4.1 è possibile sviluppare una duplice riflessione: la prima legata alla forte persistenza di specifiche categorie d’errore e la seconda riguardante la totale assenza di altre.

Prima di entrare nel merito di queste osservazioni, è fondamentale fare una precisazione sul valore statistico di questi dati. Sebbene alcune tipologie di errore registrino percentuali di comparsa numericamente basse, esse mantengono comunque una grandissima rilevanza dal punto di vista didattico. In un contesto universitario come quello esaminato, infatti, ci si aspetterebbe che la frequenza di certe criticità fosse pari a zero. Gli studenti di Ingegneria non solo provengono nella maggior parte dei casi da un percorso scolastico di stampo scientifico e hanno scelto un corso di studi tecnico, ma hanno anche già superato i test d’ingresso iniziali (OFA). Di conseguenza, il possesso dei prerequisiti fondamentali dell’algebra di base, che sono argomenti tipici del biennio della scuola secondaria, dovrebbe essere dato per scontato. Il fatto che queste lacune riemergano all’esame di Analisi Matematica I, anche se in una quota ridotta di elaborati, dimostra quanto certi errori siano profondi e resistenti nel tempo.

Per quanto riguarda i dati ad alta frequenza, si osserva che le maggiori difficoltà degli studenti si concentrano attorno a tre problematiche principali: l’estensione illecita delle regole delle equazioni alle disequazioni, la difficoltà nella comprensione profonda del valore assoluto e la mancanza di uno sguardo d’insieme sulla struttura dell’esercizio.

Una percentuale alta di errori deriva proprio dalla tendenza ad applicare alle disequazioni le stesse procedure valide per le equazioni. Questo automatismo si manifesta, ad esempio, nell'estensione errata della legge di annullamento del prodotto (5,3%) o nella moltiplicazione di entrambi i membri della disequazione per una variabile, ad esempio con lo scopo di "eliminare" il denominatore. L'abitudine a trattare i valori critici dell'equazione associata come se fossero soluzioni puntuali genera una forte confusione nell'uso dei connettivi logici e nella scrittura dell'intervallo delle soluzioni. Spesso, infatti, gli studenti arrivano a scrivere soluzioni finali matematicamente prive di significato senza rendersi conto dell'incongruenza, proprio perché tentano di applicare procedure in modo meccanico e non concettuale.

Un secondo blocco di errori molto frequente riguarda la comprensione della definizione di valore assoluto. I dati mostrano una diffusa confusione tra il dominio e il codominio del modulo: la tendenza è quella di scambiare la positività della funzione (il risultato del valore assoluto) con la positività del suo argomento. Si aggiunge a ciò il bias dei numeri naturali, che estende le regole del dominio numerico a quello algebrico.

Infine, un dato di grande rilievo didattico è l'alta percentuale di studenti che non riconosce i cosiddetti "casi impossibili" o le quantità sempre positive. Di fronte a espressioni che non ammettono soluzione, una quota significativa del campione non si ferma a osservare il significato dell'espressione algebrica scritta, ma tenta ugualmente di avviare calcoli lunghi e inutili, dimostrando in modo emblematico come la necessità di applicare un algoritmo mnemonico superi spesso la reale comprensione della richiesta.

Al contrario, la tabella mostra come diverse tipologie di errore descritte nella letteratura scientifica abbiano registrato una frequenza pari a zero o apparentemente minima. Questo fenomeno non necessariamente è frutto del superamento di quelle specifiche difficoltà, ma trova una possibile giustificazione nell'architettura delle prove d'esame analizzate. Molti degli errori catalogati a livello teorico riguardano infatti la risoluzione di equazioni o si riferiscono ad un dominio numerico invece che algebrico. Le prove di Analisi Matematica I esaminate, invece, non prevedevano quesiti diretti di questo tipo, ma richiedevano di risolvere disequazioni pure o riferite alla ricerca del dominio di una certa funzione. Di conseguenza, la struttura stessa delle tracce non ha offerto l'occasione pratica per far emergere certi specifici errori. La bassa o nulla

frequenza di questi codici non indica quindi un superamento definitivo delle difficoltà, ma piuttosto una selezione operata dal contesto della prova scritta.

Un ulteriore motivo per cui alcuni ostacoli non sono stati registrati riguarda la loro natura: alcuni di essi riguardano le motivazioni per cui uno studente è arrivato alla risposta sbagliata e non sempre esse emergono direttamente dalla sola lettura della prova scritta senza un dialogo con lo studente. Ad esempio, non è stato possibile registrare l'ostacolo RT1 che riguarda la risoluzione di un valore assoluto per tentativi di sostituzione numerica, poiché negli elaborati scritti non sono mai comparse scritture che testimoniassero esplicitamente tale comportamento. Ciò non toglie che qualche studente possa aver determinato una certa soluzione utilizzando proprio questa strategia, senza trascriverla sul foglio della prova. Questo aspetto conferma ulteriormente come l'evidenza dello scritto descriva solo una parte dei complessi processi cognitivi messi in atto dalle matricole, ponendo un limite alla pura indagine dell'archivio.

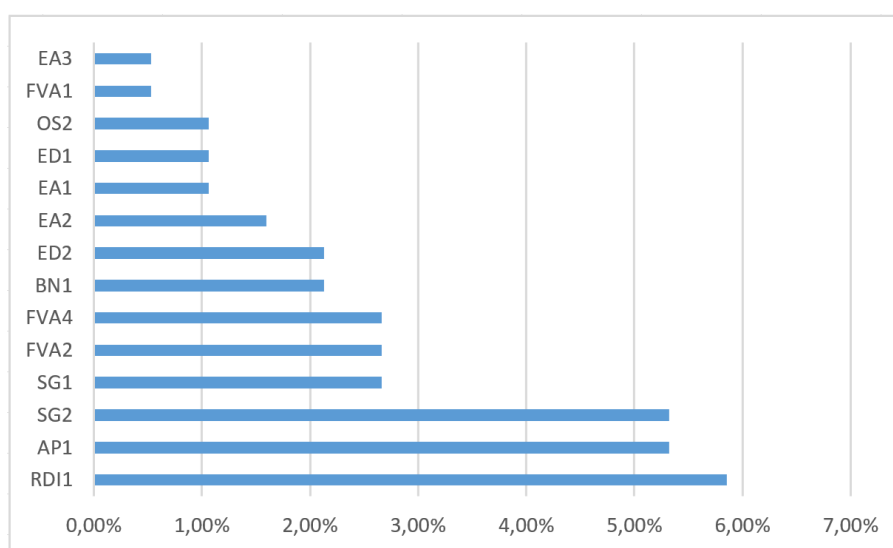


Figura 4.0: Frequenze relative (%) dei codici di errore legati a disequazioni e valore assoluto emersi dall'analisi degli elaborati (N=188).

4.2 Analisi qualitativa: interpretazione degli ostacoli legati a disequazioni e valore assoluto

Terminata la panoramica dei dati numerici, questa seconda parte del capitolo è dedicata all'analisi qualitativa degli elaborati scritti. L'obiettivo ora non è più quantificare gli errori, ma esaminare le strategie adottate dagli studenti, per provare a capire come hanno ragionato e perché sono arrivati all'errore finale.

Coerentemente con i dati emersi nella prima sezione, l'indagine prenderà in esame esclusivamente le tipologie di errore che si sono effettivamente verificate nel campione. Per rendere la lettura più fluida e ordinata, gli errori non verranno semplicemente elencati uno dopo l'altro, ma saranno raggruppati in alcune categorie tematiche, unendo tra loro i comportamenti che nascono dallo stesso tipo di fraintendimento concettuale.

A supporto delle considerazioni didattiche, verranno inserite nel testo le immagini di alcuni quesiti significativi. La loro analisi metterà in luce le criticità che ostacolano il ragionamento degli studenti e la comprensione profonda degli oggetti matematici.

4.2.1 L'influenza delle equazioni

Osservando gli elaborati, emerge chiaramente come molti degli errori commessi dagli studenti presentano un'origine comune: la tendenza a lasciarsi condizionare dalle regole apprese per le equazioni durante la risoluzione di una disequazione. Questo fenomeno nasce da automatismi consolidati negli anni passati: essendo abituati a lavorare principalmente con le uguaglianze, le matricole applicano in modo meccanico le stesse procedure anche in presenza di un simbolo di disuguaglianza, senza fermarsi a riflettere sul significato della richiesta.

Come si vedrà nei compiti riportati di seguito, questa forte influenza porta a perdere il controllo logico dell'esercizio. L'urgenza di applicare un calcolo noto (come la legge di annullamento del prodotto o la ricerca dei valori critici) fa sì che gli studenti si concentrino solo sulla procedura, arrivando a scrivere risposte incomplete o espressioni finali del tutto prive di significato.

Una prima espressione dell'ostacolo appena descritto è rappresentata dall'errore codificato come EA1. Questa difficoltà si manifesta quando lo studente si affida alla risoluzione dell'equazione associata per trovare i "valori critici", ma finisce per interpretarli come se fossero le soluzioni effettive della disuguaglianza, perdendo completamente di vista il concetto di intervallo.

Nonostante sia stato riscontrato con una bassa frequenza nelle prove d'esame, un esempio concreto di tale errore è la risoluzione della disequazione $(x - 2)(x + 3) \geq 0$ passando attraverso l'equazione associata $(x - 2)(x + 3) = 0$. Vengono determinate correttamente le radici $x = 2$ e $x = -3$ ma esse vengono erroneamente interpretate come soluzioni vere e proprie della disequazione.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

$(x+4)(x^2-4) \geq 0 \rightarrow x+4=0 \rightarrow x=-4$
 $\rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=2/x=-2$

Queste sono le soluzioni che soddisfano la ~~condizione~~ $\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} = 0$, mentre affinché sia soddisfatta la condizione > 0 , x deve essere positivo e non nullo $\rightarrow (0+4)(0^2-4) = -16$

$\frac{-16}{\sqrt{|0|+4}} = -8$ che non è ≥ 0 .
andatamente

Figura 4.1: Esempio di utilizzo errato dei “valori critici” trovati (codice EA1).

La Figura 4.1, in cui è richiesta la risoluzione di una disequazione fratta, mostra un esercizio che è stato catalogato tra i quesiti contenenti l’ostacolo di tipo EA1, nonostante la sua incompletezza lasci spazio ad interpretazioni diverse. Lo studente inizia lo svolgimento concentrandosi solo sul numeratore: imposta la ricerca dei valori che lo annullano risolvendo le relative equazioni associate $x + 4 = 0$ e $x^2 - 4 = 0$ e individuando correttamente i tre valori critici $x = -4$, $x = 2$ e $x = -2$. Tuttavia, a questo punto il processo risolutivo si interrompe: invece di utilizzare questi valori critici per suddividere la retta reale e compiere il consueto studio del segno (che gli avrebbe permesso di capire in quali intervalli il prodotto risulta positivo), lo studente interrompe il procedimento.

Nel suo commento scritto egli afferma: “Queste sono le soluzioni che soddisfano la condizione $\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} = 0$ ”. Lo studente riconosce quindi che i numeri trovati costituiscono le radici dell’equazione associata, ma, dalle righe successive, sembra sostenere che le soluzioni della disequazione siano da cercare esclusivamente tra quelle già trovate relative all’uguaglianza. Emerge infatti che, secondo lo studente, la frazione iniziale risulti positiva solo nel caso in cui la variabile x sia positiva e non nulla. Egli mostra infatti un calcolo che prova la negatività dell’espressione iniziale nel caso in cui

x sia pari a zero. Le affermazioni riportate nell'elaborato portano a pensare che lo studente, una volta individuati i tre valori critici $x = -4$, $x = 2$ e $x = -2$, seleziona tra essi solo quello positivo (cioè $x = 2$) come soluzione finale della disequazione, poiché valori negativi o nulli renderebbero secondo lui la frazione negativa. Tuttavia, non compare alcuna dichiarazione esplicita del risultato finale dell'esercizio, perciò l'ipotesi di puntualità della soluzione rimane non confermata.

Nel caso in cui questa spiegazione fosse corretta, si potrebbe affermare che questo esercizio esprime la presenza dell'ostacolo EA1: lo studente possiede la memoria procedurale necessaria per trovare le radici (l'automatismo tipico delle equazioni), ma tratta i valori critici come soluzioni puntuali anziché come estremi di un intervallo. In qualunque caso, anche se l'interpretazione effettuata non fosse esatta, l'esercizio mostra chiaramente la mancanza di comprensione del concetto strutturale di disequazione.

Un altro ostacolo molto frequente consiste nella credenza che risolvere una disequazione fratta sia equivalente a risolvere la disequazione riferita al solo numeratore. Questo ostacolo, codificato come ED2, si manifesta quando lo studente "elimina" in partenza il denominatore di una frazione algebrica. Tale comportamento è ancora una volta indice dell'applicazione di una regola meccanica che funziona per le equazioni e che viene estesa al caso delle disequazioni. La conferma esplicita dell'ostacolo ED2 emerge in modo inequivocabile dalla Figura 4.2, dove l'eliminazione del denominatore viene addirittura teorizzata e giustificata per iscritto dallo studente.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(|x|+3)(x^2-2)}{(x+4)} \leq 0$$

Una volta fatte le condizioni di esistenza posso moltiplicare ~~per~~ entrambi i membri per il denominatore e ottengo:

$$(|x|+3)(x^2-2) \leq 0$$

$|x|+3 \leq 0 \rightarrow x \leq -3$ NO

$x^2-2 \leq 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

grave!

C.E.
 $x+4 \neq 0 \rightarrow x \neq -4$

NO

-3 $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

$x \leq -3 \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Figura 4.2: Esempio di errore di distacco: non viene studiato il segno del denominatore di una frazione algebrica, "eliminandolo" come in un'equazione (codice ED2).

Osservando l'elaborato, si nota come lo studente dichiara apertamente la propria strategia risolutiva: *“Una volta fatte le condizioni di esistenza posso moltiplicare entrambi i membri per il denominatore”*. Dopo aver imposto correttamente la condizione $x \neq -4$, procede ad annullare il termine al denominatore, trasformando il problema nella disequazione intera $(|x| + 3)(x^2 - 2) \leq 0$.

Questa giustificazione scritta costituisce la prova evidente di come il secondo principio di equivalenza delle equazioni venga esteso in modo del tutto illecito. Per questo motivo tale ostacolo viene chiamato “errore di distacco” (Banerjee & Subramaniam, 2012, p.352). Lo studente riconosce la necessità di valutare il dominio della frazione, ma ignora completamente il fatto che il segno di una quantità incognita sia determinante per il mantenimento o l'inversione del verso della disuguaglianza. Riducendo la struttura fratta a un'espressione lineare, l'allievo applica una semplificazione algoritmica che svuota l'operazione del suo reale significato logico-matematico, compromettendo definitivamente lo studio globale del segno.

Una generalizzazione di questo ostacolo si ritrova nell'errore codificato come ED1, che si manifesta quando l'allievo moltiplica entrambi i membri di una disequazione per una quantità variabile al fine di eliminare i denominatori, omettendo qualsiasi riflessione preventiva sul segno di tale quantità.

Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \sqrt{x+2}$$

limitandosi a considerare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, segno della derivata prima, grafico qualitativo, evidenziando eventuali punti angolosi

$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \sqrt{x+2}$

$D: x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$
 $x \neq 0 \Rightarrow [-2, 0) \cup (0, +\infty)$

$\frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 1 < x$ (ma x < 0)

$-\frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 1 > x$

Figura 4.3: Esempio di errore di distacco: moltiplicazione per una variabile senza discussione del segno (Codice ED1).

La Figura 4.3 fornisce un chiaro riscontro di questa dinamica, osservata all'interno di uno studio di funzione. Lo studente, per esplicitare il valore assoluto, imposta correttamente lo studio del segno del suo argomento, distinguendone i casi di positività e

negatività. Tuttavia, nel risolvere queste disequazioni, impiega una regola valida solo per le equazioni, mostrando di non aver compreso a fondo la richiesta e di ricorrere dunque ad un approccio risolutivo puramente procedurale.

L'elaborato mostra, infatti, che lo studente passa dalla disequazione $1 - \frac{1}{x} > 0$ a $1 < x$, moltiplicando quindi entrambi i membri per la variabile x . In una disequazione, tuttavia, questa operazione richiede obbligatoriamente la distinzione di due casi: per il secondo principio di equivalenza, infatti, il verso della disuguaglianza si mantiene inalterato se si moltiplica per una quantità positiva, mentre viene invertito se si moltiplica per una quantità negativa. Ignorando l'impatto del segno, lo studente tratta la variabile x come una "quantità neutra" da spostare per semplificare visivamente il calcolo, mostrando un vero e proprio "distacco" procedurale dal significato logico dell'operazione. L'applicazione cieca di questo automatismo invalida l'intero processo risolutivo.

