

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Scienze Fisiche Informatiche e Matematiche

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dal rigore storico alla trasposizione didattica: evoluzione e insegnamento del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Relatore:
Dott. Benassi Carlo

Tesi di Laurea di:
Benedini Alice

Anno Accademico 2025/2026

Introduzione

Questa tesi è dedicata allo studio del teorema fondamentale sia dal punto di vista della sua introduzione storica che da quello della prassi didattica.
Nella maggior parte dei manuali universitari e in gran parte di quelli per le scuole superiori, l'enunciato del teorema fondamentale viene diviso in due parti. Nella prima parte, che è quella a cui di solito i libri attuali danno proprio il nome di *teorema fondamentale*, si afferma che, data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, si ha che

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

Nella seconda parte si afferma che, con le stesse ipotesi di continuità su f, se F è una sua primitiva si ha che

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(a) - F(b) \tag{2}$$

La 2 viene talvolta indicata come la *formula fondamentale del calcolo integrale* e spesso anche come *teorema di Torricelli-Barrow*.
Dietro l'apparente linearità di questa formulazione si nasconde un ostacolo ampiamente riscontrato nella pratica didattica, che fa si che molti studenti non ne colgano il significato profondo. Nei libri di testo più diffusi e adottati dalle scuole superiori, infatti, lo studio dell'integrazione inizia con la definizione di integrale indefinito, presentandolo dunque fin da subito come l'inverso della derivazione. Di conseguenza, quando si arriva a introdurre l'integrale definito, il teorema fondamentale del calcolo rischia di essere percepito dagli studenti non come un risultato nuovo e importante, ma come una tautologia, una conferma di quanto già appreso. Negli esercizi applicativi, inoltre, esso viene sistematicamente utilizzato come regola di calcolo, facendo così scivolare in secondo piano il fatto che esso stabilisca un legame intrinseco tra il concetto di accumulazione e quello di variazione istantanea.

In questo scenario, lo studio dell'evoluzione storica del teorema può offrire una prospettiva privilegiata perché la relazione tra derivazione e integrazione non è infatti nata nella forma che oggi ritroviamo nei manuali, ma si è sviluppata progressivamente partendo dalla risoluzione di problemi fisici e geometrici. Ricostruire questa evoluzione consente di riportare in primo piano le domande e i problemi originari che hanno guidato la nascita del teorema fondamentale, mostrando come esso si sia poi formalizzato grazie anche all'evoluzione degli strumenti e dei fondamenti dell'Analisi. Questa indagine può anche contribuire alla progettazione di un percorso didattico, rivolto alla scuola secondaria di secondo grado, per trasmettere agli studenti una comprensione più profonda e consapevole del significato del teorema.

Entriamo ora nel dettaglio dei contenuti dei singoli capitoli. Il primo capitolo è dedicato alle origini seicentesche del teorema fondamentale. L'analisi prende avvio dai problemi delle tangenti e delle quadrature, a lungo affrontati attraverso metodi distinti, e considera le intuizioni fisiche di Evangelista Torricelli e geometriche di Isaac Barrow

che hanno permesso di riconoscere l'intimo collegamento che c'è tra questi due problemi e il loro carattere reciproco. Il capitolo 1 prosegue con l'analisi dei contributi di Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, che hanno trasformato le intuizioni di Torricelli e Barrow in metodi di carattere generale, ponendole alla base del calcolo infinitesimale.

Il secondo capitolo affronta la trasformazione dei fondamenti del calcolo tra il XVIII e il XIX secolo, concentrandosi in particolare sui contributi di Joseph-Louis Lagrange e Augustin-Louis Cauchy. La ricerca di una fondazione rigorosa dell'Analisi viene esaminata alla luce delle difficoltà legate all'uso degli infinitesimi e alla definizione di limite. In questo contesto, il confronto tra l'impostazione algebrica di Lagrange e quella di Cauchy permette di approfondire il passaggio verso una concezione dell'integrale definito fondata su una definizione autonoma basata sul concetto di limite. Vedremo, in particolare, come questa nuova definizione abbia portato Cauchy a formulare e dimostrare il teorema fondamentale utilizzando un'impostazione che è sostanzilamente la stessa che ancora oggi troviamo nei libri di testo.

Il terzo capitolo amplia la prospettiva storica esaminando come l'evoluzione del concetto di funzione abbia portato alla necessità di definire in modo più generale l'integrale. Ci concentriamo in particolare sulla teoria dell'integrazione alla Riemann in quanto è quella che tutt'ora viene presentata nella scuola secondaria di secondo grado. Tra i risultati analizzati in questo capitolo ci sono una dimostrazione del teorema fondamentale che è citata in un articolo di Vitali e una riformulazione del teorema fondamentale dovuta a Volterra, che è molto generale e semplice da dimostrare, ma che purtroppo è pressoché dimenticata e assente anche nei libri di testo universitari. Il capitolo si conclude con un paragrafo dedicato all'integrale di Henstock, che è molto più generale dell'integrale di Riemann, pur avendo una definizione molto simile. Nell'ambito dell'integrazione alla Henstock si ha che ogni funzione che ammette una primitiva è integrabile e per essa vale il teorema fondamentale.

Il quarto capitolo è incentrato sul piano didattico. In primo luogo, viene analizzata la trattazione del teorema fondamentale del calcolo integrale nel manuale scolastico *5 Matematica.blu 2.0*, uno dei più diffusi nella scuola superiore, con l'obiettivo di esaminare le scelte espositive e le implicazioni didattiche della presentazione proposta. Infine viene elaborata una proposta didattica destinata alle classi quinte dei licei scientifici per introdurre il teorema fondamentale.

Indice

Introduzione **1**

1 Le origini storiche del teorema nel Seicento: da Torricelli e Barrow a Newton e Leibniz **5**
1.1 Il problema delle tangenti e delle quadrature 6
1.2 Evangelista Torricelli 7
1.2.1 L'intuizione cinematica del rapporto inverso tra tangenti e quadrature 7
1.3 Isaac Barrow 12
1.3.1 L'inversione geometrica tra tangenti e quadrature nelle *Lectiones Geometricae* 13
1.3.2 Analisi concettuale della dimostrazione di Barrow 16
1.3.3 Il metodo algebrico-differenziale nell'appendice alla Lezione X . . . 18
1.4 La nascita del calcolo infinitesimale 18
1.4.1 La disputa sull'invenzione del calcolo 19
1.5 Isaac Newton 20
1.5.1 La visione dinamica del teorema 22
1.6 Gottfried Wilhelm Leibniz 24
1.6.1 La prospettiva geometrico-differenziale del teorema 25

2 I fondamenti del teorema tra Settecento e Ottocento: dalla svolta di Lagrange al rigore di Cauchy **28**
2.1 La crisi dei fondamenti nel Settecento 28
2.1.1 La nozione di limite e i suoi vincoli concettuali 30
2.1.2 La concezione dell'integrale 31
2.2 Joseph-Louis Lagrange 32
2.2.1 La ricerca dei fondamenti: le motivazioni teoriche e didattiche . . . 34
2.2.2 La prospettiva algebrica: una fase di transizione 34
2.2.3 Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 36
2.3 Augustin-Louis Cauchy 38
2.3.1 La definizione di limite e il rigore analitico 39
2.3.2 Le motivazioni storiche della nuova definizione di integrale Cauchy 40
2.3.3 I precursori del XVIII secolo: Euler, Lacroix e Poisson 41
2.3.4 L'integrale definito: definizione e esistenza 42