Per giunta, osservando attentamente il procedimento, ci si potrebbe chiedere perché lo studente dalla disequazione $\frac{x-1}{x} > 0$ scriva il passaggio intermedio $1 - \frac{1}{x} > 0$, prima di concludere che $1 < x$. Sembrerebbe, infatti, che egli ritenga un'operazione legittima quella di moltiplicare entrambi i membri per la variabile x nel secondo passaggio, ma non quella di "eliminare" direttamente il denominatore nel primo, arrivando alla disequazione $x - 1 > 0$. Questo comportamento porta a ipotizzare che, secondo lo studente, in una disequazione l'eliminazione del denominatore di una frazione e la moltiplicazione di entrambi i membri per una quantità di cui non si conosce il segno siano due operazioni distinte, quando invece esse derivano dalla stessa procedura.

Un'ulteriore dimostrazione della mancanza di comprensione logica è rappresentata dall'ostacolo EA2. Questo errore si verifica quando lo studente, dopo aver individuato i valori critici derivanti dall'equazione associata, li ricombina in modo puramente meccanico per costruire l'intervallo delle soluzioni, generando espressioni matematicamente prive di significato.

Un esempio di soluzione priva di significato è illustrato in Figura 4.4, nonostante esso non sia strettamente legato alla risoluzione dell'equazione associata ma più alla combinazione dei "valori critici" in modo errato. La matricola sembra comprendere che il numeratore si annulla per $x = 0$ e il denominatore per $x = 1$, ma ricombina questi due valori scrivendo l'intervallo delle soluzioni con i segni di disuguaglianza invertiti,

giungendo ad una scrittura priva di significato: infatti, non esiste alcun x che verifichi $0 \geq x \geq 1$. In aggiunta, sembra che anche in questo caso la comprensione del concetto di disequazione non sia molto solida: il grafico per lo studio dei segni assomiglia di più a quello che solitamente si utilizza per le soluzioni di un sistema e non è comunque chiaro come esso sia legato alla soluzione scritta a fianco. Infine, è possibile anche notare come lo studente scriva le condizioni di esistenza per la frazione, ma le ignori completamente includendo anche il valore $x = 1$ nella soluzione.

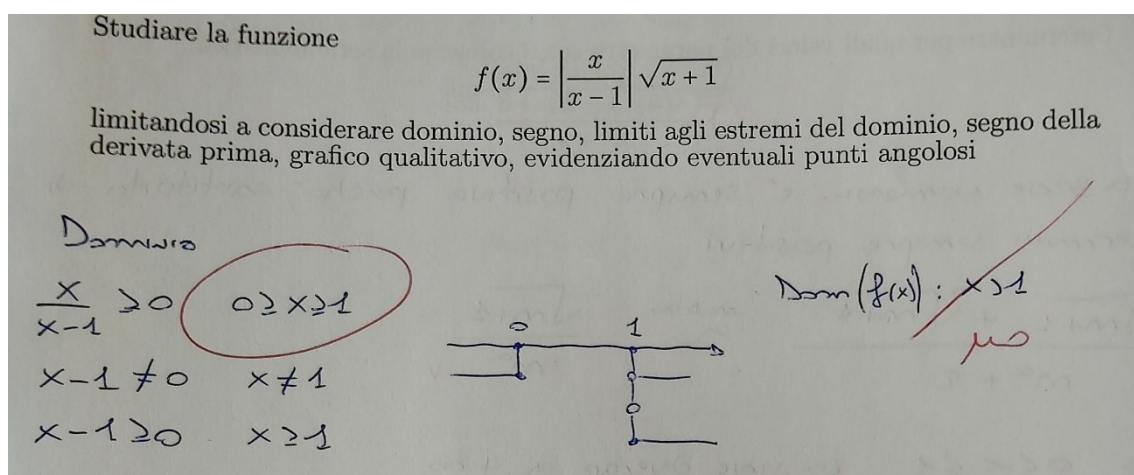


Figura 4.4: Esempio di soluzione finale priva di significato matematico (Codice EA2).

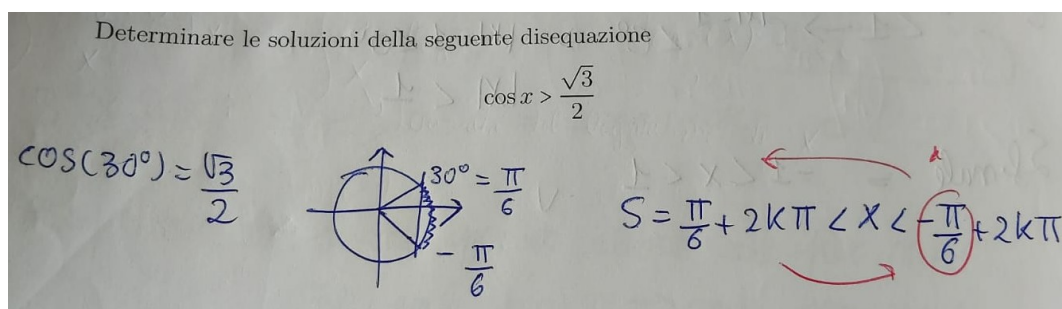


Figura 4.5: Esempio di soluzione finale priva di significato matematico (Codice EA2).

Un altro quesito in cui è possibile osservare l'ostacolo EA2 è quello illustrato in Figura 4.5. Chiamato a risolvere una disequazione goniometrica elementare, lo studente individua correttamente i valori critici dell'equazione associata e, come si evince dal grafico, comprende anche visivamente quale sia l'arco di circonferenza che soddisfa la condizione richiesta. Tuttavia, l'ostacolo si presenta al momento di formalizzare la soluzione in forma algebrica: l'allievo scrive $S = \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, combinando in modo arbitrario i valori numerici trovati. Questa catena di disuguaglianze

risulta priva di significato, in quanto posiziona come estremo inferiore dell'intervallo un valore numericamente maggiore rispetto all'estremo superiore. La combinazione dei valori numerici potrebbe anche non essere casuale, ma indice di una lettura in senso orario delle soluzioni lungo l'arco di circonferenza, senza considerare il valore effettivo degli angoli individuati.

Questo comportamento certifica l'errore EA2, mostrando come il simbolo di disuguaglianza perda il suo reale valore semantico e di ordinamento (che impone di leggere i valori dal più piccolo al più grande), venendo utilizzato come semplice connettore grafico. Lo studente si limita ad assemblare le radici trovate in precedenza all'interno di un modello sintattico noto (cioè la forma $A < x < B$), senza accorgersi della contraddizione logica generata.

Un ultimo ostacolo che riguarda l'influenza dei metodi propri delle equazioni sullo svolgimento delle disequazioni consiste nell'estensione illecita della legge di annullamento del prodotto, che costituisce uno degli errori a maggiore frequenza (5,3%). Di fronte a un prodotto algebrico maggiore (o minore) di zero, lo studente pone i singoli fattori maggiori (o minori) di zero, affiancandoli senza fornire tra essi alcuna connessione logica corretta, oppure inserendoli erroneamente all'interno di un sistema.

Questa criticità si accompagna ad una falsa credenza radicata negli studenti: la convinzione secondo cui, affinché un prodotto sia positivo, entrambi i fattori debbano necessariamente essere positivi, ignorando del tutto la regola dei segni per cui il prodotto di due quantità negative dà un risultato positivo. Convinzioni analoghe si riscontrano anche in relazione al prodotto negativo: alcuni studenti ritengono che, affinché un prodotto algebrico sia negativo, sia necessario porre entrambi i fattori minori di zero. A livello operativo, questo si traduce in una totale confusione tra lo studio del segno e l'intersezione delle soluzioni. Invece di valutare i fattori singolarmente per poi moltiplicarne i segni in un grafico riassuntivo, l'allievo imposta un sistema di disequazioni, trattando i connettivi logici di unione e intersezione in modo intercambiabile o casuale.

Un esempio lampante di questa dinamica era già visibile nella precedente Figura 4.2, in cui lo studente, per risolvere il prodotto $(|x| + 3)(x^2 - 2) \leq 0$, aveva impostato un sistema vincolando contemporaneamente entrambi i fattori a essere minori o uguali a

zero. Comportamenti simili si riscontrano in elaborati in cui le condizioni vengono semplicemente scritte in sequenza, unite da una virgola priva di significato logico.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(|x|+3)(x^2-2)}{(x+4)} \leq 0$$

C.E. $x+4 \neq 0 \rightarrow x \neq -4$
 $(|x|+3)(x^2-2) \leq 0$ ①
 $(x+4) \leq 0$ ②

① Si ha:

$$(|x|+3)(x^2-2) = \begin{cases} (x+3)(x^2-2), & x \geq 0 \\ (-x+3)(x^2-2), & x < 0 \end{cases}$$

Da cui risolviamo

$$\textcircled{A} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^3 - 2x + 3x^2 - 6 \leq 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \textcircled{B} \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x^3 + 2x + 3x^2 - 6 \leq 0 \end{array} \right.$$

① $x^3 - 2x + 3x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x + 3) \leq 0$
 Da cui $x \leq 2 \vee x \leq -2 \vee x \leq -3$

Figura 4.6: Esempio di ostacolo legato all'estensione della legge di annullamento del prodotto: soluzioni scritte in sequenza senza connessione logica (Codice API).

La Figura 4.6 fornisce un'ulteriore testimonianza di questo approccio disfunzionale. Nella risoluzione della disequazione indicata con la lettera "A", lo studente analizza i singoli fattori ma si limita a trascrivere le rispettive condizioni affiancandole l'una all'altra e separandole con il simbolo "V". Manca completamente il fondamentale studio del segno che permetterebbe di valutare il prodotto nella sua interezza e traspare poca chiarezza nell'utilizzo dei connettivi logici. Le soluzioni rimangono così frammentate e isolate, a conferma di come la disuguaglianza globale sia stata percepita come una serie di "esercizi" a sé stanti anziché come un'unica richiesta strutturale.

Questo ostacolo cognitivo, tuttavia, non si limita ai soli prodotti, ma si estende in modo speculare anche alla risoluzione delle disequazioni fratte, in cui la gestione di numeratore e denominatore subisce lo stesso identico fraintendimento. La Figura 4.7 ne costituisce una prova evidente.

Anche in questo caso lo studente evita lo studio generale della positività e sceglie di “assegnare” il segno di minoranza presente nel testo a tutti i singoli componenti della frazione. Impone, infatti, che il primo e il secondo fattore del numeratore siano minori o uguali a zero e che il denominatore sia strettamente negativo. A conferma di ciò, la figura mostra la costruzione di un grafico utilizzato solitamente per risolvere un sistema: lo studente crede che per ottenere una frazione negativa sia necessario imporre contemporaneamente la negatività a tutti i termini che la compongono, svuotando ancora una volta la procedura del suo reale significato matematico.

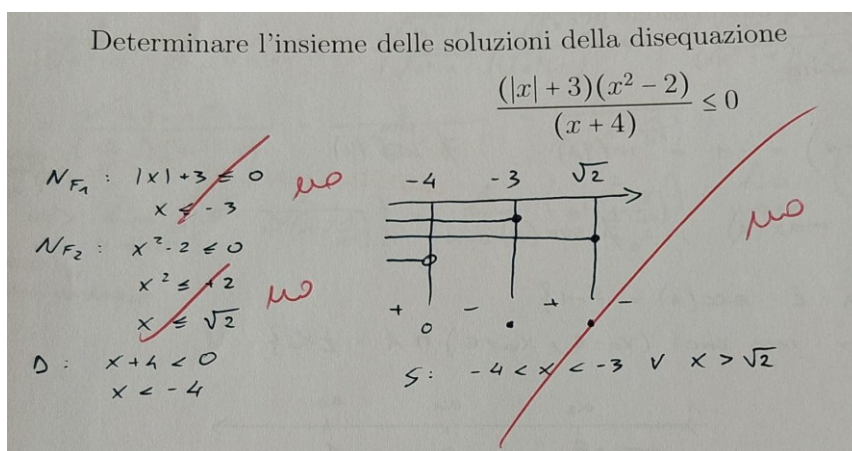


Figura 4.7: Estensione del segno di disuguaglianza a tutti i termini della frazione.

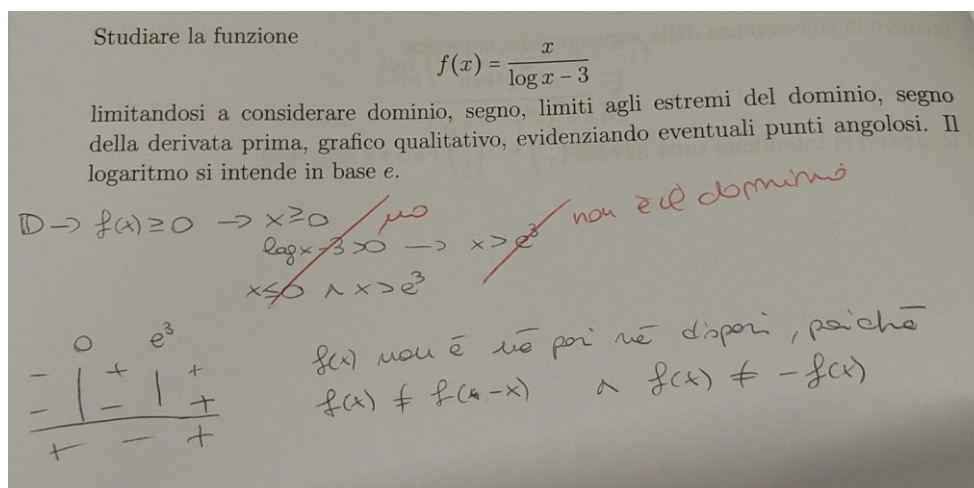


Figura 4.8: Confusione tra studio del segno e sistema in una disequazione fratta.

In modo analogo, la figura 4.8 mostra un'ulteriore prova, nel caso delle disequazioni fratte, della confusione tra studio della positività di numeratore e denominatore e convinzione che essi debbano essere entrambi positivi

contemporaneamente. Chiamato a studiare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x}{\log x - 3}$, lo studente crede erroneamente di dover imporre la frazione algebrica maggiore o uguale a zero. A questo punto, egli si ritrova a risolvere una disequazione fratta e pone semplicemente il numeratore maggiore o uguale a zero e il denominatore strettamente maggiore di zero. Queste due condizioni vengono intersecate tramite il connettivo logico “ $\wedge$ ”. L’allievo successivamente imposta correttamente la tabella per lo studio del segno globale, mostrando quindi incoerenza logica tra l’operatore “ $\wedge$ ” utilizzato e il procedimento scelto.

4.2.2 Criticità nella gestione delle disequazioni di grado superiore al primo

La seconda categoria di errori emersa dall’analisi qualitativa riguarda la risoluzione delle disequazioni di secondo grado. Gli ostacoli riguardanti questo argomento sono tra i più frequenti tra quelli rilevati dall’analisi quantitativa, corrispondono infatti nel complesso al 8% del campione. Come si osserverà nei prossimi esempi, in questo ambito le difficoltà delle matricole non derivano quasi mai da lacune nel calcolo algebrico, quanto piuttosto dall’incapacità di interpretare le radici trovate e di formalizzarle correttamente in intervalli logicamente corretti.

Un primo esempio di questa problematica è costituito dall’ostacolo codificato come SG1. Tale errore si presenta quando lo studente, nel risolvere una disequazione di secondo grado, individua correttamente i valori numerici delle radici dell’equazione associata, ma fallisce nella loro traduzione in intervalli, producendo scritture sintatticamente e matematicamente prive di significato.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

N: $(x+u)(x^2-u) \geq 0$

- $\cdot (x+u) \geq 0 \quad x \geq -u \quad ①$
- $\cdot (x^2-u) \geq 0 \quad x^2 \geq u \rightarrow x \geq u$ (crossed out)

	$-u$	-2	2
②	+	+	+
③	-	+	+
	-	-	+
	-	-	+
	-	+	+

Figura 4.9: Esempio di scrittura priva di significato nella risoluzione di una disequazione di secondo grado (Codice SG1).

Osservando lo svolgimento dello studio del segno del numeratore in Figura 4.9, si presti attenzione a come lo studente analizza la positività del secondo fattore. I passaggi algebrici iniziali sono corretti: il termine noto viene portato a secondo membro e l'allievo riconosce le due radici dell'equazione associata ($x = 2$ e $x = -2$). Tuttavia, invece di riflettere su quali intervalli con questi estremi rendono vera la disuguaglianza (intervalli “esterni”), si limita a estrarre la radice quadrata in modo puramente meccanico.