2.3.5 Il teorema fondamentale del calcolo integrale di Cauchy 44

3 Estensioni dell'integrale e generalizzazioni del teorema fondamentale 47
3.1 L'evoluzione del concetto di funzione 48
3.2 Bernhard Riemann 49
3.2.1 La definizione di integrale definito 51
3.3 Sviluppi e generalizzazioni del teorema fondamentale 53
3.3.1 Il contributo di Vito Volterra 53
3.3.2 Il contributo di Giuseppe Vitali 55
3.4 Ralph Henstock 59
3.4.1 La definizione di integrale secondo Henstock 60
3.4.2 Proprietà fondamentali 62
3.4.3 Forma universale del teorema fondamentale del calcolo integrale . . 67

4 Dal significato storico al problema didattico: una proposta per l'insegnamento del teorema fondamentale del calcolo integrale 69
4.1 L'analisi della manualistica scolastica: il caso di *5 Matematica.blu 2.0* . . 69
4.1.1 Analisi dell'approccio presentato nel libro di testo 71
4.2 Quadro teorico di riferimento 73
4.2.1 Il Principio di Necessità di Harel 73
4.2.2 Thompson: immagini di tasso, covariazione e accumulazione 73
4.2.3 Bressoud e la prospettiva storico-epistemologica 74
4.3 La Proposta Didattica 75
4.3.1 Obiettivi 75
4.3.2 Target e prerequisiti 75
4.3.3 Riferimenti alle Indicazioni Nazionali 76
4.3.4 Descrizione della proposta: dalla ricostruzione dello spazio percorso al teorema fondamentale del calcolo integrale 76
4.3.5 Il laboratorio GeoGebra: esplorare l'accumulazione e la precisione delle stime 81
4.3.6 Dalla funzione di accumulazione al teorema fondamentale del calcolo integrale 85
4.3.7 Organizzazione del percorso 87

Capitolo 1

Le origini storiche del teorema nel Seicento: da Torricelli e Barrow a Newton e Leibniz

In questo capitolo vengono ripercorse le origini storiche e le evoluzioni concettuali che hanno condotto alla scoperta della relazione di reciprocità tra l'operazione di integrazione e quella di derivazione, nucleo fondante di quello che oggi conosciamo come teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI). L'analisi prende le mosse dall'evoluzione dei due grandi problemi della geometria classica, a lungo considerati del tutto indipendenti: il *problema delle tangenti* — nato in ambito geometrico e poi sviluppatosi in senso dinamico con lo studio delle velocità istantanee — e il *problema delle quadrature*, volto alla misurazione delle aree delimitate da contorni curvilinei mediante il metodo di esaustione e la teoria degli indivisibili.

È fondamentale precisare che, persino di fronte ai contributi decisivi di Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, non si può ancora parlare di teorema fondamentale nell'accezione rigorosa e formale dell'analisi moderna: all'epoca mancavano infatti nozioni teoriche oggi imprescindibili, prima fra tutte il concetto astratto di funzione, unitamente a definizioni rigorose di limite, continuità e numero reale. La matematica del Seicento operava direttamente su curve geometriche, quantità fluenti o differenziali infinitesimali. Ciò che venne realmente scoperto e indagato fu la profonda natura di operazioni inverse che lega il calcolo dell'area e la ricerca della retta tangente.

Su queste premesse, il capitolo analizzerà nel dettaglio come tale carattere reciproco sia emerso dapprima nelle intuizioni geometriche e fisiche di Evangelista Torricelli e Isaac Barrow, per poi essere trasformato da Newton e Leibniz — attraverso i rispettivi approcci, l'uno dinamico-cinematico e l'altro geometrico-differenziale — in un algoritmo algebrico universale, creando il ponte ideale verso la successiva formalizzazione del teorema.

1.1 Il problema delle tangenti e delle quadrature

Il problema delle tangenti nasce da un'esigenza originariamente di natura geometrica e dinamica, ovvero la determinazione della retta tangente a una curva piana data in un suo generico punto. Nell'antichità classica e in particolare nella tradizione ellenistica, questo concetto veniva inteso principalmente in termini statici: per Euclide la tangente alla circonferenza era la retta esterna che toccava la figura in un unico punto formando un angolo retto con il raggio, mentre Apollonio di Perga estese tale nozione alle sezioni coniche mediante proprietà di simmetria e proporzionalità tra segmenti. Con il XVII secolo e l'introduzione della cinematica nello studio delle curve piane, il problema assunse un nuovo significato fisico: determinare la direzione della tangente significava calcolare la direzione della velocità istantanea di un punto materiale in movimento lungo una traiettoria. Tra i primi a proporre metodi geometrici avanzati per la ricerca delle tangenti figurano René Descartes e Pierre de Fermat. Cartesio, introducendo il metodo delle circonferenze tangenti, legò il problema della tangenza all'esistenza di radici doppie in equazioni algebriche; Fermat, d'altro canto, sviluppò un celebre algoritmo fondato sul concetto di "adequazione" (*adaequatio*) che anticipava l'idea moderna di incremento infinitesimale e di limite.

Il problema delle quadrature, al contrario, mirava alla misurazione quantitativa dell'estensione superficiale di figure piane delimitate da contorni curvilinei. Per rispondere a questa esigenza, i matematici della Grecia antica, in primis Eudosso di Cnido e Archimede di Siracusa, svilupparono il rigoroso *metodo di esaustione*. Tale approccio prevedeva l'approssimazione progressiva dell'area curvilinea mediante poligoni inscritti e circoscritti con un numero crescente di lati; sebbene logicamente ineccepibile e in grado di evitare i paradossi del continuo e dell'infinito mediante dimostrazioni per assurdo, il metodo risultava estremamente faticoso e privo di una valenza algoritmica generale, richiedendo una dimostrazione specifica e ad hoc per ciascuna figura geometrica esaminata. Nel XVII secolo, la necessità di superare la rigidità dell'esaustione portò alla nascita del "metodo degli indivisibili" ideato da Bonaventura Cavalieri e perfezionato da Evangelista Torricelli, in cui l'area veniva concepita come l'accumulazione di un numero infinito di segmenti infinitesimali o rette parallele.

Per gran parte del Seicento, la ricerca della tangente (da cui sarebbe nato il calcolo differenziale) e il calcolo dell'area (origine del calcolo integrale) vennero affrontati da scuole di pensiero distinte. Fu solo attraverso il progressivo processo di algebrizzazione della geometria avviato da Cartesio e portato avanti da matematici quali Frans van Schooten, Jan Hudde e René François de Sluse che si cominciò a scorgere una sottile corrispondenza tra i due ambiti. Tuttavia, il salto qualitativo decisivo avvenne quando ci si rese conto che i due problemi erano intimamente collegati: trovare la tangente a una curva rappresentava il processo duale del calcolo dell'area racchiusa dalla curva stessa.

1.2 Evangelista Torricelli

Cenni biografici Evangelista Torricelli nacque a Faenza il 15 ottobre 1608 in una famiglia di modeste condizioni sociali[20]. Riconoscendone le straordinarie doti intellettuali, la famiglia lo affidò allo zio paterno, fra' Jacopo, monaco camaldolese, il quale si occupò della sua prima educazione prima di farlo entrare nel collegio dei Gesuiti nel 1624, dove studiò matematica e filosofia fino al 1626. Successivamente si trasferì a Roma, dove fu allievo privato e segretario di Benedetto Castelli (docente alla Sapienza), approfondendo la matematica, la meccanica, l'idraulica e l'astronomia. A Roma entrò in contatto con l'opera di Galileo Galilei, di cui divenne fervido sostenitore e con il quale intraprese una corrispondenza scientifica. A causa dei rischi legati all'Inquisizione dopo la condanna di Galileo del 1633, Torricelli orientò le sue ricerche verso settori della matematica e della fisica meno controversi. Nel 1641 completò gran parte dei suoi studi di meccanica e cinetica, poi raccolti nell'opera *De motu gravium*. Nello stesso anno si trasferì ad Arcetri per affiancare il maestro Galileo, oramai anziano e cieco. Vi rimase fino alla morte di Galileo (gennaio 1642); in seguito, il Gran Duca di Toscana Ferdinando II lo nominò suo successore come matematico della corte granducale a Firenze, cattedra che mantenne per il resto della vita.