Il risultato è la scrittura $x \geq \pm 2$. Questa sintassi è priva di senso compiuto: non descrive alcun intervallo reale e dimostra come lo studente tratti il simbolo “ $\pm$ ” non come un'abbreviazione per due casi distinti, ma come un unico numero che possiede contemporaneamente due segni. Ancora una volta, la procedura risolutiva tipica delle equazioni ($x = \pm 2$) viene estesa acriticamente alla disequazione. Trattando la disuguaglianza come se fosse un'equazione, lo studente elude completamente il ragionamento geometrico (la parabola) o algebrico necessario per determinare in quali regioni del piano la quantità x^2 risulti effettivamente maggiore di 4.

Un secondo ostacolo strettamente legato alla gestione delle disequazioni di secondo grado è codificato come SG2. Esso si manifesta quando lo studente, giunto a una forma del tipo $x^2 > k$, esegue l'estrazione di radice isolando unicamente la soluzione positiva e ignorando del tutto l'esistenza dell'intervallo negativo.

La Figura 4.10 illustra chiaramente questa dinamica, anche se riferita ad una disequazione di quarto grado, in cui i procedimenti risultano comunque analoghi ad una qualunque disequazione di grado pari. Chiamato a studiare la positività del numeratore, lo studente sceglie di moltiplicare i due binomi (probabilmente in modo meccanico, senza accorgersi della positività di $x^2 + 1$), ottenendo $x^4 - 1 > 0$, da cui $x^4 > 1$. A questo punto, egli si limita a scrivere $x > 1$, senza considerare l'intervallo negativo. Questo risultato deriva da un approccio puramente procedurale legato al calcolo algebrico e superficiale: mancando del supporto grafico e concettuale (come il ricorso al disegno della parabola o alla simmetria delle potenze pari), l'allievo non percepisce la necessità di includere il ramo simmetrico $x < -1$. La disequazione viene così ridotta a un banale calcolo estrattivo incompleto.

In aggiunta, questo stesso elaborato offre l'opportunità di osservare la coesistenza di un'ulteriore difficoltà. Una volta ricavate (seppur parzialmente) le condizioni di positività per numeratore e denominatore, lo studente non procede con il consueto schema

dei segni necessario per valutare il quoziente. Al contrario, ricade nell'ostacolo AP1 precedentemente analizzato: traccia un grafico a linee continue considerando di fatto un'intersezione.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-3)} > 0$$

NUMERATORE

$$(x^2+1)(x^2-1) > 0$$

$$(x^2+1)(x^2-1) \rightarrow (x^4 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1) \rightarrow (x^4 - 1) > 0$$

$$x^4 > 1 \rightarrow x > \cancel{1} \text{ no}$$

DENOMINATORE

$$x-3 > 0 \rightarrow x > 3$$

SOLUZIONE = $x > 3$
 no, non si fa
 l'intersezione

Figura 4.10: Esempio di ostacolo inerente alle disequazioni di secondo grado: viene determinata solo la radice positiva, ignorando l'intervallo negativo (Codice SG2).

La presenza simultanea di questi due ostacoli nel medesimo compito conferma quanto la tendenza a operare per procedure mnemoniche, prive di una reale comprensione, possa compromettere pesantemente la capacità delle matricole di portare a termine un ragionamento matematico coerente.

4.2.3 Valore assoluto: bias cognitivi e interpretazioni meccaniche

L'analisi qualitativa procede concentrandosi sulle criticità relative alla gestione del valore assoluto. Come emerge dagli elaborati, le difficoltà in questo ambito derivano quasi sempre da un'interpretazione distorta dell'operatore modulo. In particolare, si osserverà come molti studenti tendano ad applicare alle espressioni algebriche incognite

le stesse regole elementari valide per i numeri naturali, oppure a interpretare il valore assoluto come un semplice comando meccanico che “cancella il segno”, svuotandolo così del suo reale significato analitico.

Un primo esempio inerente a questa problematica può essere ricondotto all’ostacolo codificato come BN1, ovvero il bias dei numeri naturali. Questo fenomeno si verifica quando il valore assoluto di una variabile incognita (di cui non si conosce a priori il segno) viene trattato con le stesse logiche elementari applicabili ai numeri in ambito aritmetico.

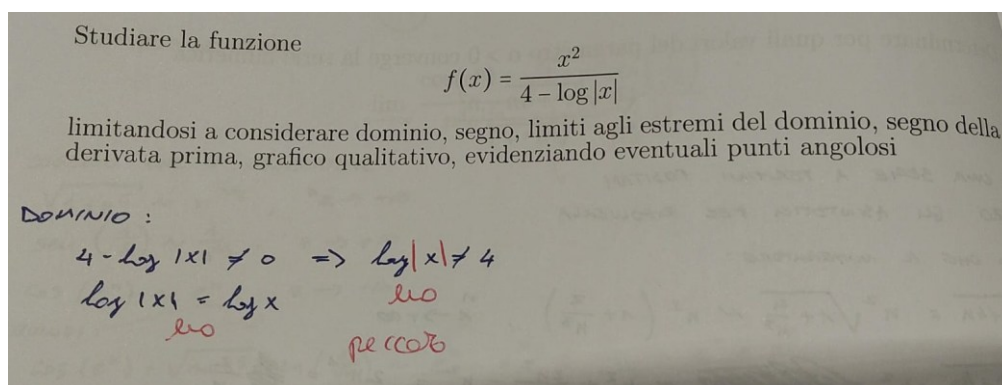


Figura 4.11: Esempio di manifestazione del bias dei numeri naturali (Codice BN1).

La Figura 4.11 mostra un problema di ricerca del dominio di una funzione. Dopo aver correttamente imposto la condizione di non annullamento del denominatore, l’allievo procede eliminando del tutto l’operatore modulo, ponendo esplicitamente l’uguaglianza $\log|x| = \log x$.

Poiché l’elaborato è privo di commenti verbali a supporto di questo passaggio, non si ha la certezza assoluta delle motivazioni alla base di tale azione. Tuttavia, da un punto di vista didattico, è del tutto ragionevole interpretare questa semplificazione illecita proprio come una manifestazione del bias BN1. L’ipotesi più accreditata è che lo studente, osservando l’incognita x visivamente “priva di segno” (ovvero non preceduta da un segno meno), la percepisca intuitivamente come un’entità positiva.

Si innesca così un’analogia fuorviante con l’insieme dei numeri naturali: così come il numero 5 è implicitamente positivo e dunque il suo valore assoluto lo lascia inalterato ($|5| = 5$), l’allievo si convince che anche per le variabili letterali debba valere l’identità $|x| = x$. Rimuovendo le sbarre del modulo sulla base di un’illusione

puramente visiva, l'autore dell'elaborato finisce per restringere illecitamente il campo di esistenza della funzione, perdendo del tutto la simmetria del dominio per valori negativi.

Un secondo ostacolo strettamente collegato a quello appena analizzato e codificato come OS2 riguarda l'interpretazione del valore assoluto come una procedura puramente meccanica che si limita a “omettere” il segno visibile di una certa quantità, estendendo questa logica anche alle espressioni algebriche.

Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \sqrt{x+2}$$

limitandosi a considerare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, segno della derivata prima, grafico qualitativo, evidenziando eventuali punti angolosi

1) $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
 $x \neq 0$

$\begin{cases} (1 - \frac{1}{x}) \sqrt{x+2} & \text{se } x > 0 \\ (1 + \frac{1}{x}) \sqrt{x+2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Figura 4.12: Esempio di valore assoluto usato come operatore meccanico che omette il segno di una certa quantità (Codice OS2).

Nella Figura 4.12 si nota che per svolgere uno studio di funzione contenente un valore assoluto, lo studente cerca di rimuovere il modulo studiandone il segno dell'argomento. Inizialmente sembra che la quantità $\left| \frac{x-1}{x} \right|$ venga riscritta come $\left| 1 - \frac{1}{x} \right|$. Successivamente, l'allievo imposta un sistema per definire la funzione a tratti. Sebbene le condizioni poste a lato ($x > 0$ e $x < 0$) siano di per sé incomplete, l'aspetto più critico emerge nella trascrizione delle espressioni: per il secondo caso, l'allievo, rimuovendo il valore assoluto, scrive $1 + \frac{1}{x}$.

Da un punto di vista didattico è possibile proporre una chiave interpretativa per questo comportamento. È altamente probabile che lo studente, per gestire il caso “negativo”, non abbia considerato la definizione formale del valore assoluto (che richiederebbe di cambiare il segno all'intera quantità). Al contrario, percependo il modulo come un comando algoritmico che “rende tutto positivo”, l'allievo si limita ad agire sul singolo addendo, trasformando il segno di sottrazione in un segno di addizione.

Questa azione di “positivizzazione” visiva conferma come il comportamento della funzione valore assoluto venga spesso considerata come scollegata dalla struttura globale

dell'espressione per essere applicata meccanicamente ai soli segni grafici, svuotando l'operazione del suo reale significato logico e algebrico.

4.2.4 Il valore assoluto come funzione: criticità nell'interpretazione del segno del dominio e del codominio

Proseguendo l'analisi degli ostacoli riscontrati nelle prove d'esame, emerge che molte delle criticità osservate sono riconducibili all'interpretazione del valore assoluto come vera e propria funzione. Come illustrato nei prossimi esempi, le difficoltà principali delle matricole in questo ambito derivano da una sovrapposizione concettuale tra dominio e codominio, nonché dall'errata convinzione che tale funzione possa assumere simultaneamente una duplice identità numerica, compromettendo così l'intera struttura logica dell'esercizio.

Un primo esempio di questa dinamica è rappresentato dall'ostacolo codificato come FVA1. Questo errore si manifesta quando lo studente attribuisce al valore assoluto la capacità di generare contemporaneamente due valori distinti, scrivendo in modo esplicito l'uguaglianza $|x| = \pm x$.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(|x| + 3)(x^2 - 2)}{(x + 4)} \leq 0$$

assolutamente no

~~$|x| = x$~~

$(x+3)(x^2-2) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$x+4 < 0 \Rightarrow x < -4$

Number line 1: $-4 \quad -3 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$

Number line 2: $-\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$

conclusione come me sviluppato in modo errato (e non coerente)

$S = \{x \in \mathbb{R}: x < -4 \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$

Figura 4.13: Attribuzione di un doppio valore simultaneo alla funzione valore assoluto (Codice FVA1).

La Figura 4.13 illustra in modo inequivocabile questo ostacolo: prima ancora di iniziare la risoluzione vera e propria della disequazione fratta, lo studente appunta a margine l'identità $|x| = \pm x$.

Questa singola riga racchiude una criticità strutturale profonda: l'allievo non concepisce il modulo come una funzione definita a tratti (che restituisce x oppure $-x$ a

seconda dell'intervallo in cui ci si trova), ma lo assimila all'estrazione di una radice quadrata, trattandolo come un generatore di due risultati simultanei. Tale ostacolo non solo banalizza lo studio dei casi necessario per risolvere la disequazione, ma viola la definizione matematica stessa di funzione, la quale impone rigorosamente che a ogni elemento del dominio corrisponda uno e un solo valore nel codominio.

Un secondo e diffuso errore appartenente a questo filone è classificato con il codice FVA2. Esso si manifesta quando l'allievo confonde il dominio con il codominio della funzione modulo, traslando la ben nota proprietà di positività del risultato (cioè il valore di $f(x)$) sui valori in ingresso (le x).

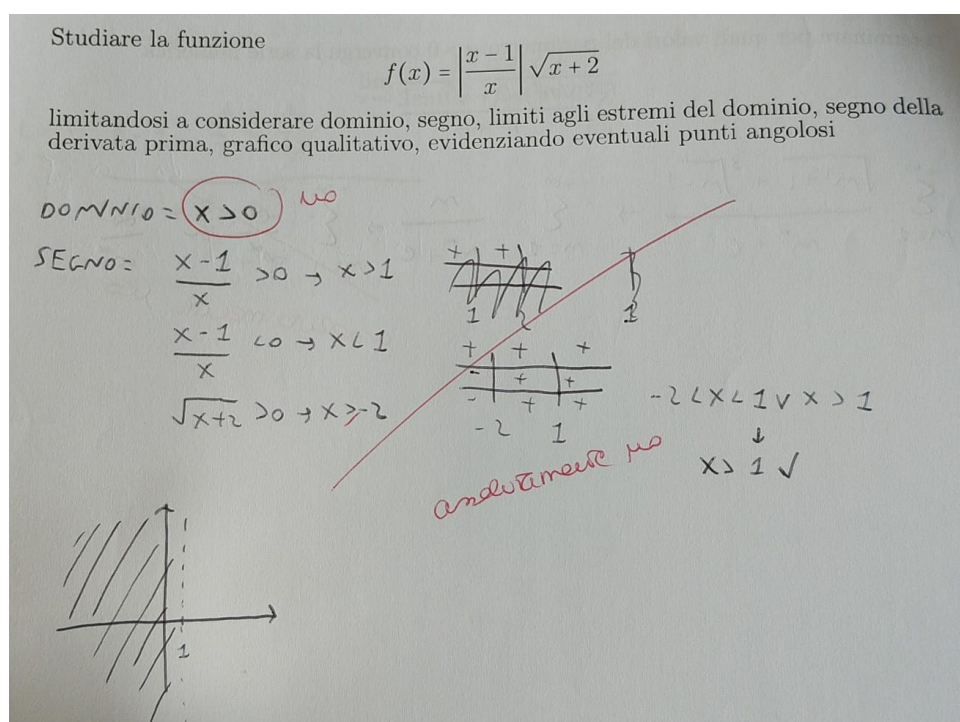


Figura 4.14: Esempio di sovrapposizione tra dominio e codominio della funzione valore assoluto (Codice FVA2).

L'elaborato in Figura 4.14 mostra questa dinamica in modo molto evidente. Nello studio del dominio della funzione assegnata, lo studente esordisce scrivendo in modo arbitrario la condizione $x > 0$. Questa imposizione non trova alcuna giustificazione algebrica nel testo della funzione (che richiederebbe unicamente $x \neq 0$ per l'esistenza del denominatore e $x \geq -2$ per la radice quadrata).

È possibile interpretare l'origine di questo errore osservando, inoltre, il piano cartesiano abbozzato in basso a sinistra. L'allievo ha cancellato interamente il secondo e

il terzo quadrante, convincendosi quindi che la funzione possa esistere esclusivamente nel semipiano delle ascisse positive.

Questo comportamento rappresenta l'essenza dell'ostacolo FVA2: lo studente ricorda mnemonicamente che il valore assoluto "deve essere positivo", ma scambia i ruoli delle variabili in gioco. Invece di dedurre che il grafico della funzione si svilupperà prevalentemente al di sopra dell'asse delle ascisse (codominio positivo), deduce illecitamente che a dover essere positivi siano i valori di partenza ($x > 0$).

La manifestazione di questa sovrapposizione tra variabili nel contesto delle disequazioni è codificata come FVA4. Anche in questo caso, l'ostacolo risiede nell'incapacità di distinguere la positività dell'argomento interno (dominio) dalla positività globale dell'operatore (codominio).

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(|x|+3)(x^2-2)}{(x+4)} \leq 0$$

$x \neq -4$

Distinguiamo 3 casi

(a) $|x| = 0$ perché?

$$\frac{(x+3)(x^2-2)}{x+4} \leq 0$$

(b) $|x| < 0$ ma verificato

$$\frac{(3-x)(x^2-2)}{4} \leq 0$$

(c) $|x| = 0$

SEMPRE VERIFICATO

non è chiaro la definizione di valore assoluto

Figura 4.15: Esempio di sovrapposizione tra dominio e codominio del valore assoluto nel caso delle disequazioni (Codice FVA4).

Osservando la Figura 4.15, lo studente deve risolvere una disequazione fratta contenente il termine $|x|$. Per gestire la presenza del modulo, sceglie coerentemente la via algebrica, scrivendo esplicitamente "distinguiamo 3 casi". L'errore strutturale, tuttavia, emerge nel momento in cui vengono impostati i relativi sistemi. Invece di porre le condizioni sull'argomento del valore assoluto (ovvero studiare i casi per $x > 0$, $x < 0$ e $x = 0$), l'allievo imposta i vincoli sull'intera funzione modulo, scrivendo come ipotesi $|x| > 0$, $|x| < 0$ e $|x| = 0$.

Questa scrittura evidenzia chiaramente incomprensioni concettuali legate alla definizione del valore assoluto. Lo studente scambia lo studio del segno della variabile in ingresso con la valutazione del segno della quantità in uscita e giunge inevitabilmente a

produrre condizioni prive di senso, come $|x| < 0$, che bloccano in partenza qualsiasi possibilità di risoluzione corretta.