Torricelli è celebre per aver dimostrato l'esistenza del vuoto in natura e per aver scoperto il principio del barometro. Nel 1643 progettò il famoso esperimento (poi eseguito da Vincenzo Viviani) del tubo riempito di mercurio invertito in una vaschetta: dimostrò che il mercurio scendeva arrestandosi a una determinata altezza non per via del "horror vacui", ma a causa della pressione atmosferica esterna esercitata sulla superficie del fluido. Torricelli si distinse anche come abilissimo costruttore di strumenti ottici, lavorando lenti per cannocchiali e microscopi di altissima qualità e precisione. Morì prematuramente a Firenze il 25 ottobre 1647, all'età di soli 39 anni, a causa di una febbre tifoide. Gran parte dei suoi manoscritti rimase inedita per secoli e la loro prima edizione completa venne pubblicata soltanto nel XX secolo.

1.2.1 L'intuizione cinematica del rapporto inverso tra tangenti e quadrature

L'origine dell'intuizione fondamentale che lega l'operazione di quadratura a quella della costruzione della tangente risiede nel passaggio dalla geometria pura all'interpretazione fisica dei problemi matematici [6]. Risulta indispensabile richiamare i contributi di Galileo Galilei: è infatti nel suo approccio alla meccanica che la relazione tra velocità e spazio percorso comincia a essere rappresentata in forma diagrammatica, fornendo il terreno concettuale da cui muoveranno poi le formulazioni di Torricelli e Barrow.

Un richiamo ai contributi di Galileo Galilei Nelle pagine della terza giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), Galileo introduce la rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato. Assumendo il



Figura 1.1: Evangelista Torricelli (1608-1647)

tempo t sull'asse delle ascisse e la velocità v su quello delle ordinate, la legge del moto

$$v = gt \qquad (g \text{ costante})$$

viene resa diagrammaticamente come una retta passante per l'origine. Galileo dimostra che lo spazio s percorso dal grave nell'intervallo di tempo t corrisponde all'area del triangolo sotteso dalla retta, ovvero:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

In termini di analisi moderna, l'area calcolata da Galileo rappresenta la quadratura del diagramma della velocità, ovvero l'area del triangolo OtP (vedi figura 1.2):

$$s = \int_0^t g\tau \, d\tau$$

Nel dialogo della quarta giornata, Galileo stabilisce la legge fondamentale della composizione vettoriale dei moti per determinare la traiettoria descritta da un proiettile. Considerando un proiettile lanciato orizzontalmente nell'origine O con velocità iniziale a lungo l'asse x, in assenza di gravità il corpo percorrerebbe tale asse di moto rettilineo uniforme. Per effetto della sola gravità, invece, esso cade di moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale y. Dalla composizione simultanea dei due moti, trascorso un

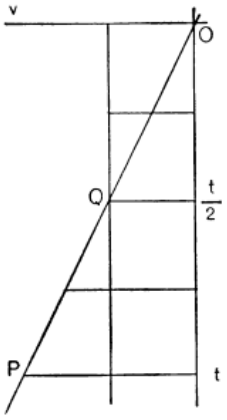


Figura 1.2

tempo t, la posizione del proiettile è descritta dal sistema:

$$\begin{cases} x = at \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Esplicitando il parametro temporale t, si ricava l'equazione della traiettoria parabolica:

$$y = \frac{g}{2a^2}x^2$$

Galileo evidenzia che il parametro della parabola, espresso dalla quantità $\frac{a^2}{g}$, rappresenta il doppio dello spazio che un grave deve percorrere in caduta libera lungo l'asse y per acquisire una velocità pari a quella del lancio orizzontale a.

La prosecuzione degli studi galileiani in Torricelli Le ricerche galileiane vengono riprese e sviluppate pochi anni dopo da Evangelista Torricelli nel trattato *De motu gravium* (1644). In quest'opera, Torricelli determina la velocità istantanea con cui il proiettile continuerebbe il proprio moto lungo la tangente qualora, in un dato istante, cessasse l'azione della forza acceleratrice; in tale circostanza, il corpo proseguirebbe di moto rettilineo uniforme lungo la retta tangente.

Il problema viene ulteriormente generalizzato negli appunti inediti stilati da Torricelli prima della morte nel 1647 (raccolti nel volume I, parte II, delle *Opere* pubblicate a Faenza nel 1919). Ponendosi in una prospettiva puramente teorica, Torricelli analizza il moto di un punto materiale su una retta secondo una legge oraria generica. In un primo diagramma v-t, analogamente a quanto proposto da Galileo per il moto vario, Torricelli stabilisce che lo spazio s descritto dal punto nell'intervallo compreso tra gli istanti t_1 e t_2 corrisponde geometricamente all'area della regione di piano compresa tra la curva della velocità, l'asse delle ascisse e le rette verticali $t = t_1$ e $t = t_2$, ovvero:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

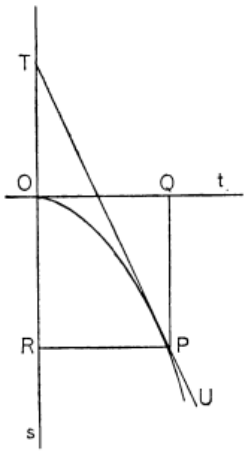


Figura 1.3: Rappresentazione geometrica del metodo cinematico di Torricelli per la determinazione della tangente e della velocità istantanea.

Successivamente, Torricelli introduce un secondo diagramma cartesiano per rappresentare lo spazio s in funzione del tempo t.

Scegliendo l'asse t orizzontale e l'asse s verticale (orientato verso il basso), il grafico $s(t)$ può essere interpretato — in virtù del principio di sovrapposizione dei moti — come la traiettoria reale di un proiettile lanciato orizzontalmente dall'origine O con velocità unitaria ($v_x = 1$) e soggetto contemporaneamente a una caduta verticale regolata dalla legge $s(t)$ in esame.

Per determinare la velocità del proiettile nel generico punto $P(t, s)$ della traiettoria, si ipotizza che all'istante t cessi l'accelerazione verticale: il mobile proseguirà quindi lungo la retta tangente PU di moto rettilineo uniforme con la velocità vettoriale v_P posseduta in P, risultante della componente orizzontale unitaria e della componente verticale incognita. Immaginando di invertire il moto del punto lungo la tangente, esso percorrerà il segmento PT nell'intervallo temporale t impiegato originariamente per spostarsi da O a P (essendo la velocità orizzontale costante e pari a 1). Ne consegue che il modulo della velocità totale in P è espresso dal rapporto $\dfrac{PT}{RP}$, mentre la componente verticale corrisponde al rapporto $\dfrac{RT}{RP}$, dove $RP = t$.

Riconsiderando la curva come rappresentazione funzionale dello spazio $s = QP$ in funzione del tempo $t = RP$, la componente verticale della velocità coincide con la velocità istantanea $v(t)$ del mobile lungo l'asse s. Si giunge così alla relazione geometrica:

$$v = \frac{RT}{RP} = \operatorname{tg} \widehat{RPT}$$

che, espressa nel formalismo del calcolo infinitesimale moderno, equivale a:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Pur condotta su classi di curve specifiche (parabole di ordine generico), l'indagine di Torricelli mostra chiaramente la consapevolezza del carattere di reciprocità tra le due operazioni fondamentali:

1. la **quadratura** (o integrazione), che determina lo spazio percorso nota la funzione velocità;

2. la **costruzione della tangente** (o derivazione), che determina la velocità istantanea nota la legge oraria dello spazio.

Portata e limiti storici dell'intuizione torricelliana L'analisi degli scritti postumi di Torricelli solleva una questione epistemologica centrale: in quale misura il matematico è stato consapevole della portata generale della reciprocità tra quadratura e costruzione delle tangenti? Diversi elementi storiografici suggeriscono che i tempi non fossero ancora maturi per cogliere appieno le potenzialità di tale relazione, che avrebbero portato ai loro frutti solo con Newton e Leibniz.

Anzitutto, l'approccio di Torricelli rimane prevalentemente fisico e legato alla risoluzione del problema delle tangenti. Egli considera la velocità come nota a priori, quindi determinata non per via analitica ma con un procedimento meccanico, e la sfrutta per determinare lo spazio percorso tramite un processo che sostanzialmente corrisponde all'integrazione e, successivamente, per costruire la tangente alla curva.

Si consideri, a titolo esemplificativo, il moto di un punto la cui velocità cresca proporzionalmente al quadrato del tempo, $v(t) = ct^2$. Lo spazio percorso $s(t)$ si ottiene per integrazione:

$$s(t) = \int_0^t c\tau^2 \, d\tau = \frac{ct^3}{3}.$$

La traiettoria corrispondente nel piano (t, s) è una parabola cubica. La tangente in un generico punto P (Figura 1.3) viene definita come la diagonale del rettangolo i cui lati paralleli agli assi t e s sono proporzionali alla velocità orizzontale (unitaria) e verticale (ct^2). In questo modo, Torricelli ricava geometricamente che la sottotangente RT sull'asse s è tripla dell'ordinata OR, giungendo alla regola costruttiva per la parabola cubica senza applicare un algoritmo di derivazione in senso moderno.

La limitazione fondamentale dell'approccio torricelliano risiede nella mancanza di un metodo di derivazione del tutto generale. Sebbene Fermat avesse già sviluppato nel 1638 un metodo per le tangenti basato sul simbolismo della geometria analitica, tale approccio non era ancora diffuso nell'ambiente matematico italiano dell'epoca, e non vi è traccia di una sua assimilazione negli scritti di Torricelli.

La mancata percezione del teorema fondamentale nella sua veste operativa non deve sorprendere: anche vent'anni più tardi, Barrow — pur ritrovando la medesima relazione di reciprocità per via geometrica — non ne svilupperà un algoritmo sistematico di calcolo, cosa che avverrà con i lavori di Newton e Leibniz.

1.3 Isaac Barrow

La seconda figura chiave nell'evoluzione storica del teorema fondamentale del calcolo integrale è il matematico inglese Isaac Barrow. Vissuto nel diciassettesimo secolo, la sua opera *Lectiones Geometricae* (1670) fa da ponte tra la tradizione geometrica del passato e la nascita del calcolo infinitesimale. Da un lato, Barrow raccoglie l'eredità degli studi della Scuola Italiana (Galileo Galilei e i suoi allievi Bonaventura Cavalieri ed Evangelista Torricelli), in cui nasce il concetto di area come somma di "rettangoli infinitesimali" (segmenti infiniti), ripreso a sua volta a partire dal metodo di esaustione di Archimede. Dall'altro, sul piano dei rapporti storici e scientifici, svolse un ruolo di primo piano nei confronti di Newton e Leibniz. A Cambridge fu mentore e sostenitore del giovane Newton, di cui riconobbe subito lo straordinario talento, incoraggiandone i primi lavori fino a giungere, nel 1669, a cedergli la prestigiosa cattedra Lucasiana. Per quanto riguarda Leibniz, pur avendo il filosofo tedesco sviluppato un sistema di calcolo autonomo, l'opera di Barrow rappresentò una fonte d'ispirazione fondamentale: Leibniz acquistò una copia delle *Lectiones* nel 1673, e diversi matematici dell'epoca evidenziarono una chiara continuità tra le costruzioni geometriche di Barrow e la successiva formalizzazione leibniziana [8].

È interessante notare che le *Lectiones*, opera in cui dimostra, sfruttando un approccio geometrico, che il problema delle tangenti e quello delle quadrature sono uno l'inverso dell'altro, possono essere considerate a tutti gli effetti il primo vero e proprio manuale pubblicato di calcolo infinitesimale della storia [11]. La sua pubblicazione precede addirittura di 67 anni la stampa del trattato sulle flussioni di Newton (scritto attorno al 1671 ma edito nel 1736) e di quasi un secolo l'*Analyse des Infiniment Petits* del Marchese de L'Hospital (1768) che è uno dei più celebri testi di Analisi del 1700. A differenza dei testi successivi, tuttavia, l'opera di Barrow è scritta nel latino scientifico dell'epoca e adotta un rigido stile euclideo, in cui le dimostrazioni sono condotte su figure geometriche anziché tramite manipolazioni algebriche di limiti, concetto al tempo non ancora formalizzato.

Cenni biografici Isaac Barrow nacque a Londra nell'ottobre del 1630 in una famiglia di mercanti di tessuto di salda fede monarchica. Frequentò la Felsted School e fu ammesso nel 1643 al Trinity College di Cambridge, dove si distinse rapidamente per la sua prodigiosa memoria e per una straordinaria versatilità negli studi classici, teologici e scientifici. Barrow apprese la geometria classica da autodidatta, curando nel 1655 un'edizione sintetica e semplificata degli *Elementi* di Euclide che si affermò per oltre mezzo secolo come il testo di riferimento nelle scuole d'Inghilterra [17].

A causa del clima politico turbolento legato alla guerra civile e alla sua aperta fedeltà alla causa monarchica durante il regime di Oliver Cromwell, nel 1655 Barrow si vide ostacolata la nomina alla cattedra di Greco a Cambridge e intraprese un lungo viaggio di formazione di quattro anni in Europa e nel Mediterraneo orientale (toccando Parigi, Firenze, Smirne, Costantinopoli e Venezia). Tappa cruciale di questo itinerario fu il soggiorno a Firenze tra il 1656 e il 1657: lavorando presso la Biblioteca Medicea, entrò in diretto contatto con Vincenzo Viviani, ultimo discepolo di Galileo Galilei. Attraverso

questo proficuo scambio scientifico, Barrow assimilò l'eredità della Scuola matematica italiana, approfondendo il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e le intuizioni di Evangelista Torricelli sulla reciprocità tra la ricerca delle tangenti e la quadratura delle aree.

Rientrato in patria dopo la Restaurazione monarchica del 1660, fu nominato Professore Regio di Greco a Cambridge e, nel 1662, professore di geometria al Gresham College di Londra. Nel 1663 divenne il primo titolare della prestigiosa Cattedra Lucasiana di matematica a Cambridge. In questo periodo elaborò i suoi corsi accademici più rilevanti, poi raccolti nelle tre opere fondamentali: le *Lectiones Mathematicae* (tenute tra il 1664 e il 1666), le *Lectiones Opticae* (1669) e soprattutto le *Lectiones Geometricae* (1670). In quest'ultimo trattato, Barrow ricondusse le intuizioni geometrico-fisiche del Seicento a un quadro teorico rigoroso, fornendo una delle prime dimostrazioni della natura inversa tra derivazione e integrazione — la cosiddetta *parte della primitiva* del teorema fondamentale del calcolo integrale, nota nella tradizione didattica italiana come teorema di Torricelli-Barrow.

Durante gli anni dell'insegnamento lucasiano, Barrow svolse un ruolo determinante come mentore del giovane Isaac Newton, che frequentò le sue lezioni a partire dal 1664. Riconoscendo l'eccezionale genio dell'allievo, Barrow lo incoraggiò costantemente negli studi matematici, lo assistette nella revisione dei suoi lavori e ne promosse i primi scritti inediti (tra cui il fondamentale trattato *De analysi*). Nel 1669, desideroso di dedicarsi interamente agli studi teologici e alla carriera ecclesiastica, Barrow si dimise spontaneamente dalla cattedra raccomandando Newton come suo unico e naturale successore.