4.2.5 Disequazioni con valore assoluto: applicazione procedurale e assenza di controllo logico

A conclusione dell'indagine qualitativa sugli ostacoli legati al valore assoluto, emerge un'ultima criticità inerente in modo specifico alla risoluzione delle disequazioni con valore assoluto. In questa fase, le difficoltà non derivano tanto dall'incomprensione formale dell'operatore, quanto dall'applicazione cieca di procedure algoritmiche e mnemoniche. Si assiste a una vera e propria perdita di controllo semantico sull'esercizio: gli allievi si affidano a calcoli meccanici ignorando l'evidenza strutturale di casi palesemente impossibili, oppure, pur individuando i valori critici corretti, li ricombinano per costruire intervalli di soluzione in modo del tutto casuale e svincolato da ogni logica ordinamentale.

Tra le criticità esaminate in questo ambito, l'ostacolo codificato come RD11 risulta in assoluto il più frequente all'interno del campione (5,9%). Esso si manifesta quando lo studente non riconosce i casi strutturalmente impossibili (o, al contrario, sempre verificati) e procede applicando ciecamente le formule risolutive standard fin dal primo passaggio, ignorando la palese incongruenza logica del testo che ha di fronte.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$N(x) = \frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

$D(x)$

$\rightarrow N(x) \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} F_1(x) \\ (x+4) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} F_2(x) \\ (x^2-4) \end{matrix} \geq 0$

$F_1(x) \geq 0 \rightarrow x \geq -4$

$F_2(x) \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

eq. ass. $x^2 - 4 = 0$
 $x_{1,2} = \pm 2$

$\rightarrow D(x) > 0 \rightarrow \sqrt{|x|+4} > 0$

Radice quadrata positiva $\forall x \in \mathbb{R} \checkmark$

$|x| > -4 \rightarrow x < 4 \vee x > -4 \rightarrow -4 < x < 4$

~~$-4 < x < 4$~~

$S = \{-4 < x \leq -2 \vee 2 \leq x < 4\}$

Figura 4.16: Applicazione algoritmica a un caso sempre verificato (Codice RD11).

$e^{|x|-2} < e$

Si passa all' esponente

$|x|-2 < 1 \rightarrow |x| < -1$

~~$-1 < x < 1$~~

↑
nessune soluzioni

NO

Figura 4.17: Esempio di applicazione meccanica della formula risolutiva a un caso impossibile (Codice RDII).

Le Figure 4.16 e 4.17 offrono due esempi paradigmatici e complementari di questa tendenza. Nel secondo elaborato (Figura 4.17), giunto alla condizione $|x| < -1$, l'allievo non coglie l'assurdità di imporre che una quantità non negativa sia strettamente minore di un numero negativo. Invece di concludere immediatamente l'esercizio decretandone l'impossibilità, egli applica la regola mnemonica che prevede di scegliere l'intervallo "interno" quando si ha a che fare con un segno "<" ottenendo la scrittura $-1 < x < 1$. Una dinamica del tutto analoga si osserva in Figura 4.16: di fronte alla disequazione $|x| > -4$ (una condizione banalmente sempre verificata nel dominio), lo studente si lancia in un superfluo svolgimento algoritmico che lo porta, peraltro commettendo ulteriori errori di manipolazione, a scegliere come soluzione l'intervallo $-4 < x < 4$.

L'origine didattica e cognitiva di questo comportamento risiede in una profonda scissione tra la sintassi matematica (i simboli scritti e manipolati sul foglio) e la sua semantica (il reale significato dell'operatore modulo come quantità intrinsecamente positiva o nulla).

Questo automatismo è spesso alimentato da un "contratto didattico" (D'Amore, 1999) disfunzionale: gli studenti si convincono che ogni esercizio proposto debba necessariamente richiedere lo svolgimento di un calcolo per giungere a una soluzione. Di conseguenza, percepiscono la disequazione non come una frase logica su cui ragionare qualitativamente prima di iniziare a scrivere, ma esclusivamente come il segnale visivo per avviare una procedura mnemonica. L'algoritmo si sostituisce così al ragionamento

critico, portando l'allievo ad accettare e formalizzare risultati matematicamente impossibili senza avvertire alcun conflitto cognitivo.

L'ultima declinazione di questo approccio meccanico è rappresentata dall'ostacolo codificato come EA3. Questo errore, già analizzato nel caso di una qualunque disequazione, ritorna frequentemente quando si opera con il valore assoluto e si manifesta nella fase conclusiva dell'esercizio. Lo studente riesce a determinare correttamente i "valori critici" derivanti dall'equazione associata, ma fallisce nel tradurli in un intervallo di soluzioni matematicamente coerente, assemblandoli in modo arbitrario.

Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{|x|-1}\right)$$

limitandosi a considerare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, segno della derivata prima, grafico qualitativo, evidenziando eventuali punti angolosi

Come primo passaggio studiamo il dominio

Es. logaritmo $\rightarrow \frac{2x-1}{|x|-1} \geq 0 \rightarrow 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$
 $|x|-1 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 1 \rightarrow x > 1$ $x < -1$

non è poiché
è il denominatore e deve essere diverso da zero

$|x|-1 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 1 \rightarrow -1 < x < 1$ ma siccome l'argomento deve essere maggiore di zero

~~$0 < x < 1$~~

~~$D: \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\}$~~

Figura 4.18: Ricombinazione arbitraria dei valori critici nella soluzione (Codice EA3).

La Figura 4.18 illustra chiaramente questa dinamica all'interno dello studio del dominio di una funzione logaritmica. Analizzando la positività del denominatore dell'argomento, l'allievo giunge a impostare correttamente la condizione $|x| > 1$. In questa fase, estrae correttamente i valori critici -1 e 1 . Tuttavia, al momento di formalizzare il risultato, invece di costruire gli intervalli esterni ($x < -1 \vee x > 1$), lo studente ricombina i numeri in modo errato, scegliendo l'intervallo interno $-1 < x < 1$ (valido, al contrario, per il segno di minoranza). Questa inesattezza potrebbe essere interpretata semplicemente come una "svista", ma in realtà mostra come lo studente probabilmente non si sia nemmeno soffermato a pensare a quali sono i valori che hanno modulo maggiore di 1, poiché non ha notato l'incoerenza totale del risultato.

L'origine di questo ostacolo è di nuovo chiara: il simbolo di disuguaglianza perde la sua funzione semantica. I numeri trovati vengono semplicemente trattati come elementi

da inserire all'interno di un pattern sintattico (la forma $A < x < B$) richiamato mnemonicamente in modo confuso. Questo comportamento conferma, in via definitiva, come le disequazioni modulari vengano spesso affrontate riducendole a una sterile manipolazione di simboli, in cui la scrittura finale perde qualsiasi aderenza con la reale struttura matematica della disuguaglianza di partenza.

4.3 Evidenze sperimentali di un nuovo ostacolo cognitivo

A conclusione dell'analisi qualitativa, risulta doveroso dedicare uno spazio specifico a una criticità emersa con notevole frequenza durante lo spoglio degli elaborati (riscontrata in ben 18 prove su 188, che corrisponde al 9,6% del campione) ma che non ha trovato riscontro diretto o classificazione formale nella letteratura didattica di riferimento.

Il nucleo di questo errore risiede nella fase di esplicitazione della funzione valore assoluto, ovvero quando lo studente è chiamato a “sciogliere” il modulo per trasformarlo in una funzione definita a tratti. Formalmente, per una generica funzione $|g(x)|$, occorre studiare il segno dell'intero argomento, ponendo la condizione $g(x) \geq 0$. Tuttavia, una consistente percentuale del campione analizzato applica una drastica semplificazione procedurale, vincolando i casi non al segno dell'argomento, ma imponendo in automatico la classica dicotomia $x \geq 0$ e $x < 0$, oppure limitandosi a valutare il segno di una sola componente (come il numeratore o il denominatore).

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\left| \frac{x}{1-x} \right|} = \exp \left| \frac{x}{1-x} \right|$$

limitandosi a considerare dominio, limiti agli estremi del dominio, segno della derivata prima, grafico qualitativo, evidenziando eventuali punti angolosi

$$f(x) = e^{\left| \frac{x}{1-x} \right|}$$

$\exists$ valore assoluto: $\forall x \in \mathbb{R}$

$D: \forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1$

$$\left| \frac{x}{1-x} \right| = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

errore nelle def di valore assoluto

Figura 4.19: Esplicitazione del valore assoluto vincolata arbitrariamente allo zero (Ostacolo emergente).

La prima immagine fornita (Figura 4.19) illustra perfettamente la casistica più comune. Di fronte allo studio della funzione $f(x)$, lo studente costruisce il sistema per

esplicitare i due tratti. Trascrive correttamente le espressioni analitiche (lasciando inalterata la frazione nel primo caso e cambiandole il segno nel secondo), ma per stabilire in quali intervalli esse siano valide, scrive testualmente le condizioni $x \geq 0$ e $x < 0$. L'allievo omette totalmente lo studio del segno della frazione algebrica $\frac{x}{x-1}$ (argomento del valore assoluto), ancorandosi in modo rigido e acritico alla definizione del valore assoluto elementare $|x|$. Questo comportamento potrebbe essere dovuto o al fatto che lo studente consideri lo studio del segno del solo numeratore (o, in altri casi, del solo denominatore), oppure al fatto che lo studente si occupi di considerare il segno della variabile x in qualsiasi funzione.

Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x}{x-1} \right| \sqrt{x+1}$$

limitandosi a considerare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, segno della derivata prima, grafico qualitativo, evidenziando eventuali punti angolosi

$$f(x) = \left| \frac{x}{x-1} \right| \sqrt{x+1} \quad D: x \geq -1 \vee x \neq 1$$

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

Zeri: $\begin{cases} x=0 & y=0 \\ y=0 & x=-1 \end{cases}$

Figura 4.20: Esplicitazione del modulo basata unicamente sul denominatore (Ostacolo emergente).

La seconda immagine (Figura 4.20) mostra una variante altrettanto problematica dello stesso ostacolo. Nello studio della funzione $f(x)$, l'allievo tenta nuovamente di esplicitare il modulo. In questo caso, intuisce che la soglia di separazione degli intervalli non coincide banalmente con lo zero, ma commette comunque un errore considerando il segno del solo denominatore fissando le condizioni $x > 1$ e $x < 1$. Invece di costruire il grafico dei segni per studiare la positività della frazione, lo studente isola il denominatore $x - 1$ e sceglie la sua radice come punto di raccordo per la funzione a tratti, ignorando completamente il ruolo del numeratore.

Da un punto di vista cognitivo, questo ostacolo emergente conferma la fortissima tendenza degli studenti a operare secondo modelli già conosciuti. Sembra che la definizione del valore assoluto elementare ($|x|$) venga memorizzata come un pattern visivo in cui le condizioni $x \geq 0$ e $x < 0$ sono percepite come regole universali.

Capitolo 5

Dalla ricerca all'intervento didattico: un laboratorio sull'errore

L'analisi condotta nel capitolo precedente ha permesso di mappare con precisione le difficoltà e gli ostacoli cognitivi che le matricole universitarie incontrano nella gestione delle disequazioni e del valore assoluto. Tuttavia, la sola identificazione e classificazione degli errori risulterebbe sterile se non fosse accompagnata da una riflessione sulle modalità di intervento. Affinché la ricerca in didattica della matematica abbia una reale ricaduta sulla pratica, è necessario progettare a livello scolastico percorsi che incidano sulle concezioni degli studenti, prevenendo le false credenze prima che queste si fossilizzino definitivamente.

Comprendere a fondo le ragioni degli errori è infatti il primo passo per intervenire in modo mirato e modificare le pratiche didattiche. In quest'ottica, come suggerisce Zan (2007), è fondamentale superare l'idea dell'errore come semplice fallimento o disattenzione, favorendo invece un approccio metacognitivo. Riflettere sui propri errori e sui processi mentali che li hanno generati permette infatti agli allievi di prendere consapevolezza dei limiti delle proprie strategie risolutive e di capire come correggerle (Zan, 2007).

Da queste premesse è nata l'esigenza di progettare un'attività didattica che consistesse nella sperimentazione dello studio compiuto in questo progetto di tesi. L'obiettivo principale che ha condotto la sua ideazione è stato quello di guidare attivamente gli studenti a riflettere sull'errore in chiave metacognitiva. Durante la progettazione è nata l'esigenza di creare un ponte tra la scuola secondaria e l'università: agire esclusivamente sulle matricole universitarie, infatti, si sarebbe rivelato un intervento tardivo e meno efficace. Come è stato mostrato nell'analisi delle prove d'esame, la maggior parte delle criticità osservate in ambito accademico non deriva dalla mancata comprensione di concetti avanzati, ma deriva da ostacoli risalenti già al primo biennio della scuola superiore.

Proporre l'attività a studenti che si avviano verso la conclusione del percorso scolastico risulta più efficace, specialmente per chi intende intraprendere studi scientifici.

In questo modo i futuri immatricolati possono prendere consapevolezza dei prerequisiti necessari per affrontare un percorso di questo tipo, offrendo loro l'opportunità di ragionare sui propri limiti e di destrutturare eventuali false credenze prima dell'ingresso all'università.

5.1 Il contesto della sperimentazione

Le idee e le riflessioni sull'importanza metacognitiva dell'errore precedentemente esposte si sono rivelate in linea con gli obiettivi del progetto FSL – Formazione Scuola-Lavoro dal titolo “La matematica è il mio mestiere? Laboratorio di autovalutazione”, organizzato dal Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia nella settimana dall'8 al 12 giugno 2026. Questo percorso è rivolto agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado del territorio di Modena e Reggio Emilia, con particolare riferimento agli allievi delle classi quarte interessati a intraprendere un futuro percorso accademico in ambito scientifico. L'iniziativa offre un'occasione di orientamento consapevole verso le discipline universitarie e, allo stesso tempo, fornisce ai ragazzi uno spazio di autovalutazione in cui potersi mettere alla prova, confrontandosi in anticipo con le richieste dell'ambiente scientifico accademico.

L'intervento progettato per questa tesi costituisce nello specifico una delle giornate laboratoriali previste dal calendario del progetto. La conduzione di questa singola attività è stata gestita dalla candidata in affiancamento alla docente relatrice, mentre i restanti incontri del percorso sono stati tenuti da altri docenti interni ed esterni al Dipartimento.

La giornata si è svolta presso il Dipartimento ed è stata articolata in due fasi: una sessione mattutina della durata di tre ore e una sessione pomeridiana di due ore. All'incontro ha preso parte un gruppo di 17 studenti, provenienti da scuole secondarie di secondo grado delle province di Modena e Reggio Emilia. La scelta di inserire l'attività all'interno di questo contesto ha garantito a questi studenti l'opportunità di riflettere in modo critico sulle proprie competenze matematiche di base prima del passaggio dalla scuola secondaria all'università.

L'attività è stata progettata con l'intento di non stigmatizzare l'errore matematico, svincolandolo dal peso della valutazione scolastica per trasformarlo in un oggetto di

indagine e di discussione collettiva. Mettere gli allievi di fronte agli specifici “errori universitari” analizzati nel Capitolo 4 assume un valore preventivo, oltre che formativo: l’attività crea un ponte diretto tra i due ordini di scuola, mettendo i ragazzi di fronte a quelli che potrebbero diventare gli sbagli dei loro “sé futuri”. In questo modo si mostra chiaramente come gran parte degli ostacoli accademici derivi in realtà da argomenti affrontati già al liceo, offrendo la possibilità di disinnescarli in anticipo.

5.2 Progettazione e struttura del laboratorio

La giornata di sperimentazione è stata progettata traducendo l’analisi teorica in un’esperienza attiva e coinvolgente, in cui i veri protagonisti delle attività erano gli studenti stessi. Gli obiettivi del laboratorio sono stati esposti agli studenti tramite un abstract di presentazione del laboratorio, dal titolo *“Caccia all’errore! Quando sbagliare è il primo passo per capire davvero”*. Di seguito si riporta il testo dell’abstract:

“Hai mai sbagliato un esercizio di matematica pur essendo convinto di avere ragione? In questa giornata ti invitiamo a guardare l’errore da una prospettiva nuova: non come un fallimento, ma come uno strumento per capire più a fondo come funziona il ragionamento matematico. Lavorando insieme ad altri studenti e studentesse e a ricercatrici dell’università, scoprirai che anche chi studia matematica a livello universitario sbaglia e che interrogarsi sul perché è forse la cosa più matematica che si possa fare.”

Partendo da questo invito, l’attività è stata strutturata in due sessioni operative, per un totale di cinque ore ripartite tra la mattina e il pomeriggio. La scansione temporale è stata pensata per guidare progressivamente gli studenti da una prima fase di riflessione individuale a una successiva fase di collaborazione e costruzione attiva.

Nello specifico, la sessione mattutina è stata interamente dedicata all’esplorazione e alla decostruzione dell’errore. L’attività si è aperta con una fase di indagine individuale tramite questionari, volti a esplorare sia il rapporto personale con le difficoltà matematiche, sia la reazione di fronte a specifici quesiti algebrici. Successivamente, la prospettiva è stata ribaltata, spostando l’attenzione dalle proprie difficoltà, a quelle degli altri: gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, sono stati invitati a vestire i panni del

docente per correggere e analizzare collettivamente gli errori presenti in due prove d'esame universitarie simulate.