Nel 1673 fu nominato dal re Carlo II d'Inghilterra Rettore (*Master*) del Trinity College, carica in cui promosse con grande dedizione la costruzione della celebre biblioteca dell'istituto progettata dall'architetto Christopher Wren. La sua intensa parabola scientifica e culturale si interruppe prematuramente a Londra il 4 maggio 1677, all'età di soli quarantasei anni.

1.3.1 L'inversione geometrica tra tangenti e quadrature nelle *Lectiones Geometricae*

Abbiamo già sottolineato che Barrow fornì una delle prime dimostrazioni della natura inversa del problema delle tangenti e delle quadrature (derivazione e integrazione). A sostegno di questa affermazione possiamo analizzare un particolare passaggio tratto dal testo originale dell'opera *Lectiones Geometricae* [1], contenuto nella Lezione X: la proposizione 11 con relativa dimostrazione.

Premesse concettuali e vincoli del formalismo di Barrow Prima di analizzare il contenuto della proposizione, è opportuno formulare alcune precisazioni storiografiche e concettuali fondamentali:

- **Assenza del coefficiente angolare:** L'impostazione analitica cartesiana era stata introdotta da troppo poco tempo per essere integrata nel formalismo dell'epoca; di



Figura 1.4: Isaac Barrow (1630-1677)

conseguenza, Barrow opera entro i confini della geometria sintetica, senza fare uso del concetto moderno di pendenza o coefficiente angolare.

- **Il concetto di continuità:** Manca in Barrow una definizione formale di continuità. Egli prende in considerazione unicamente curve prive di interruzioni, e l'impiego dell'aggettivo "continuo" si riferisce intuitivamente a una quantità "che continua a crescere", anziché al concetto analitico moderno.

- **Dominio di funzioni e derivabilità:** Negli esempi proposti, Barrow considera esclusivamente funzioni f continue e crescenti, tralasciando la questione dell'esistenza della tangente e, quindi, della derivabilità in senso generale. Non viene inoltre contemplata la possibilità di tangenti secanti che attraversino la curva.

- **Concavità e rappresentazione geometrica:** Trattando curve continue e crescenti (condizione che in termini moderni implica derivata prima e seconda positive), Barrow mostra una chiara comprensione di concavità e convessità, realizzando diagrammi geometrici rigorosi e corretti sotto il profilo concavo-convesso.

Proposizione 1. *Sia ZGE una curva qualsiasi il cui asse è AD; e siano le ordinate applicate a questo asse, AZ, PG, DE, continuamente crescenti dall'ordinata iniziale AZ; inoltre sia AIF una linea tale che, se viene tracciata una qualsiasi linea retta EDF perpendicolare ad AD, che taglia le curve nei punti E, F, e AD in D, il rettangolo contenuto*

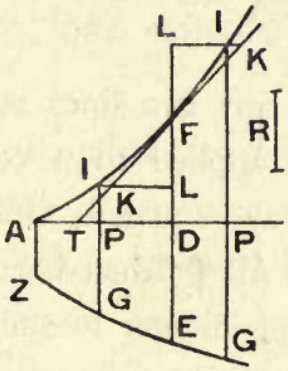


Fig. 109.

da DF e da una data lunghezza R è uguale allo spazio intercettato $ADEZ$; inoltre sia

$$DE : DF = R : DT \tag{1.1}$$

, e si congiunga DT. Allora TF toccherà la curva AIF.

Dimostrazione. Infatti, se un qualsiasi punto I è preso nella linea AIF (prima dal lato di F verso A), e se attraverso di esso viene tracciata IG parallela ad AZ, e KL è parallela ad AD, tagliando le linee date come mostrato nella figura, allora si ha la proporzione:

$$LF : LK = DF : DT = DE : R \tag{1.2}$$

ovvero:

$$R \cdot LF = LK \cdot DE \tag{1.3}$$

Ma, dalla natura dichiarata delle linee DF e PK, abbiamo:

$$R \cdot LF = \text{area } PDEG$$

perciò:

$$LK \cdot DE = \text{area } PDEG < DP \cdot DE$$

da cui segue che:

$$LK < DP < LI$$

Di nuovo, se il punto I è preso dall'altro lato di F, e viene fatta la stessa costruzione di prima, si può analoga e facilmente mostrare che:

$$LK > DP > LI$$

Da ciò risulta del tutto chiaro che l'intera retta $TKFK$ giace all'interno o al di sotto della curva $AIFI$.

Altre cose rimanendo uguali, se le ordinate AZ, PG, DE decrescono continuamente, la stessa conclusione viene raggiunta con un argomento simile; si presenta una sola distinzione: in questo secondo caso, contrariamente al primo, la curva $AIFI$ risulta concava verso l'asse AD. □

1.3.2 Analisi concettuale della dimostrazione di Barrow

L'architettura concettuale su cui Barrow edifica la sua dimostrazione si fonda sui seguenti cardini teorici e formali:

- **L'omogeneità dimensionale e il parametro R:** Per poter confrontare un'area bidimensionale con quantità monodimensionali (segmenti), Barrow introduce una costante di lunghezza arbitraria R. L'area dello spazio sotteso $ADEZ$ viene rappresentata dal prodotto $R \cdot DF$, convertendo formalmente l'area geometrica in un segmento orizzontale e garantendo la perfetta coerenza dimensionale delle proporzioni.

- **Proprietà di additività della "funzione area":** Il primo pilastro dell'argomentazione barrowiana risiede nella proprietà di additività dell'area: per una qualunque terna $u, v, w \in [a, b]$ ordinata secondo $a \leq u < v < w \leq b$, vale la relazione $A_u^w = A_u^v + A_v^w$. Assumendo le consuete convenzioni $A_u^u = 0$ e $A_v^u = -A_u^v$ (per $u < v$), tale identità si estende genericamente a tutti gli elementi dell'intervallo $[a, b]$. Barrow intuisce che la reciprocità tra quadratura e tangenti dipende essenzialmente da questo comportamento additivo, senza la necessità di definire l'integrale come limite di somme.

- **Definizione geometrica di tangente e i suoi limiti:** Un secondo cardine della costruzione barrowiana risiede nel criterio geometrico di tangenza: Barrow definisce una retta tangente in un punto F come la retta che giace interamente da un solo lato (al di sopra o al di sotto) della curva in un intorno del punto di contatto. Sebbene questa intuizione sia visivamente efficace per curve strettamente concave o convesse, essa evidenzia un chiaro limite logico e concettuale rispetto al rigore moderno, in quanto non è applicabile a contesti fondamentali quali i punti di flesso, nei quali la retta tangente attraversa la curva.

- **Il ruolo della continuità e l'esistenza della funzione area:** Sebbene il concetto analitico di continuità non fosse formalizzato ai tempi di Barrow (egli considerava intuitivamente curve prive di interruzioni con ordinate "continuamente crescenti"), lo si introduce nel moderno impianto teorico poiché garantisce l'integrabilità della funzione f, assicurando così la rigorosa esistenza della funzione area.

Con queste premesse, è possibile trasporre il ragionamento geometrico di Barrow in un enunciato moderno:

Teorema 1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona crescente. Allora:*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u)\, du = f(x).$$

Dimostrazione. L'enunciato verrà dimostrato mostrando che la retta $L(u) = f(x)(u - x) + A_a^x$ $(u \in \mathbb{R})$ è la retta tangente al grafico di $y = A_a^u$ in un dato punto $x \in [a, b]$

(se $x = a$ o $x = b$ la derivata è da intendersi come unilatera). Ciò comporta il calcolo dell'espressione:

$$L(x + dx) - A_a^{x+dx} = f(x)dx - A_x^{x+dx}.$$

Di conseguenza, se $dx > 0$ e $x, x + dx \in [a, b]$, allora $A_x^{x+dx} > f(x)dx$, poiché l'area compresa tra x e $x + dx$ è maggiore dell'area del rettangolo iscritto che è $f(x)dx$. Ciò equivale a $L(x + dx) - A_a^{x+dx} < f(x)dx - f(x)dx = 0$, e questo mostra che il grafico di $y = A_a^u$ giace al di sopra del grafico della retta $y = L(u)$ su $[x, x + dx]$. Se $dx < 0$, allora $L(x + dx) - A_a^{x+dx} = f(x)dx - A_x^{x+dx} = f(x)dx + A_{x+dx}^x$ e $A_{x+dx}^x < f(x)(-dx)$ essendo f crescente (e la lunghezza del lato del rettangolo iscritto è $-dx$). Pertanto:

$$L(x + dx) - A_a^{x+dx} = f(x)dx + A_{x+dx}^x < f(x)dx - f(x)dx = 0.$$

Per le nostre considerazioni precedenti, il grafico di $y = A_a^u$ giace al di sopra del grafico della retta $y = L(u)$ nei punti vicini ad x alla sinistra di x. Pertanto $y = L(u)$ è la retta tangente di $y = A_a^u$ nel dato punto x e il risultato ne consegue. □

La formulazione che Barrow ha dato al teorema ha poi fortemente influenzato gli enunciati successivi. Considerando $dx \neq 0$ e definendo l'intervallo chiuso I_x avente per estremi x e $x + dx$ (ossia $I_x = [x, x + dx]$ per $dx > 0$, oppure $I_x = [x + dx, x]$ per $dx < 0$), una semplice stima di ampiezza conduce a:

$$\min_{u \in I_x} f(u) \leq \frac{1}{dx} A_x^{x+dx} \leq \max_{u \in I_x} f(u).$$

In virtù del teorema dei valori intermedi applicato alle funzioni continue, esiste un punto $\theta_x \in I_x$ tale per cui:

$$A_x^{x+dx} = f(\theta_x) \cdot dx. \tag{1.4}$$

Tale passaggio corrisponde al teorema della media integrale applicato alla funzione area. Vale la pena evidenziare come Barrow sfrutti unicamente la proprietà di additività dell'area, senza dover ricorrere alla nozione dell'integrale inteso come limite di somme di Riemann. Passando al rapporto differenziale ed ereditando la (5), otteniamo:

$$\frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = \frac{1}{dx} A_x^{x+dx} = f(\theta_x).$$

Per la continuità di f, dal momento che θ_x è compreso tra x e $x + dx$, si ha che $\lim_{dx \to 0} f(\theta_x) = f(x)$, da cui scaturisce direttamente:

$$\frac{d}{dx} A_a^x = \lim_{dx \to 0} \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = f(x).$$

Nel formalismo moderno, la funzione area $x \mapsto A_a^x$ introdotta da Barrow viene riletta come una funzione d'insieme additiva sugli intervalli. Tale proprietà additiva garantisce che l'area della regione sottesa nell'intervallo incrementale sia espressa da $A_a^{x+dx} - A_a^x = A_x^{x+dx}$. L'intuizione profonda di Barrow risiede proprio nell'aver compreso che la relazione fondamentale del calcolo fosse una diretta conseguenza dall'additività dell'area.

La questione della priorità e l'eredità di Barrow e Gregory Va tuttavia precisato che Barrow non fu il solo né il primo a giungere a questo risultato in forma geometrica. Già nel 1668, nella sua *Geometriae pars universalis*, James Gregory aveva dimostrato il teorema per calcolare le lunghezze d'arco, basandosi su una tradizione di problemi inversi sulle tangenti che affondava le radici nei lavori di Stevin, Nuñez, Cartesio e Torricelli.

Perché allora la paternità del calcolo viene storicamente attribuita a Leibniz e Newton e non a Gregory o Barrow? Il motivo principale è che Barrow non colse appieno la portata generale della sua intuizione. Come evidenziato dallo storico D. T. Whiteside, la vera nascita del calcolo richiede due elementi imprescindibili: riconoscere l'inversione tra derivazione e integrazione e disporre di un algoritmo generale per eseguirle [5]. Sebbene Gregory e Barrow possedessero già gli strumenti geometrici per l'inversione, fu solo con Newton e Leibniz che il teorema fondamentale si fuse con una tecnica algebrica d'uso generale, trasformando l'analisi in un potente strumento di calcolo universale.

1.3.3 Il metodo algebrico-differenziale nell'appendice alla Lezione X

Oltre alla dimostrazione geometrica contenuta nella Proposizione 11, Barrow inserisce al termine della Lezione X un'appendice dedicata al calcolo algebrico delle tangenti, indicando esplicitamente di farlo «dietro consiglio di un amico» (identificato successivamente in Isaac Newton) [3].

In questo metodo, del tutto analogo a quello ideato da Fermat, Barrow introduce due quantità infinitesimali, a ed e, che corrispondono concettualmente ai moderni incrementi Δy e Δx. Data una curva espressa da un'equazione polinomiale $f(x, y) = 0$:

1. Si considerano i punti infinitamente vicini della curva sostituendo alle coordinate x e y i valori incrementati $x + e$ e $y + a$, ottenendo $f(x + e, y + a) = 0$.
2. Si espande l'equazione e si eliminano i termini originari (essendo $f(x, y) = 0$).
3. Si trascurano i termini contenenti potenze o prodotti di ordine superiore al primo in a ed e (ovvero a^2, e^2, ae), in quanto trascurabili rispetto agli incrementi primi.
4. Si sostituisce a con l'ordinata nota m ed e con la sottotangente incognita t.

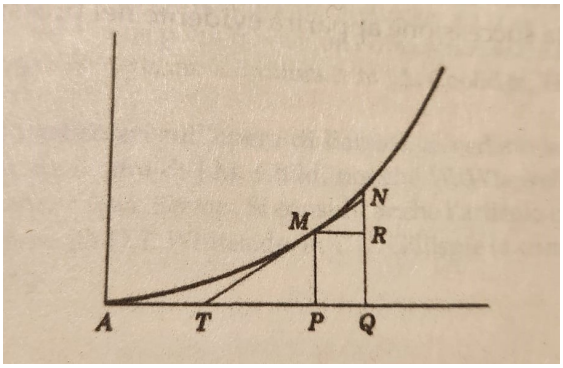
Sfruttando la similitudine dei triangoli MRN e TPM nel triangolo differenziale, si impone la proporzione:

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$$

da cui si ricava algebricamente la lunghezza della sottotangente t. Questo algoritmo rappresenta l'anello di congiunzione diretto tra i metodi informali di Fermat e la formalizzazione algebrica delle flussioni e dei differenziali di Newton e Leibniz.

1.4 La nascita del calcolo infinitesimale

Per proseguire il racconto delle tappe evolutive del teorema fondamentale, la trattazione si sposta ora sull'analisi delle due figure chiave del Seicento: Isaac Newton e Gottfried



Wilhelm Leibniz. Essi furono infatti i primi a sviluppare un algoritmo di portata generale in grado di dimostrare la relazione di reciprocità tra derivazione e integrazione.

Sebbene un esame dettagliato e minuzioso della celebre controversia sulla priorità del calcolo esuli dagli scopi specifici di questo lavoro, si ritiene opportuno premettere una sintetica contestualizzazione storica sulla contesa. Richiamare i tratti essenziali di questo dibattito risulta infatti fondamentale per completare il quadro evolutivo dell'opera: ciò permette di comprendere come due approcci concettualmente distinti (l'uno dinamico-cinematico, l'altro geometrico-algebrico) abbiano condotto, in modo del tutto autonomo, alla medesima formalizzazione del teorema fondamentale.