La sessione pomeridiana è stata invece incentrata sulla creazione attiva: ai gruppi è stato richiesto di formulare nuovi quesiti matematici a risposta multipla, ideando con cura i “distrattori”, ovvero opzioni errate plausibili costruite proprio ricalcando gli ostacoli cognitivi analizzati nella mattinata. La giornata si è poi avviata alla conclusione riprendendo in mano il questionario matematico iniziale, offrendo così agli allievi l'opportunità di autovalutare a posteriori i propri eventuali errori con una nuova consapevolezza. L'attività si è infine chiusa con un dibattito collettivo focalizzato sulle proprie impressioni sul laboratorio svolto e sulle aspettative e timori legati alla transizione tra la scuola secondaria e l'università.

Nei paragrafi successivi verranno analizzate nel dettaglio le singole fasi di questo intervento e le motivazioni didattiche alla base di ciascuna scelta.

5.2.1 Riflettere sulle difficoltà: i questionari iniziali

La prima fase della mattinata ha previsto la somministrazione individuale di due brevi questionari in formato digitale. Il primo modulo ha avuto una funzione prettamente esplorativa e metacognitiva, con l'obiettivo generale di indagare il rapporto personale che ciascuno studente ha costruito nel tempo con la matematica e con le sue difficoltà.

Senza scendere nel dettaglio dell'intero questionario, l'indagine si è concentrata sulle reazioni messe in atto di fronte ad una difficoltà e sulle presunte cause dei propri fallimenti, come presenza di ansia da prestazione, percezione di non avere le capacità adeguate o di utilizzare un metodo di studio errato. In questa fase esplorativa è stato richiesto agli studenti di raccontare un episodio personale legato ad un momento in cui le proprie difficoltà sono state accolte dagli altri o ad un momento in cui sono state al contrario criticate. L'obiettivo di questa domanda era quello di spingere i ragazzi a riflettere sul proprio percorso, portando alla luce l'eventuale influenza del contratto didattico instaurato con l'insegnante o, più in generale, il peso delle aspettative degli altri.

Subito dopo, è stato proposto un secondo breve questionario, questa volta focalizzato sui contenuti matematici affrontati nella ricerca, ovvero disequazioni e valore assoluto. Anche in questo caso, la funzione del test non era valutativa. L'idea alla base di questa scelta è legata allo svolgimento della giornata: sperimentando direttamente l'errore, i partecipanti avranno poi l'opportunità di rivedere le proprie risposte alla fine

del laboratorio, magari con maggiore consapevolezza sui motivi per cui la loro mente li ha guidati verso una determinata risposta invece che un'altra.

Si è scelto di proporre cinque quesiti modellati esattamente su alcuni degli ostacoli cognitivi individuati nell'analisi del Capitolo 4. Nello specifico, le domande somministrate sono state le seguenti:

1. *“ $x = 3$ potrebbe essere la soluzione di una disequazione? Se sì, di quale?”.*
2. *“L'uguaglianza $|x - 1| = x - 1$ è verificata per ogni $x > 0$. Vero o falso?”.*
3. *“La disequazione $|x - 5| > -2$ si risolve unendo le soluzioni delle due disequazioni $x - 5 > 2$, $x - 5 < -2$. Vero o falso?”.*
4. *“Le disequazioni $\frac{1}{x} < 1$ e $1 < x$ hanno esattamente le stesse soluzioni. Vero o falso?”.*
5. *“La funzione $f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|$ è una funzione definita a tratti che può essere riscritta in questo modo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x}{x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Vero o falso?”.*

I quesiti 2 e 5, in particolare, sono stati inseriti per indagare l'ostacolo cognitivo rilevato con alta frequenza negli elaborati universitari ma di cui non si era trovato un diretto riscontro in letteratura. Essi mirano ad esaminare la difficoltà degli allievi a concepire la funzione valore assoluto come funzione definita a tratti: molti esplicitano l'argomento del modulo in modo meccanico, suddividendo sempre la retta reale nei due intervalli $x \geq 0$ e $x < 0$, a prescindere dall'espressione dell'argomento.

La domanda numero 1 ha l'obiettivo a far emergere l'ostacolo codificato come SA1, ovvero la difficoltà ad accettare che una disequazione possa ammettere come soluzione un valore puntuale anziché un intervallo numerico. Il quesito numero 3, invece, è strettamente collegato all'ostacolo RDI1, in quanto verifica se lo studente applica in modo meccanico e cieco la “regola” risolutiva del valore assoluto, ignorando l'incongruenza logica di un modulo posto maggiore di un numero negativo. Infine, il quesito 4 richiama l'ostacolo ED1 (il cosiddetto “errore di distacco”), indagando la diffusa tendenza a moltiplicare entrambi i membri per una variabile incognita senza preoccuparsi di discuterne il segno.

5.2.2 Riconoscere gli ostacoli: analisi metacognitiva di elaborati universitari

Conclusa la fase esplorativa individuale e dopo una breve condivisione a gruppi sulle proprie riflessioni personali, ha preso il via il cuore operativo della giornata. Gli studenti sono stati suddivisi in gruppi da tre e sono stati invitati a vestire i panni del docente universitario per analizzare e correggere due prove d'esame simulate, attribuite a due finte matricole, "Mario Rossi" e "Giulia Bianchi". I testi completi e le relative risoluzioni di questi due elaborati sono stati inseriti in appendice alla presente tesi (si vedano l'Allegato A per la prova di Giulia e l'Allegato B per la prova di Mario).

Il punto di forza di questa fase risiede nella scelta dei protocolli forniti. Le prove sottoposte ai ragazzi non sono casuali, ma sono costituite da esercizi reali, tratti da veri esami di Analisi Matematica I del Corso di Laurea Triennale in Ingegneria del Veicolo. I quesiti selezionati riguardano esclusivamente la risoluzione di disequazioni e la gestione del valore assoluto, argomenti che costituiscono i prerequisiti che gli allievi presenti dovrebbero già padroneggiare. Inoltre, i quesiti corrispondono in gran parte a quelli analizzati nel capitolo 4 del presente studio, sebbene siano stati riscritti e combinati in modo da creare due esami equilibrati e anonimi. Sebbene i testi degli esercizi siano identici in entrambe le prove, le modalità di svolgimento proposte da Mario e Giulia sono diverse. In questo modo, le due prove permettono di mostrare sul campo il maggior numero possibile di ostacoli cognitivi esaminati.

A livello pratico, a tre gruppi è stata assegnata la correzione della prova di Mario, mentre ai restanti tre quella di Giulia. L'attività si è appoggiata all'utilizzo della bacheca virtuale condivisa "Padlet". Sulla piattaforma erano stati precaricati tutti i singoli quesiti, uno per colonna, e, al di sotto di ciascuno di essi, ogni gruppo doveva pubblicare i propri commenti. La consegna data agli studenti è stata molto precisa: l'obiettivo dell'attività non era tanto quello di attribuire un voto numerico finale alla prova o di individuare semplicemente i diversi errori. Ai ragazzi è stato richiesto un approccio metacognitivo: dovevano provare ad ipotizzare le motivazioni che avevano spinto Mario e Giulia a commettere gli errori individuati. L'intento era quello di far percepire loro che spesso gli ostacoli derivano dall'applicazione meccanica regole apprese in modo puramente procedurale. Oltre alle correzioni vere e proprie, gli allievi erano incoraggiati ad arricchire

il Padlet con qualsiasi tipo di osservazione, commentando anche quei procedimenti che, pur essendo tecnicamente corretti, risultavano poco produttivi.

Lavorare su compiti universitari simulati, ma incentrati su ostacoli legati alla matematica liceale di base, ha permesso di attivare una dinamica di prevenzione. Analizzando e giudicando i procedimenti di Mario e Giulia, gli studenti stavano di fatto osservando e correggendo i loro ipotetici “sé del futuro”. Questa immedesimazione ha consentito non solo di allertare i partecipanti sui prerequisiti minimi richiesti in ambito accademico, ma anche di stimolare un dibattito critico fondamentale per destrutturare le loro stesse false credenze prima che possano trasformarsi in un ostacolo reale all’università. Naturalmente l’attività non ha la pretesa di fornire agli studenti una preparazione a 360 gradi sui prerequisiti per poter intraprendere un percorso post-scolastico in ambito matematico, ma di fornire qualche strumento aggiuntivo che permetta loro di riflettere con consapevolezza sui propri limiti e su come poterli eventualmente affrontare.

5.2.3 Ideazione di quesiti nuovi riflettendo sui distrattori

La sessione pomeridiana ha determinato il passaggio da una fase di analisi individuale e collettiva a una di costruzione attiva. Ai gruppi di studenti è stato chiesto di formulare un quesito matematico a risposta multipla ciascuno. Gli argomenti su cui basare le domande dovevano riguardare i concetti affrontati nell’attività precedente o, più in generale, i prerequisiti di base tipici dei test OFA (Obblighi Formativi Aggiuntivi) universitari. Per stimolare la motivazione e conferire un valore reale al compito, è stato comunicato ai ragazzi che i quesiti ritenuti più interessanti e ben strutturati sarebbero stati presi realmente in considerazione per le future prove OFA di ateneo.

Il fulcro dell’attività, tuttavia, non risiedeva semplicemente nella formulazione della domanda o della risposta corretta, quanto piuttosto nella creazione mirata delle opzioni errate, i cosiddetti “distrattori”. Ai gruppi è stato richiesto di ideare risposte sbagliate ma altamente plausibili, fornendo per ciascuna di esse una motivazione logica che spiegasse per quale ragione un ipotetico studente avrebbe potuto sceglierla.

Dal punto di vista didattico, questa richiesta nasce dall’obiettivo di costruire ancora una volta un esercizio di prevenzione delle difficoltà. Progettare un distrattore efficace, infatti, richiede una solida padronanza concettuale: significa sapersi calare nei panni altrui, prevedere le false credenze o le procedure fallimentari che potrebbero

guidare un compagno verso la risposta errata e ricostruirne il ragionamento. L'attività nasce dall'ipotesi secondo cui riflettere attivamente sui possibili errori degli altri possa portare gli allievi ad acquisire una consapevolezza più profonda sulle proprie difficoltà, aiutandoli a riconoscere e a disinnescare quelle procedure che loro stessi avrebbero potuto attuare.

A conclusione del lavoro di ideazione dei quesiti, le domande prodotte sono state raccolte e inserite immediatamente all'interno di un Modulo Google. Questo passaggio ha permesso di somministrare il test appena creato all'intera classe: ciascuno studente ha così potuto provare a risolvere la prova composta dai propri compagni, permettendo a ogni gruppo di verificare sul campo l'efficacia del proprio lavoro e di osservare se i distrattori ideati si fossero rivelati effettivamente "forti".

5.3 Bilancio dell'attività e riflessioni a posteriori

Alla luce di quanto esposto nei paragrafi precedenti, in questa sezione si riportano le osservazioni conclusive sullo svolgimento delle attività e l'analisi delle risposte ritenute più significative. Prima della somministrazione di ogni questionario è stata esposta agli studenti la natura dello studio compiuto in questo lavoro di tesi: è stato sottolineato come le attività proposte non avessero l'intento di mettere alla prova i partecipanti, ma di far prendere loro consapevolezza sul fatto che le difficoltà possono essere concepite come risorsa per migliorare il proprio apprendimento e il proprio approccio alla materia.

Il primo questionario, di natura metacognitiva, era strutturato per esplorare la percezione personale della disciplina e il rapporto emotivo con le difficoltà. Dalle prime domande a risposta aperta è emerso un quadro eterogeneo ma ricco di riflessioni profonde. Alcuni studenti hanno evidenziato una spiccata propensione per il ragionamento logico rispetto alle procedure più meccaniche e ai calcoli, mentre altri affermano preferenze opposte. Risulta particolarmente interessante l'osservazione di un allievo che scrive: *“della matematica apprezzo molto le dimostrazioni, un po' meno gli argomenti meccanici nei quali l'uso della fantasia è limitato; [...] la possibilità di commettere un errore [...] è qualcosa su cui cerco di lavorare, concentrandomi più sul comprendere dove ho sbagliato, e quindi dove migliorarmi, che l'errore in quanto tale”*. L'accostamento del termine “fantasia” a una disciplina spesso percepita dagli studenti

come rigida dimostra una notevole maturità e vicinanza allo spirito di un vero matematico. Allo stesso modo, emerge una notevole consapevolezza nella risposta di uno studente in cui emerge che *“la più grande difficoltà sta nel capire che la matematica non è una ‘materia per pochi’”*. È condivisa anche la visione secondo cui l’errore non va inteso come fallimento, ma come ostacolo costruttivo. Un allievo, ad esempio, scrive: *“La possibilità di commettere errori è di per sé frustrante, ma nell’ottica generale costituisce un elemento di sfida, che spesso mi spinge a cercare di trovare una soluzione alle difficoltà incontrate”*.

L’indagine ha poi esplorato le motivazioni affettive e psicologiche coinvolte nell’apprendimento, mettendo in luce quanto la prestazione scolastica influisca sulla percezione di sé. Il questionario ha rilevato che molti studenti preferirebbero non avere difficoltà in matematica poiché si sentirebbero più intelligenti (11 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto”) o perché si sentirebbero più sicuri di loro stessi (12 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto”). Molti partecipanti, invece, ritengono che il successo nella materia sia legato a maggiori possibilità per il loro futuro (13 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto”). Questi dati fanno emergere come la matematica sia spesso percepita non solo come una disciplina scolastica, ma come un vero e proprio metro di giudizio del proprio valore personale. Tale sovrapposizione tra competenza matematica e intelligenza innata contribuisce inevitabilmente ad amplificare il peso dell’errore, trasformandolo in una minaccia per la propria autostima.

Nelle domande successive, chiedendo di descrivere episodi in cui le proprie difficoltà non sono state accolte, sono emerse dinamiche legate in gran parte alla pressione esterna, soprattutto familiare. Risulta significativa la testimonianza di uno studente che scrive: *“Ritengo più numerosi i momenti in cui non sono state accolte [...] ci sono sempre state aspettative molto alte e [...] le persone che mi stavano attorno si concentravano solo sull’errore in sé [...]. Mi viene in mente a riguardo un episodio in cui presi un 10 pur avendo fatto un minimo errore di calcolo, unico nella verifica, e i miei genitori si arrabbiarono irragionevolmente”*. Un altro allievo riporta un episodio altrettanto significativo: *“una sera mio padre mi fece scrivere tutte le tabelline dall’1 al 12 due volte di fila; finii a mezzanotte”*. Queste risposte mostrano come l’errore venga spesso stigmatizzato, alimentando un circolo vizioso di ansia. A conferma di ciò, un altro

partecipante fa emergere una convinzione profonda: *“I momenti in cui le difficoltà non sono accolte sono maggiori, perché nell’ambiente scolastico funziona così”*.

A ulteriore conferma di quanto osservato, molti studenti ritengono che tra i fattori maggiormente correlati alle difficoltà matematiche ci siano l’ansia da prestazione (16 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto”), lacune su argomenti di base (16 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto”), e un insegnante inadeguato/a (indicato dalla totalità dei partecipanti come “Abbastanza” o “Molto”).

Infine, il questionario ha indagato l’approccio procedurale alla materia. La fretta di arrivare alla soluzione viene considerata una causa di difficoltà da 10 studenti. Inoltre, molti ritengono che un problema di matematica richieda di effettuare dei calcoli (13 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto” vero), riducendo spesso la disciplina a una mera esecuzione di procedure. Questa convinzione trova conferma poiché molti studenti hanno dichiarato che è capitato loro di scrivere passaggi o formule matematiche senza averle comprese a fondo, sapendo di soddisfare le aspettative dell’insegnante (12 studenti su 17 hanno risposto “Abbastanza” o “Molto” vero). Questo dato risulta particolarmente significativo per la presente ricerca, in quanto conferma le ipotesi delineate nell’analisi delle prove universitarie: molti errori non derivano dall’incapacità di sviluppare un ragionamento, ma dalla rassicurante e acritica applicazione di procedure mnemoniche prive di un reale controllo di senso.

Come progettato, al termine della compilazione, i questionari sono stati ritirati ed è stato avviato un dibattito collettivo. Gli studenti, inizialmente divisi in piccoli gruppi, si sono confrontati sulle proprie esperienze legate alle difficoltà matematiche, per poi condividere le riflessioni emerse con il resto della classe. Dalla discussione è emerso nuovamente come l’apprezzamento per la disciplina vari profondamente tra gli allievi: alcuni prediligono le procedure meccaniche e il calcolo, mentre altri valorizzano la creatività e il ragionamento logico. Molti studenti hanno inoltre sottolineato come l’origine dei loro problemi derivi spesso da un sistema valutativo che tende a premiare il risultato finale a discapito del procedimento seguito.