1.4.1 La disputa sull'invenzione del calcolo

La nascita del calcolo infinitesimale fu segnata da una celebre e accesa disputa sulla paternità della nuova matematica, che vide contrapposti Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. La questione risiede principalmente nello scarto temporale tra l'elaborazione della teoria e la sua pubblicazione.

Newton iniziò a sviluppare il suo sistema, noto come *calcolo delle flussioni*, tra il 1665 e il 1666, durante il periodo di isolamento dovuto alla peste di Londra. Tuttavia, per via della sua forte adesione al rigore della geometria classica e dell'uso tradizionale dei metodi greci, Newton esitò a lungo nel dare alle stampe i propri risultati. Le sue opere fondamentali, come *The Method of Fluxions and Infinite Series* (composto nel 1671), furono pubblicate solo postume nel 1736, mentre nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) la trattazione matematica fu ammantata di un impianto geometrico classico.

Al contrario, Leibniz giunse formalmente ai propri risultati tra il 1673 e il 1676, pubblicando ufficialmente il primo trattato sul calcolo differenziale, la *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, nel 1684. Leibniz tracciò una netta linea di demarcazione con il passato, adottando una notazione algebrica agile ed efficace (basata sui differenziali dx, dy e sull'operatore di integrazione $\int$) destinata a diventare lo standard della matematica moderna.

I due matematici arrivarono alla medesima svolta epocale partendo da presupposti concettuali e filosofici nettamente differenti:

- **L'approccio fisico e dinamico di Newton:** Considerava le variabili come quantità «fluenti» (x,y) che variano con continuità nel tempo, definendo le «flussioni» $(\dot{x}, \dot{y})$ come le relative velocità di variazione.

- **L'approccio statico e geometrico di Leibniz:** Fondava il proprio calcolo sulla nozione di differenziale come differenza tra valori infinitamente vicini di una variabile discreta estrapolata al continuo, concentrandosi sui rapporti tra differenziali piuttosto che sulle singole quantità.

Nonostante una fitta corrispondenza epistolare negli anni '70 del Seicento tra Leibniz e l'ambiente scientifico inglese (tramite figure come Oldenburg, Collins e Barrow), in cui Newton aveva menzionato l'esistenza del proprio metodo senza però svelarne l'algoritmo, gli storici concordano sul fatto che Leibniz abbia sviluppato il proprio calcolo in maniera del tutto autonoma e indipendente. La differenza sostanziale di notazione, impostazione concettuale e fondamenti teorici dimostra come le due scoperte siano state il frutto parallelo di due menti straordinarie, giunte allo stesso traguardo per vie differenti.

1.5 Isaac Newton

Cenni biografici Isaac Newton nacque il giorno di Natale del 1642 a Woolsthorpe, nel Lincolnshire [3, 19]. Orfano di padre, deceduto tre mesi prima della sua nascita, la sua infanzia fu segnata dal secondo matrimonio della madre. Rimanendo a Woolsthorpe sotto le cure della nonna materna, il giovane Isaac visse un'infanzia solitaria e conflittuale.

Nel 1661 Newton fu ammesso al Trinity College di Cambridge. La sua formazione matematica avanzata iniziò nell'autunno del 1663: studiò l'edizione degli *Elementi* di Euclide curata da Isaac Barrow, la *Clavis Mathematicae* di Oughtred, la *La Géométrie* di Cartesio (nell'edizione commentata da Frans van Schooten) e le opere algebriche di Viète e Wallis. Dall'analisi dell'*Arithmetica Infinitorum* di Wallis nacquero i suoi primi lavori matematici originali sulle serie infinite e sugli indivisibili.

Nel 1665 ottenne il titolo di *Bachelor of Arts*. Quando nell'estate dello stesso anno l'Università di Cambridge dovette chiudere a causa dell'epidemia di peste, Newton fece ritorno a Woolsthorpe. In questo celebre periodo di isolamento (1665-1667), non ancora venticinquenne, gettò le basi di scoperte rivoluzionarie:

- **Il calcolo delle flussioni:** sviluppò i metodi analitici del calcolo differenziale e integrale, intuendo che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione;

- **L'ottica:** scoprì la scomposizione della luce bianca attraverso il prisma, dimostrando la natura composita dello spettro cromatico e progettando il primo telescopio a riflessione;

- **La gravitazione universale:** formulò le prime intuizioni sulle leggi del moto e sulla legge di attrazione proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

Riaperta l'università nel 1667, Newton fu eletto *Fellow* del Trinity College e, nel 1669, a soli ventisette anni, succedette ad Isaac Barrow sulla cattedra Lucasiana di

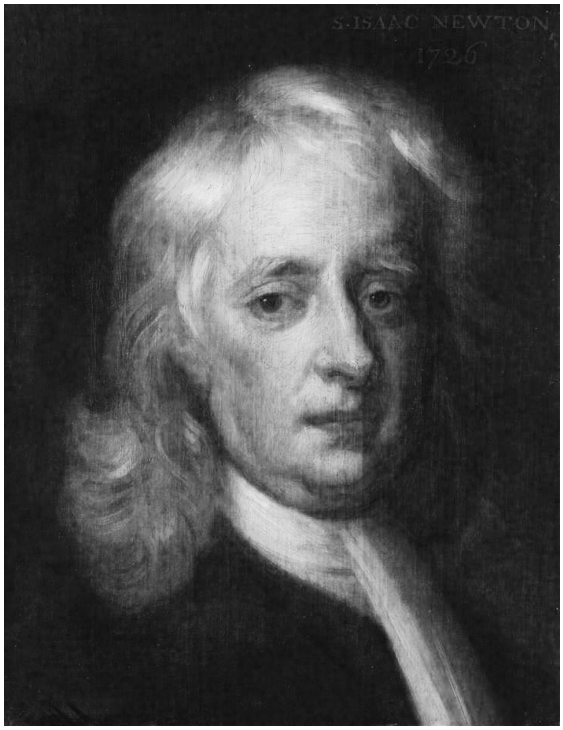


Figura 1.5: Isaac Newton (1642-1727)

matematica. Nel 1672 fu eletto *Fellow* della Royal Society in seguito alla presentazione del suo telescopio a riflessione, ma le accese polemiche con Robert Hooke e Christiaan Huygens sulla natura corpuscolare della luce lo portarono a un progressivo isolamento scientifico e alla decisione di ritardare la pubblicazione delle sue ricerche d'ottica (raccolte nell'opera *Opticks* solo nel 1704, dopo la morte di Hooke).

Su sollecito di Edmond Halley, Newton sistemò i suoi studi di meccanica celeste e fisica nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), opera monumentale in cui enunciò le tre leggi fondamentali della dinamica e la legge di gravitazione universale, spiegando i moti dei pianeti, le maree e la precessione degli equinozi.

Negli anni successivi Newton ricoprì importanti incarichi pubblici: rappresentò l'Università di Cambridge al Parlamento nel 1689, fu nominato Guardiano (*Warden*) della Zecca Reale nel 1696 e successivamente Direttore (*Master of the Mint*) nel 1699, supervisionando con grande rigore la complessa riforma monetaria inglese. Nel 1703 fu eletto Presidente della Royal Society (carica mantenuta fino alla morte) e nel 1705 fu nominato cavaliere (*Knight Bachelor*) dalla regina Anna. Gli ultimi decenni della sua vita furono profondamente segnati dalla celebre controversia sulla priorità dell'invenzione del calcolo infinitesimale contro Gottfried Wilhelm Leibniz. Isaac Newton morì a Londra il 31 marzo 1727 e fu sepolto con grandi onori nell'abbazia di Westminster.