Sono state raccolte diverse testimonianze che confermano una radicata abitudine a utilizzare una matematica di tipo strumentale, piuttosto che relazionale. Per alcuni allievi, infatti, l’ostacolo principale consiste nell’individuare la corretta procedura da applicare; per altri, la difficoltà maggiore risiede in una mancanza di memoria, un

requisito ritenuto indispensabile per poter ricordare tutti i passaggi di ciascun esercizio. Attraverso un dialogo basato sull'ascolto e sulla validazione delle idee emerse, si è cercato di guidare i ragazzi verso una nuova consapevolezza: la matematica risulta nettamente più accessibile e funzionale non attraverso la pura memorizzazione delle formule, bensì quando si riesce ad attribuire un reale significato agli oggetti manipolati. Solo una comprensione profonda permette infatti di riutilizzare le conoscenze anche a distanza di tempo, ricostruendo le soluzioni tramite il ragionamento logico anziché attraverso l'applicazione meccanica di regole.

Infine, la discussione ha riportato l'attenzione sulla sfera emotiva. Gli allievi hanno collegato le proprie difficoltà all'ansia da prestazione, generata in particolar modo dai ristretti limiti di tempo imposti durante le verifiche, dalla pressione delle interrogazioni alla lavagna di fronte al gruppo classe e, infine, dalla scarsa disponibilità di alcuni docenti a riprendere la spiegazione di un concetto una seconda volta.

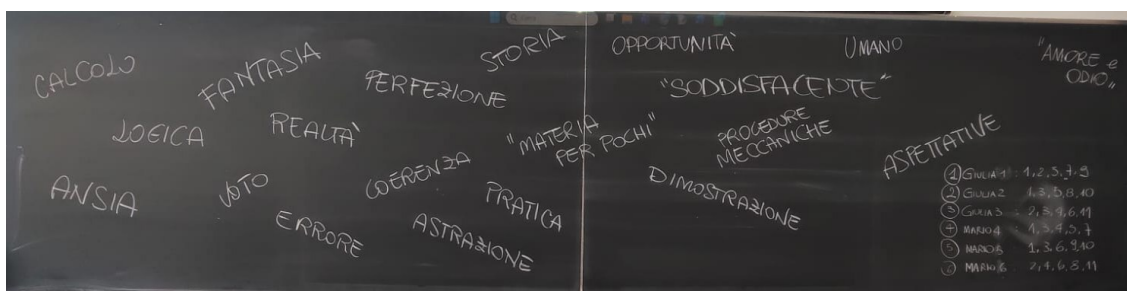


Figura 5.1: Sintesi alla lavagna delle parole e delle espressioni più significative emerse dall'analisi dei questionari e dal dibattito collettivo.

Nel secondo questionario, incentrato sulle diseguaglianze e sul valore assoluto, i quesiti somministrati sono stati strutturati in modo da far emergere nuovamente gli ostacoli cognitivi riscontrati sia in letteratura sia nell'indagine condotta sulle prove d'esame universitarie. Le risposte fornite dagli studenti hanno confermato l'ipotesi alla base dell'attività: gran parte delle difficoltà tipiche dell'ambiente universitario si è ripresentata con la medesima evidenza anche all'interno di questo campione scolastico.

Il quesito che ha generato maggiori difficoltà, persino in alcuni allievi che hanno completato correttamente il resto del questionario, è quello relativo alla riscrittura della funzione valore assoluto come funzione definita a tratti. Questo specifico ostacolo era già stato analizzato nel paragrafo 4.3 come problematica non documentata in letteratura, ma ampiamente riscontrata nell'indagine sulle prove universitarie (con una frequenza del

9,6%). Come illustrato in Figura 5.2, molti studenti ritengono che l'esplicitazione del modulo dipenda esclusivamente dal segno della singola variabile x , tralasciando la necessità di studiare il segno dell'intero argomento della funzione. Nella giustificazione riportata nell'elaborato, infatti, si evince chiaramente come la regola valida per $|x|$ venga estesa in modo acritico al valore assoluto di qualunque espressione algebrica: l'allievo afferma che la quantità all'interno del modulo risulta positiva “se e solo se l'incognita è maggiore di 0”, ignorando completamente che l'argomento sia in realtà un'espressione fratta il cui segno dipende anche dal denominatore.

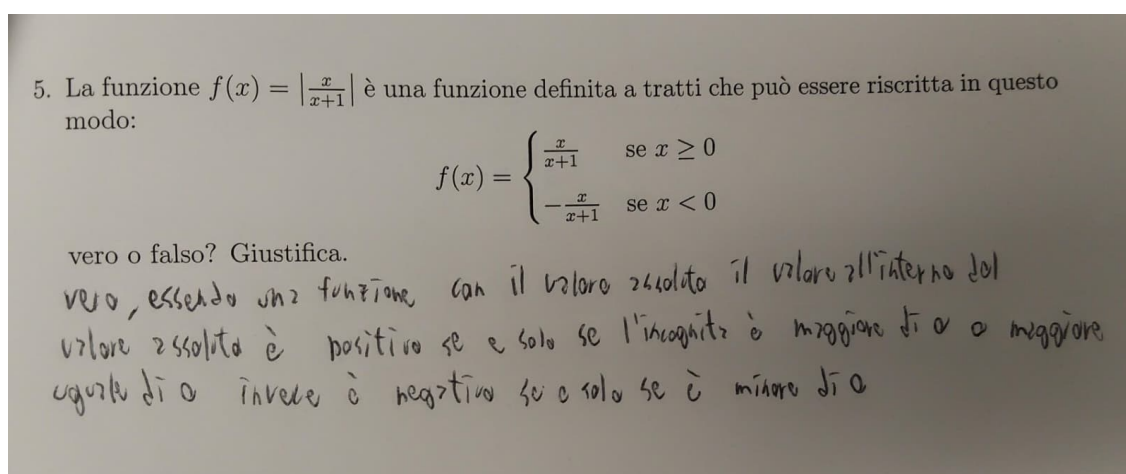


Figura 5.2: Esempio di risoluzione errata del quesito 5: l'allievo ancora l'esplicitazione del valore assoluto al segno della variabile x , ignorando lo studio del segno dell'intero argomento.

Un altro quesito che ha generato difficoltà in una buona parte dei partecipanti è il primo, in cui si chiedeva se il valore puntuale $x = 3$ potesse rappresentare la soluzione di una disequazione. Le risposte fornite dagli allievi documentano quella che in letteratura viene definita “l'influenza della struttura” (Almog & Ilany, 2012, p.361).

Questo ostacolo cognitivo, come già evidenziato, si osserva quando gli studenti assumono intuitivamente che la struttura finale della soluzione debba rispecchiare visivamente la struttura della disequazione di partenza. Poiché il testo di questo tipo di esercizi presenta sempre un simbolo di disuguaglianza, gli allievi si aspettano che anche il risultato mantenga necessariamente i medesimi simboli, escludendo a priori la possibilità di ottenere un'uguaglianza.

Tale errore, codificato nella presente ricerca come SA1 a partire dallo studio di Tsamir e Bazzini (2001), non era stato rilevato all'interno degli elaborati universitari

analizzati in precedenza. Tuttavia, averlo riscontrato con ampia frequenza in questa attività, conferma che la mancata emersione del fenomeno in ambito universitario deriva unicamente dal fatto che i testi d'esame non erano costruiti ad hoc per il presente studio.

Come si evince dalle giustificazioni riportate negli elaborati (si vedano le Figure 5.3 e 5.4), i ragazzi sono ancorati all'aspetto esteriore della notazione matematica: affermano infatti che “nelle disequazioni si usano $>$, $<$ ” oppure che una disequazione “deve avere come risultato $x \geq 3$ o $x \leq 3$ ”. Questa rigidità impedisce loro di concepire l'esistenza di casi particolari (come, ad esempio, la disequazione $(x - 3)^2 \leq 0$), riducendo la soluzione a una questione di coerenza visiva dei simboli piuttosto che di reale significato logico e algebrico.

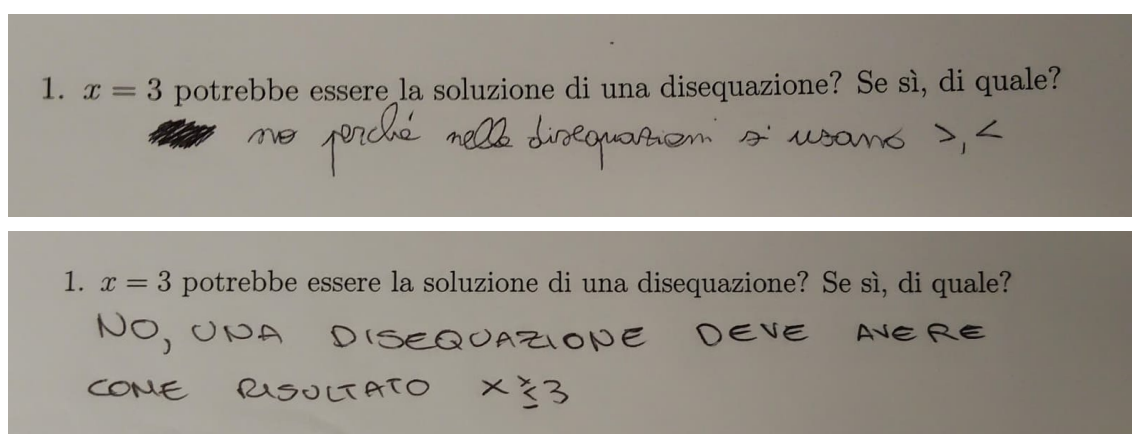


Figure 5.3 e 5.4: Risposte fornite al primo quesito, indicative della tendenza ad aspettarsi che il risultato di una disequazione rispecchi sempre la struttura sintattica del testo di partenza.

Infine, è emersa frequentemente un'ulteriore criticità all'interno del terzo quesito, relativo alla risoluzione della disequazione $|x - 5| > -2$ come unione delle soluzioni di $x - 5 > 2$ e $x - 5 < -2$. La maggior parte degli studenti ha ritenuto “Vero” l'enunciato proposto, dimostrando di non aver riconosciuto che la disuguaglianza è sempre verificata. Tuttavia, osservando le giustificazioni degli studenti che hanno risposto “Falso”, si evince che la maggioranza di essi non ha comunque colto il significato del quesito. Molti, infatti, hanno motivato la falsità dell'affermazione limitandosi a correggere l'impostazione algebrica del sistema. Invece di riconoscere l'errore concettuale, si sono concentrati sulla scrittura procedurale dei due casi, proponendo

scritture alternative come l'unione tra $x - 5 > -2$ e $-x + 5 > -2$ (Figura 5.6), o l'unione tra $x - 5 \geq -2$ e $-(x - 5) < -2$ (Figura 5.7).

Queste risposte confermano come gli studenti siano spesso ancorati all'applicazione meccanica degli algoritmi risolutivi (*"per risolvere il valore assoluto si fanno due casi"*, Figura 5.5), che impedisce loro di effettuare un'osservazione globale del testo, trascurando il reale significato logico degli oggetti matematici manipolati.

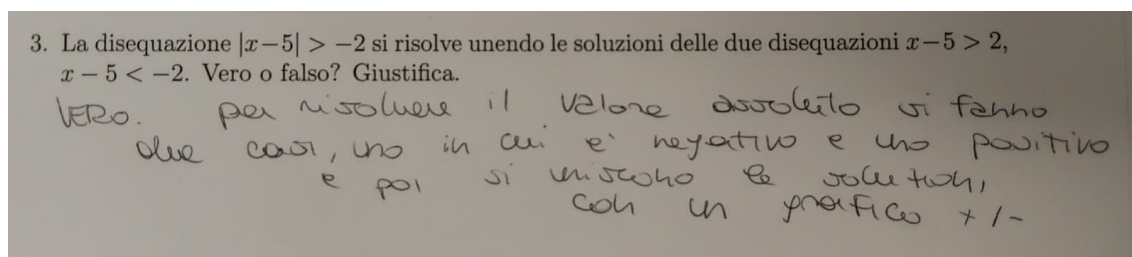


Figura 5.5: Risoluzione del terzo quesito in cui l'affermazione viene giudicata "Vera". La giustificazione evidenzia un approccio puramente algoritmico.

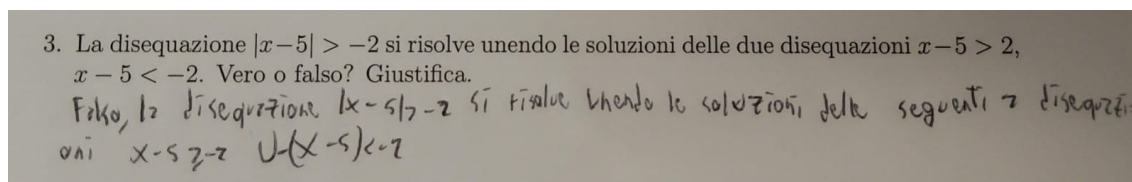
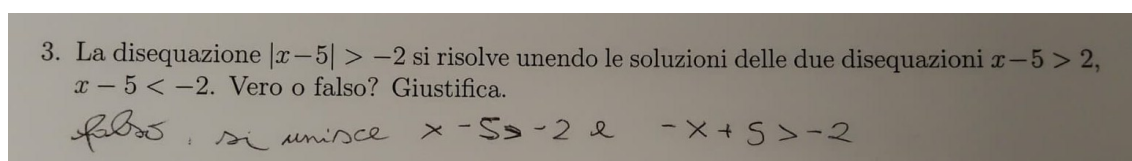


Figure 5.6 e 5.7: Giustificazioni fornite al terzo quesito. Gli studenti riconoscono la falsità dell'affermazione, ma si limitano a correggere l'impostazione algebrica dei due casi, ignorando il significato globale della disequazione.

La seconda fase della mattinata ha visto gli studenti collaborare in piccoli gruppi per analizzare le prove universitarie simulate e commentarle tramite la bacheca condivisa Padlet. L'obiettivo principale, come precedentemente illustrato, non era la semplice correzione degli errori o l'attribuzione di un punteggio numerico, bensì l'indagine delle motivazioni alla base delle difficoltà emerse dai due elaborati.

L'attività ha fatto emergere un notevole spirito critico da parte dei partecipanti. Vestendo i panni del docente, i ragazzi si sono sforzati di analizzare i procedimenti, cercando di comprendere la logica che aveva guidato Mario e Giulia. È emerso come

molti allievi, seppur qualche volta con difficoltà, siano stati in grado di riconoscere negli elaborati l'applicazione di un approccio puramente meccanico, individuando quei momenti in cui ragionare sul significato della disequazione è passato in secondo piano per affidarsi ciecamente a una regola imparata a memoria, ma applicata fuori contesto.

Un riscontro particolarmente significativo proviene, ad esempio, dalle riflessioni lasciate sulla bacheca al termine della correzione. Rispondendo alla domanda sul motivo per cui fosse così “facile” commettere gli stessi errori di Mario o Giulia, un gruppo ha colto in pieno il fulcro del presente studio: *“È facile fare questi errori perché capita di concentrarsi sul procedimento senza capire cosa ci sta dietro”*. Questa frase riassume perfettamente il concetto di matematica strumentale discusso nei capitoli precedenti, dimostrando come gli studenti siano riusciti a identificare autonomamente la presenza di un approccio procedurale. Inoltre, l'affermazione rappresenta il raggiungimento degli obiettivi del laboratorio: la quasi totalità dei partecipanti aveva commesso errori nel questionario sulle disequazioni che indicavano l'applicazione di procedure meccaniche. Tramite un confronto a gruppi e un'attività in cui si è riflettuto in modo critico sugli errori commessi dagli altri, molti hanno compreso autonomamente la natura di quegli ostacoli che loro stessi avevano incontrato nella prima parte della giornata.

Lo stesso livello di consapevolezza metacognitiva si evince dall'analisi dei singoli quesiti. Nel commentare una specifica risoluzione errata di Giulia (Quesito 3), un gruppo ha individuato la causa dello sbaglio in *“nozioni confuse e puramente imparate a memoria”*. Esaminando invece gli svolgimenti di Mario (Quesito 2), gli allievi hanno saputo distinguere con precisione l'errore superficiale di disattenzione dalle concezioni errate profonde, sottolineando che il fallimento procedurale *“era maggiormente un errore teorico, dovuto da una scarsa comprensione del valore assoluto e del suo significato”*.

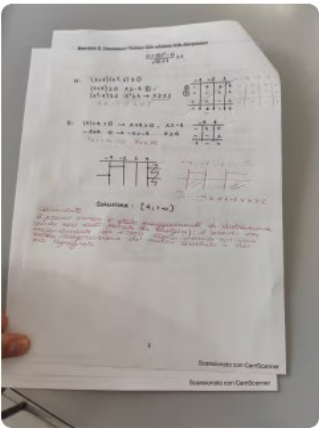
Infine, chiamati a tirare le somme sull'intero elaborato, i partecipanti hanno riconosciuto come le lacune dei finti studenti non fossero isolate o casuali, ma rispondessero a uno schema ricorrente di incomprensione. Un gruppo ha infatti sintetizzato il lavoro conclusivo sottolineando come gli sbagli fossero *“tutti accomunati dalla mancata comprensione di certi elementi matematici (il valore assoluto, per esempio, è stato risolto in modo sbagliato in tutti gli esercizi)”*.

Attraverso questa immedesimazione e la successiva validazione collettiva, l'intervento didattico sembra aver raggiunto il suo scopo. Portando alla luce le difficoltà

di Mario e Giulia e decostruendone i procedimenti errati, i partecipanti hanno avuto l'occasione di riflettere indirettamente sulle proprie prassi risolutive, acquisendo importanti strumenti di consapevolezza per disinnescare la meccanicità delle procedure prima del passaggio all'ambiente universitario.

QUESITO 2

Mario 6



Il primo errore è stato maggiormente di distrazione (perché sono molto gli esercizi da svolgere); il secondo era maggiormente un errore teorico, dovuto da una scarsa comprensione del valore assoluto e del suo significato.

QUESITO 3

Giulia 2



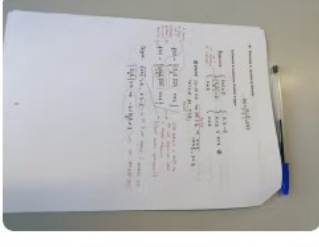
Errori: nozioni confuse e puramente imparate a memoria.

QUESITO 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \sqrt{x+2}$$

Gruppo 4



Gli errori sono dovuti alla mancata comprensione del significato del valore assoluto e di come si risolve. Sono anche dovuti al fatto che non ha capito che, se una radice esiste, essa è sempre positiva.

Mario 6

Figura 5.8: Esempi di interazioni sulla piattaforma Padlet: i commenti dei partecipanti evidenziano l'approccio metacognitivo atteso per l'analisi degli ostacoli procedurali.

Discussione e conclusioni

Il presente studio ha indagato le dinamiche che caratterizzano le difficoltà in matematica, partendo dalla convinzione che l'errore non rappresenti un semplice segnale di fallimento, ma una tappa necessaria all'interno del percorso di apprendimento degli studenti e una risorsa didattica che l'insegnante può valorizzare per orientare l'intervento formativo.

Il quadro teorico tracciato nei primi capitoli ha evidenziato come la ricerca in didattica della matematica suggerisca un cambio di prospettiva fondamentale: l'errore, quando accolto ed interpretato, permette di indagare i processi di pensiero dell'allievo, trasformandosi da sintomo di una "mancanza" a vero e proprio "trampolino" (Borasi, 1996) per costruire un sapere più consapevole. Tuttavia, la prassi didattica tradizionale rimane spesso ancorata a un modello trasmissivo e a quello che Gardner (1991) definisce "il compromesso delle risposte corrette", dove la preoccupazione principale è quella di eliminare la possibilità di sbagliare anziché esplorare le ragioni di tali errori, alimentando involontariamente un apprendimento di tipo strumentale (Skemp, 1976).

In merito alle difficoltà specifiche legate alle disequazioni e al valore assoluto, la letteratura concorda sul fatto che questi concetti costituiscono un ambito in cui si concentrano ostacoli cognitivi ricorrenti. Gli studi mostrano come le difficoltà risiedono principalmente nella natura semantica del compito: gli studenti tendono a replicare acriticamente schemi risolutivi validi per le equazioni, senza possedere una visione globale del problema o una reale comprensione delle relazioni d'ordine e delle proprietà delle funzioni. Questa tendenza porta spesso alla costruzione di modelli mentali rigidi, che riducono la risoluzione di un esercizio a una pura applicazione di regole mnemoniche, precludendo all'allievo quel controllo semantico indispensabile per affrontare concetti matematici più avanzati.

A partire da questo scenario teorico si è mossa l'indagine empirica, condotta su un ampio corpus di prove d'esame di Analisi Matematica I. All'interno di esse si è cercato di verificare se le criticità e gli ostacoli cognitivi documentati dalla letteratura per la scuola secondaria persistano anche tra le matricole universitarie. La metodologia adottata ha permesso di catalogare e misurare la ricorrenza di tali ostacoli, trasformando l'analisi dei singoli passaggi algebrici in dati concreti su cui fondare le nostre riflessioni.

L'analisi qualitativa ha restituito un quadro chiaro sulle competenze con cui le matricole affrontano la transizione tra i due ordini di scuola. Il dato più allarmante riscontrato all'interno dell'indagine è la frequente assenza di controllo semantico sull'esercizio. Molti degli ostacoli emersi sono riconducibili ad una forte prevalenza dell'apprendimento di tipo strumentale (Skemp, 1976), che limita la capacità dello studente di ragionare sulla struttura dell'oggetto matematico. Come testimoniano le Figure 6.1 e 6.2, tale distacco tra procedura e significato spinge talvolta le matricole a eseguire calcoli inutili e rischiosi anche di fronte a espressioni già perfettamente semplificate, manifestando una reazione automatica alla forma visiva dell'esercizio.

Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$
 $x^3 - 4x + 4x^2 - 16 \geq 0$
 $x^3 - 4x + 4x^2 - 16 = 0$

1	+4	-4	-16
-4		-4	0
1	0	-4	16

$(x+4)(x^2-4)$
 $x+4=0 \Rightarrow x=-4$
 $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$-x+4 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4$
 $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

$x \in [-4, +\infty)$

are già scomposto

Cond. di ESISTENZA $x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$

$(|x|+3)(x^2-2) = 1x \cdot x^2 - 2|x| + 3x^2 - 6 \leq 0$ NUMERATORE
 $1x \cdot (x^2-2) + 3(x^2-2) \leq 0$ RACCOLTO (x^2-2) are già a posto ...

Figure 6.1 e 6.2: Protocolli di esami di Analisi Matematica I (Ingegneria del Veicolo, UNIMORE) che mostrano esempi di espansione e scomposizione di un polinomio già fattorizzato.

In entrambi i casi, infatti, gli studenti si trovano di fronte a un numeratore già perfettamente scomposto in fattori. Invece di procedere con lo studio del segno dei singoli fattori, gli allievi sentono la necessità di svolgere le moltiplicazioni. Sviluppano i polinomi, ottengono espressioni di terzo grado e, a quel punto, sono costretti ad applicare la regola di Ruffini o il raccoglimento parziale per tornare, dopo numerose righe di calcoli inutili e a rischio di errore, all'esatta forma di partenza fornita dal testo.

Questi calcoli rappresentano anche un esempio di manifestazione di un contratto didattico disfunzionale (D'Amore, 1999). Lo studente ha interiorizzato la convinzione per cui di fronte alle parentesi sia necessario calcolare, trasformando la matematica in una reazione automatica alla forma visiva dell'esercizio.

Nel valutare i risultati ottenuti, è necessario precisare i limiti riscontrati in questo studio. In primo luogo, l'indagine si è basata sull'analisi di un corpus di prove d'esame preesistente, non progettate ad hoc per gli obiettivi di questa ricerca. Sebbene tale materiale abbia offerto un quadro oggettivo delle difficoltà degli studenti, l'utilizzo di prove già svolte ha impedito di riscontrare la presenza di alcuni ostacoli, che avrebbero richiesto compiti strutturati specificamente per far emergere criticità mirate.

Un secondo limite metodologico riguarda il processo di codifica. Come ampiamente discusso in letteratura (Zan, 2007), l'interpretazione dell'errore non è un'operazione neutra, ma fortemente soggettiva: docenti diversi possono attribuire cause differenti al medesimo comportamento fallimentare. Per garantire una maggiore oggettività, questo tipo di ricerca necessiterebbe idealmente di uno studio incrociato tra più ricercatori, in modo da confrontare le interpretazioni e minimizzare l'influenza del singolo punto di vista.

Infine, l'analisi si è limitata all'interpretazione dei procedimenti scritti sugli elaborati. La mancanza di un'interazione diretta con gli studenti, attraverso interviste o colloqui, ha rappresentato un vincolo significativo, poiché in assenza di un dialogo, la ricostruzione dei processi cognitivi sottesi a un errore rimane un'ipotesi di lavoro e non una certezza, per quanto plausibile alla luce della letteratura didattica. Tali limitazioni sottolineano quindi la necessità di affiancare in futuro analisi quantitative a percorsi sperimentali interattivi, come il laboratorio didattico proposto nelle pagine seguenti.

Il completamento del presente studio è avvenuto attraverso la progettazione e la conduzione di un laboratorio metacognitivo rivolto agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado, finalizzato a testare una possibile strategia di intervento basata sull'analisi consapevole dell'errore. Riflettere insieme ai partecipanti sulle prove d'esame simulate ha confermato come la gran parte delle difficoltà universitarie derivi da false credenze radicate già nel biennio della scuola secondaria. L'attività ha dimostrato che, se guidati, gli allievi sono in grado di passare da una posizione passiva di fronte all'errore a una postura attiva e critica. Il confronto collettivo e l'immedesimazione nei panni del docente hanno permesso ai partecipanti di acquisire strumenti di autoconsapevolezza necessari per disinnescare la meccanicità delle procedure prima del passaggio all'ambiente universitario.

In conclusione, le evidenze raccolte mostrano che la chiave per giungere ad un apprendimento profondo e consapevole sia tentare di decostruire gli automatismi procedurali fossilizzati nella mente degli studenti. Tale pratica non è di facile applicazione, poiché, come emerso durante il laboratorio metacognitivo, l'utilizzo di regole mnemoniche permette agli studenti talvolta di evitare il confronto con ragionamenti complessi, dunque rappresenta per loro un vero e proprio rifugio. Tuttavia, è possibile affermare che l'intervento didattico deve avvenire evitando la ripetizione sterile di esercizi analoghi, favorendo invece strategie che si concentrano sul significato degli oggetti matematici. Occorre dunque che l'insegnamento sposti il proprio baricentro dal puro addestramento algoritmico alla consapevolezza strutturale, in modo che gli studenti non continuino a produrre scritture formalmente corrette ma intrinsecamente prive di significato. Tale approccio richiede di accettare il rischio di una maggiore esposizione dell'allievo alle difficoltà. Tuttavia, l'insegnante deve essere consapevole che gli errori riscontrati rappresentano una risorsa e una tappa necessaria affinché gli studenti attivino processi di pensiero più autonomi e critici.

Bibliografia

- Almog, N., & Ilany, B.-S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 81, pp. 347-364.
- Baccaglioni-Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori Università.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Parigi: Vrin.
- Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2017). Handling Signs in Inequalities by Exploiting Multiple Dynamic Representations – the Case of ALNuSet. *Digital Experiences in Mathematics Education*, vol. 3, pp. 39-69.
- Banerjee, R., & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 80, n. 3, pp. 351-367.
- Bernoulli, J. (1696, giugno). Problema novum ad cujus solutionem invitantur. *Acta Eruditorum*, p. 262-269. Tratto da Internet Archive:
<https://archive.org/details/s1id13206630/page/268/mode/2up>
- Bernoulli, J. (1697). *Lettera a Henri Basnage de Beauval*. Tratto da https://bernoulli.ub.unibas.ch/index.php/1697-07-06_Bernoulli_Johann_I-Basnage_de_Beauval_Henri
- Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1)* (p. 139-142). Bergen, Norway: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Norwood (NJ): Ablex Publishing Corporation.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M.*, (p. 101-117). Louvain la Neuve.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della matematica*. Firenze: La Nuova Italia Editrice.
- Castelnuovo, E. (1965). L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. In A. VV., *Il materiale per l'insegnamento della matematica* (p. 41-65). Firenze: La Nuova Italia Editrice.
- Castelnuovo, E. (1967). È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica? *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 539-549.
- Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Oaxtepec* (p. vol. 3, pp. 231-238). Mexico: Program Committee.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 139-163.
- Demetgul, Z., & Baki, A. (2020). Reflections on Instruction of Absolute Value and Inequalities in a Technology Equipped Classroom: An Action Research. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 91-127.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5, pp. 37-65.
- Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Yetkiner Özel, Z. E. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, vol. 48, pp. 895-907.
- El-khateeb, M. A. (2016). The difficulties of learning the absolute value function among university students. *International Education Studies*, vol. 9, pp 1-8.
- El-khateeb, M. M. (2016). Errors Analysis of Solving Linear Inequalities among the Preparatory Year Students at King Saud University. *Journal of Education and Practice*, vol. 7, n. 12, pp. 124-133.
- Enriques, F. (1936). *Il significato della storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Freguglia, P., & Giaquinta, M. (2010). *The early period of the Calculus of Variations*. Birkhäuser.

- Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 45, pp. 159-173.
- Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed ai movimenti locali*. Tratto da https://archive.org/details/bub_gb_E9BhikF658wC/page/n245/mode/2up
- Gardner, H. (1991). *The Unschooled Mind: How Children Think and How Schools Should Teach*. New York: Basic Books.
- Garuti, R., Bazzini, L., & Boero, P. (2001). Revealing and promoting the students' potential: a case study concerning inequalities. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. vol. 3, pp. 9-16). Utrecht, Netherlands: PME.
- Goldstine, H. H. (1980). *A History of the Calculus of Variations - from the 17th through the 19th century*. Springer.
- Krygowska, Z. (1957). Le développement de l'activité mathématique des élèves et le rôle des erreurs dans cet apprentissage. *Mathematica et Paedagogia*, 170-180.
- Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner errors and misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, vol. 3, n. 3, pp. 36-46.
- Malara, N. A. (2012). Il caso dell'algebra. Mutamenti di prospettiva, convergenze e consolidamenti. *Insegnare*, 52-61.
- MIM. (2026). *Indicazioni Nazionali per i Licei [Bozza di revisione]*. Roma: Ministero dell'Istruzione e del Merito.
- MIUR. (2010a). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali (D.M. 7 ottobre 2010, n. 211)*. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.
- MIUR. (2010b). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici, primo biennio (Direttiva Ministeriale 15 luglio 2010, n. 57)*. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

- MIUR. (2012). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici, secondo biennio e quinto anno (Direttiva Ministeriale 16 gennaio 2012, n. 4)*. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.
- Mutodi, P., Mosimege, M. D., & Maphutha, K. (2023). Learners' misconceptions and errors when solving inequalities. *Mathematics Education Journal*, vol. 7, n. 2, pp. 136-158.
- Papadouris, J. P., Komis, V., & Lavidas, K. (2024). Errors and misconceptions of secondary school students in absolute values: a systematic literature review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
- Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary School Journal*, vol. 112, n. 4, pp. 627-648.
- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 57-71.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, vol 22, pp. 1-36.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Switzer, J. M. (2014). Graphing Inequalities, Connecting Meaning. *Mathematics Teacher*, vol. 107, pp. 580-584.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, vol 12, pp. 151-169.
- Tsamir, P., & Bazzini, L. (2001). Can $x=3$ be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education* (p. Vol. 4, pp. 303-310). Utrecht, Netherlands: PME.
- Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities. *Proceedings of the 26th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4) (p. 289-296). Norwich, UK: PME.

- Tsamir, P., Almog, N., & Tirosh, D. (1998). Students' solutions of inequalities. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. vol. 4, pp. 129-136). Stellenbosch, South Africa: PME.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Tiano, S. (2004). "New errors" and "old errors": The case of quadratic inequalities. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 55, pp. 393-409.
- Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equations and Linear Inequalities. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 8, n. 2, pp. 113-147.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 31, pp. 344-355.
- Ward, J. (2016). *An investigation into the constitution of absolute value inequalities by Grade 12 students in a selection of Western Cape State schools as displayed in students' solutions to a baseline test problem*. Cape Town: University of Cape Town.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Milano: Springer.

Allegati

ALLEGATO A: Prova d'esame simulata svolta dallo studente fittizio Mario Rossi e utilizzata per lo svolgimento del laboratorio didattico descritto nel capitolo 5.

Nome e Cognome: MARIO ROSSI Matricola: 999999 Data: 01/01/2000

Esame di Analisi Matematica I
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria del Veicolo

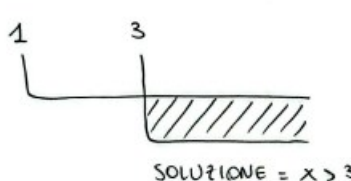
Esercizio 1. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-3} > 0$$

NUMERATORE

$$(x^2+1)(x^2-1) > 0$$
$$(x^2+1)(x^2-1) \rightarrow (x^4+x^2-x^2-1) \rightarrow (x^4-1) > 0$$
$$x^4 > 1 \rightarrow x > 1$$

DENOMINATORE

$$x-3 > 0 \rightarrow x > 3$$


SOLUZIONE = $x > 3$

1

Esercizio 2. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

N: $(x+4)(x^2-4) \geq 0$

$$(x+4) \geq 0 \quad x \geq -4 \quad (1)$$

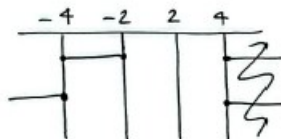
$$(x^2-4) \geq 0 \quad x^2 \geq 4 \rightarrow x \geq \pm 2$$

	-4	-2	2	
②	-	+	+	+
③	-	-	+	+
	-	-	-	+
	-	+	-	+

D: $|x|+4 > 0 \rightarrow x+4 > 0, \quad x > -4$

$$-x+4 > 0 \rightarrow -x < -4 \quad x > 4$$

	-4	4	
	-	+	+
	-	-	+
	+	-	+



Soluzione: $[4; +\infty)$

Esercizio 3. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

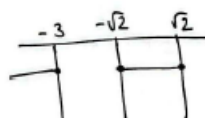
$$\frac{(|x|+3)(x^2-2)}{x+4} \leq 0$$

C.E.: $x+4 \neq 0 \rightarrow x \neq -4$

Una volta fatte le condizioni di esistenza posso moltiplicare entrambi i membri per il denominatore e ottengo:

$$(|x|+3)(x^2-2) \leq 0$$

$$\begin{cases} |x|+3 \leq 0 \rightarrow x \leq -3 \\ x^2-2 \leq 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$



$$x \leq -3 \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Esercizio 4. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \sqrt{x+2}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$\text{DOMINIO: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \left| \frac{x-1}{x} \right| > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 1 \vee x < 1 \quad \textcircled{*} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{*} \text{ perché } |x-1| > 0 \text{ se } |x| > 1 \rightarrow \begin{matrix} x > 1 \\ -x > 1, x < -1 \end{matrix}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \sqrt{x+2} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{-x} \sqrt{x+2} & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Segno: } \sqrt{x+2} > 0, x > -2$$

$$\left| \frac{x-1}{x} \right| > 0 \Rightarrow -1 < \frac{x-1}{x} < 1$$

Esercizio 5. Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{2x-1}{|x|-1} \right)$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

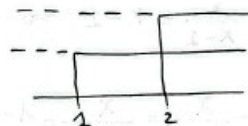
$$D: \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{SEGNO: } \ln \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) > 0$$

$$\frac{2x-1}{x-1} > 1$$

$$\begin{matrix} \swarrow \\ 2x-1 > 1 \\ x > 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \searrow \\ x-1 > 1 \\ x > 2 \end{matrix}$$



$$x < 1 \wedge x > 2$$

Esercizio 6. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\left|\frac{x}{1-x}\right|} = \exp\left|\frac{x}{1-x}\right|$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

D: $\exists$ valore assoluto: $\forall x \in \mathbb{R}$

Studio del segno:

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\left(\frac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \quad \frac{x}{1-x} = x-1 \Rightarrow e^{x-1}$$

$$x < 0 \quad -\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1} = 1-x \Rightarrow e^{1-x}$$

$$x \geq 0 \quad e^{x-1} > 0 \quad \text{se } x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad \checkmark$$

$$x < 0 \quad e^{1-x} > 0 \quad \text{se } 1-x > 0 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1 \quad \checkmark$$

$$f(x) > 0 \quad \text{se } x < 0 \vee x > 1$$

Esercizio 7. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x}}{1-|x|}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

Domínio: $\{]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\}$

$$\text{Segno: } \frac{e^x \sqrt{x}}{1-|x|} = \frac{e^x \sqrt{x}}{1-x} = \frac{e^x \sqrt{x}}{1-x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} 1-x > 0 \\ 1 > x \rightarrow x < 1 \end{matrix} \quad \checkmark$$

Esercizio 8. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$D: x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \vee x=0$$

$$\text{segno: } \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1} \geq 0 \quad x^2 e^{2/x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$e^{2 \log(x)} \cdot e^{2/x} \geq 0$$

$$2 \log(x) + \frac{2}{x} \geq 0$$

$$2 \log(x) \geq -\frac{2}{x}$$

$$e^{-\frac{2}{x}} \geq x$$

$$\text{denominatore: } x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

Esercizio 9. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log x - 3}$$

limitandosi a considerare dominio e segno. Il logaritmo si intende in base e .

$$D \rightarrow f(x) \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

	0		e^3	
-		+		+
-		-		+
+		-		+

$$\log x - 3 > 0 \rightarrow x > e^3$$

$$x \leq 0 \wedge x > e^3$$

Esercizio 10. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$e^{|x|-2} < e$$

Si passa all'esponente

$$|x|-2 < 1 \rightarrow |x| < 3$$

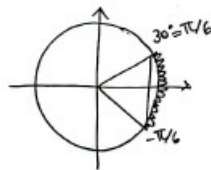
↓

$$-3 < x < 3$$

Esercizio 11. Determinare le soluzioni della seguente disequazione

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S = \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ALLEGATO B: Prova d'esame simulata svolta dalla studentessa fittizia Giulia Bianchi e utilizzata per lo svolgimento del laboratorio didattico descritto nel capitolo 5.

Nome e Cognome: GIULIA BIANCHI Matricola: 1111111... Data: 01/01/2000

Esame di Analisi Matematica I
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria del Veicolo

Esercizio 1. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-3} > 0$$

$$x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

studio l'equazione associata:

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-3)} = 0 \iff (x^2+1)(x^2-1) = 0$$

↓

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

no soluzioni reali

$$(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2=1$$
$$x_1=-1, x_2=1$$

Quindi la disequazione è verificata se $x < -1$ e $x > 1$,
ma $x \neq 3$, quindi l'insieme delle soluzioni ...

$$S = x \in]-\infty, -1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

$$\frac{(x+4)(x^2-4)}{\sqrt{|x|+4}} \geq 0$$

↓

$$x^3 - 4x + 4x^2 - 16 \geq 0$$

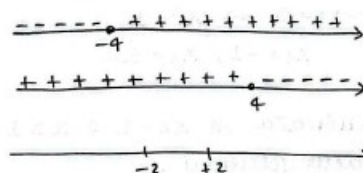
$$x^3 - 4x + 4x^2 - 16 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & +4 & -4 & -16 \\ -4 & -4 & 0 & 16 \\ \hline 1 & 0 & -4 & // \end{array}$$

$$(x+4)(x^2-4)$$

$$x+4=0 \quad x=-4$$

$$x^2-4=0 \quad x=\pm 2$$



$$x \in [-4, +\infty)$$

Esercizio 4. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \sqrt{x+2}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$\text{DOMINIO: } x > 0$$

$$\text{SEGNO: } \frac{x-1}{x} > 0 \rightarrow x > 1$$

$$\frac{x-1}{x} < 0 \rightarrow x < 1$$

$$\sqrt{x+2} > 0 \rightarrow x > -2$$

+	+	+
-	+	+
-	+	+
-2	1	

$$-2 < x < 1 \vee x > 1$$

↓

$$x > 1$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{(|x|+3)(x^2-2)}{x+4} \leq 0$$

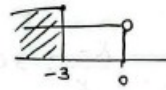
CE: $x+4 > 0$
 $x > -4$

NUM:

$$(|x|+3) \leq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -3 \end{cases} \text{ imp}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

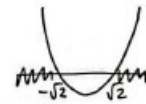


sol: $x \leq -3$

NUM:

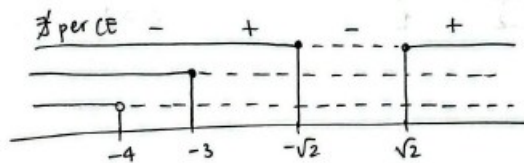
$$(x^2-2) \leq 0$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{8}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = +\frac{2\sqrt{2}}{2} = x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$



$x < -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$

DEN: $x+4 < 0$
 $x < -4$



sol: $-3 \leq x \leq -4 \quad \vee \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Esercizio 5. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{|x|-1}\right)$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

Come primo passaggio studiamo il dominio

$$\exists \text{ logaritmo} \rightarrow \frac{2x-1}{|x|-1} \geq 0 \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/2 \\ |x|-1 > 0 \Rightarrow |x| > 1 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad (*)$$

↓
non ≥ perché è il denominatore e deve essere diverso da zero

$$(*) \quad |x|-1 > 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{ma siccome l'argomento deve essere maggiore di zero, } 0 < x < 1$$



$$D: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1/2\}$$

Segno: $\ln\left(\frac{2x-1}{|x|-1}\right) > 0$

$$\frac{2x-1}{|x|-1} > 1$$

$$2x-1 > |x|-1$$

$$\begin{cases} \text{se } |x| \geq 0 \\ 2x > x \\ x > 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} \text{se } |x| < 0 \\ 2x > -x \\ 3x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{imp.}$$

Esercizio 6. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\left|\frac{x}{1-x}\right|} = \exp\left|\frac{x}{1-x}\right|$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$D: \begin{cases} 1-x \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \\ \left|\frac{x}{1-x}\right| \geq 0 \rightarrow \text{sempre verificato} \end{cases} \quad D: \mathbb{R} - \{1\}$$

Studio del segno: la funzione è pari perché contiene un valore assoluto ✓

Esercizio 7. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x}}{1-x}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$\text{Dominio: } \{]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\}$$

$$\text{segno: } \frac{e^x \sqrt{x}}{1-x} = \frac{e^x \sqrt{x}}{1-x} = e^x \sqrt{x} \geq 0 \quad \begin{array}{l} 1-x > 0 \\ 1 > x \rightarrow x < 1 \end{array} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

Esercizio 8. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1}$$

limitandosi a considerare dominio e segno.

$$D: x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \vee x=0$$

$$\begin{aligned} \text{segno: } \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1} &\geq 0 & x^2 e^{2/x} &\geq 0 \Rightarrow \\ & & e^{2 \log(x)} \cdot e^{2/x} &\geq 0 \\ & & 2 \log(x) + \frac{2}{x} &\geq 0 \\ & & 2 \log(x) &\geq -\frac{2}{x} \\ & & e^{2/x} &\geq x \end{aligned}$$

denominatore:

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

Esercizio 9. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log x - 3}$$

limitandosi a considerare dominio e segno. Il logaritmo si intende in base e.

$$D \rightarrow f(x) \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$\log x - 3 > 0 \rightarrow x > e^3$$

0		e^3	
-		+	+
-		-	+
+		-	+

$$x \leq 0 \wedge x > e^3$$

Esercizio 10. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$e^{|x|-2} < e$$

Si passa all'esponente:

$$|x| - 2 < 1 \rightarrow |x| < 3$$

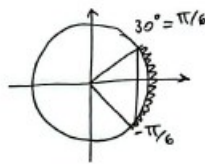
↓

$$-3 < x < 3$$

Esercizio 11. Determinare le soluzioni della seguente disequazione

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S = \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia profonda gratitudine verso la Prof.ssa Chiara Giberti: prima ancora di essere la relatrice di questo lavoro di tesi, è stata la docente che ha consolidato in me il desiderio e la determinazione di intraprendere questa strada. Ogni sua lezione mi ha arricchita di nuove competenze e continui spunti di riflessione, grazie anche all'energia, la professionalità e all'entusiasmo che ha sempre mostrato. Durante la stesura di questa tesi mi ha guidata con costanza e precisione, manifestando fin da subito sostegno e fiducia nei confronti del mio progetto.

Un ringraziamento altrettanto speciale va alla Prof.ssa Michela Eleuteri, che ho avuto modo di incontrare in più occasioni durante questi cinque anni e che ho avuto il piacere di avere come relatrice al termine di questo percorso. Dal primo giorno in cui ho avuto modo di conoscerla, ha rappresentato per me un modello di passione e dedizione per il proprio lavoro e ha sempre dimostrato profonda umanità verso le persone che ha intorno. Durante questo lavoro di tesi le sono grata per i preziosi materiali forniti per l'analisi dei dati, ma specialmente per la fiducia e la stima che ha mostrato nei miei confronti, una spinta essenziale per la mia crescita professionale.

Ringrazio tutti gli studenti del liceo "Ariosto Spallanzani" che ho avuto il piacere di incontrare e affiancare in questi anni. Avete rappresentato per me una ricchezza inestimabile: conoscere le vostre storie e la bellezza delle vostre diversità mi ha permesso di scoprire persone dietro a studenti e di realizzare il privilegio che un'insegnante ha nel poter accompagnare percorsi di crescita così preziosi. Vi ringrazio di cuore per la fiducia che mi avete trasmesso, perché mi ha dato il coraggio di credere in me e nella strada che sto seguendo.

Alla mia famiglia, che spesso in questi anni mi ha visto correre tra studio, lavoro e i miei mille impegni. Vi ringrazio perché, nella frenesia delle mie giornate, siete quella presenza costante che silenziosamente fa il tifo per me anche quando non me ne accorgo. Di voi apprezzo le diversità che vi caratterizzano, poiché da ciascuno so di poter cercare un appoggio unico e speciale. Da mia mamma la presenza, il confronto quotidiano e sincero, l'energia e la determinazione che ho fatto anche un po' mie. Da mio papà, il supporto silenzioso e libero da ogni giudizio, l'estrema sensibilità, il coraggio che mi ha

insegnato nel seguire il proprio cuore. Da Davide, le condivisioni più profonde, la purezza d'animo, la tranquillità che mi trasmette. Da Maddalena, la libertà di parlare di qualunque cosa sentendomi sempre compresa, la gentilezza, la bellezza di scoprire che, pur nelle nostre diversità, guardiamo spesso il mondo con gli stessi occhi. Da Matteo, le chiacchiere leggere, la spontaneità con cui si racconta, l'affettuosità che a volte tenta di mascherare. Da mia nonna Silvana, il sostegno sicuro e costante che ho sempre ricevuto, l'attenzione e la premura quotidiane. Da mia nonna Emilia, l'estrema sincerità e generosità, la bellezza di trovare punti di incontro pur appartenendo a mondi diversi.

Ringrazio tutti i miei amici, senza i quali questi anni sarebbero stati decisamente più impegnativi e monotoni. Grazie a quelli che ci sono da sempre, con cui ho condiviso tanti anni di scoutismo e che ora sono per me come fratelli: siete una boccata d'aria fresca nella frenesia delle mie giornate e lo spazio sicuro dove potermi confidare sentendomi capita e ascoltata. Grazie agli amici che appartengono al mondo del basket, per aver contribuito al mio percorso di crescita personale, oltre che sportiva. In particolare, grazie alle "Stelline", le mie compagne di squadra, poiché la loro energia e vivacità mi dà sempre la forza di superare i miei limiti e affrontare con il sorriso le sfide quotidiane. Grazie alle compagne di classe con cui ho condiviso i tortuosi anni del liceo e che, seppur lungo strade diverse, hanno mostrato supporto e coesione anche in questi anni universitari.

Grazie anche alle amicizie che non fanno parte della mia quotidianità, ma con le quali la sintonia e il legame rimangono sempre invariati. Grazie alla purezza, all'attenzione e alla generosità di Giulia, alle incredibili e innumerevoli affinità che condivido con Betta, all'energia e il desiderio di lanciarsi in nuove avventure che ho in comune con Giulia.

Un grazie particolarmente speciale va a Irene, la spalla su cui da sempre so di potermi appoggiare ogni volta che ne sento la necessità. La tua genuinità e sincerità mi guida e mi sprona ad essere la versione più autentica di me, ricordandomi realmente come essere migliori non significhi essere infallibili. Grazie per aver imparato a conoscere i lati più profondi di me e per avere la sensibilità di dirmi sempre ciò di cui ho bisogno, anche contro ciò che vorrei sentirmi dire. Grazie per aver saputo accogliere le mie fragilità e per esserti fatta sentire vicino anche nei periodi di lontananza fisica.

Infine, grazie a Manu, il compagno di viaggio con cui sognavo di vivere questo momento sin dal primo giorno. La me di qualche anno fa proverebbe conforto nel sapere che avrebbe affrontato questi anni al tuo fianco e immensa gratitudine nel realizzare che avremmo raggiunto questo traguardo insieme. Un grazie speciale va alla premura, all'attenzione e alla comprensione che hai mostrato nei miei momenti più duri, ai piccoli gesti con cui hai sempre cercato di sollevarmi l'umore e ricaricare le mie energie. Grazie per avermi teso la mano anche quando so che è stato difficile farlo, per sapermi ascoltare anche quando sembra impossibile comprenderci, per essere il tifoso numero uno della mia felicità. Rappresenti per me il porto sicuro dove so che potrò sempre sentirmi accolta e incoraggiata.