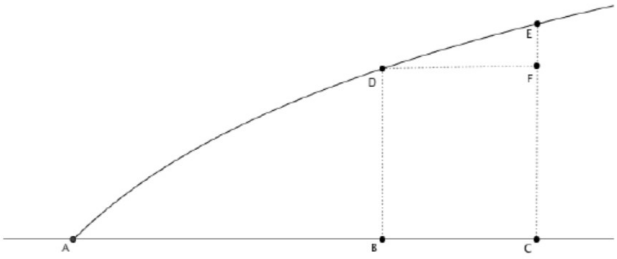


Figura 1.6: [12]

1.5.1 La visione dinamica del teorema

Nel metodo di Newton, la comprensione del teorema fondamentale del calcolo integrale si fonda su una prospettiva rigorosamente dinamica: la funzione da integrare è interpretata come un tasso di variazione istantaneo (una *flussione*), mentre l'integrale rappresenta l'accumulazione continua di tale variazione nel tempo (la *fluente*).

Il nucleo dell'approccio newtoniano consiste nel legare algebricamente la relazione tra le flussioni al problema della quadratura delle curve piane, dimostrando che la ricerca dell'area e la determinazione dei tassi di variazione costituiscono due operazioni rigorosamente inverse. Nel suo *Tract on Fluxions* (1666), Newton formalizza questa reciprocità articolandola in due problemi complementari:

- **Il Problema 5 (Parte della primitiva del TFCI):** Consiste nel "*trovare la natura della linea curva la cui area è espressa da una qualsiasi equazione data*[1]". Partendo dall'espressione nota dell'area accumulata z, Newton dimostra che la velocità con cui l'area cresce (la sua flussione $\dot{z}$) coincide esattamente con l'ordinata y della curva delimitante ($\dot{z} = y$), ricavando così l'equazione della curva originale.
- **Il Problema 7 (Parte di valutazione del TFCI):** Affronta il percorso inverso, ossia "*data la natura di una qualsiasi linea curva, trovarne l'area*". Riconoscendo l'ordinata come la flussione dell'area, Newton dimostra che la misurazione dell'area sottesa si riduce alla ricerca di una funzione antiderivata (la fluente) per la funzione data.

Il problema 5 Consideriamo una curva assegnata ADE associata a una relazione $P(x, y) = 0$, dove poniamo:

$$|AB| = x, \quad |BD| = y$$

Definiamo inoltre la fluente z come l'area sottesa dalla curva:

$$z := \text{Area}(ABD)$$

[1]Come "area della curva" s'intende la regione di piano che la curva circonda

Introducendo un incremento temporale infinitesimo o (un momento), si avranno gli incrementi spaziali $|BC| = \dot{x}o$ e $|FE| = \dot{y}o$. Poiché o è infinitamente piccolo, il momento della variabile z (l'area del piccolo trapezio incrementale) si esprime come:

$$\dot{z}o = \frac{(|BD| + |CE|)|DF|}{2} = \frac{(y + y + \dot{y}o)\dot{x}o}{2} = y\dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{x}o^2}{2}$$

Trascurando i termini d'ordine superiore si ottiene

$$\dot{z} = y\dot{x} + \frac{\dot{y}\dot{x}o}{2}$$

e ponendo $o = 0$ al limite, si giunge alla relazione fondamentale tra flussioni:

$$\dot{z} = y\dot{x}$$

All'interno di questo impianto, il compito di "trovare la natura della linea storta la cui area è espressa da una qualsiasi equazione data" (noto come *Problema 5*) permette di ricavare l'equazione della curva partendo dall'area: ciò costituisce formalmente la *parte della primitiva* del TFCI, in cui il tasso di variazione dell'area è dato dall'ordinata della curva.

Interpretazione moderna e la relazione fondamentale Notando che con le notazioni moderne si ha:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

la relazione $\dot{z} = y\dot{x}$ si scrive formalmente come:

$$dz = ydx$$

Ponendo per comodità $\dot{x} = 1$ (assumendo l'ascissa come variabile indipendente uniforme), la relazione si riduce a:

$$\dot{z} = y$$

Questa espressione rappresenta la prima formulazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Il problema della quadratura della curva si risolve invertendo la relazione, ovvero "integrando" la legge $\dot{z} = y$ per passare dal tasso di variazione alla quantità accumulata (z).

Il Problema 7 e la Generalizzazione degli Esempi In modo complementare, il *Problema 7* affronta il percorso inverso: "Data la natura di una qualsiasi linea storta, trovarne l'area". Sfruttando la primitiva nota, è possibile valutare l'area di curve anche complesse (come nel caso della curva $y = ax/\sqrt{a^2 - x^2}$).

Nell'ambito dei modelli algoritmici basati sulle potenze, Newton propone vari esempi applicativi:

$$\dot{z} = \frac{x^2}{a} \implies z = \frac{x^3}{3a}$$

$$\dot{z} = \frac{x^3}{a^2} \implies z = \frac{x^4}{4a^2}$$

Considerando in generale la quadratura delle curve del tipo $y = x^k$ $(k \neq -1)$, e ponendo $\dot{x} = 1$, l'equazione si riconduce alla forma canonica:

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = x^k \implies z = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Il metodo si estende a una vasta gamma di funzioni, consolidando l'equivalenza algebrica tra integrazione e derivazione.

1.6 Gottfried Wilhelm Leibniz

Cenni biografici Gottfried Wilhelm von Leibniz nacque a Lipsia nel 1646 dove a quattordici anni entrò all'università e a diciassette conseguì il grado di Bacceliere [3, 16]. All'università fece studi di teologia, legge, filosofia e matematica: per questo viene talvolta descritto come l'ultimo grande erudito dotato di conoscenze universali. All'età di vent'anni avrebbe già potuto conseguire il titolo di dottore in legge, ma gli fu rifiutato a causa della sua età troppo giovane. Per questo motivo lasciò Lipsia e prese il Dottorato all'Università di Altdorf a Norimberga, dove gli fu offerta una cattedra di professore in legge, che egli rifiutò. Entrò poi in diplomazia, prestando la propria attività dapprima presso l'elettore di Magonza, poi presso la famiglia dei Brunswick, e infine presso gli Hannover, al cui servizio rimase per quarant'anni. Fra gli elettori di Hannover cui Leibniz aveva prestato i propri servizi v'era colui che, come pronipote di Giacomo I d'Inghilterra, succedette alla Regina Anna nel 1714 con il titolo di re Giorgio I. Nella sua qualità di influente rappresentante di uomini di stato, Leibniz viaggiò molto. Nel 1672 si recò a Parigi, sperando di deviare i progetti francesi di annessioni territoriali ai danni della Germania attraverso una «guerra santa» diretta contro l'Egitto (suggerimento che venne più tardi accolto da Napoleone). Lì Leibniz incontrò Huygens, che gli suggerì, se voleva diventare un matematico, di leggere i trattati di Pascal del 1658-1659. Nel 1673 una missione politica lo portò a Londra, dove comprò una copia delle *Lectiones geometricae* di Barrow, incontrò Oldenburg e Collins, e fu eletto membro della Royal Society. Fu prevalentemente intorno a questa visita che si accentrò più tardi la polemica sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, giacché Leibniz poteva aver visto una copia manoscritta del *De analysi* di Newton; ma è da dubitare che a tale data egli potesse trarne alcun profitto, perché non aveva ancora una buona preparazione in geometria e in analisi.

Nel 1676 Leibniz visitò Londra una seconda volta e fu in questi anni che separarono le sue due visite londinesi che aveva preso forma il calcolo differenziale. Nell'ottobre del 1676 Leibniz accettò la nomina di bibliotecario e consigliere di corte ad Hannover presso il duca Giovanni Federico (casata di Brunswick). In questa veste affiancò agli incarichi di Stato una fervida attività scientifica, che portò alla pubblicazione ufficiale delle opere fondative del nuovo calcolo sugli *Acta Eruditorum*. Nel 1684 diede infatti alle stampe la celebre memoria *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, nella quale introdusse la



Figura 1.7: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

notazione differenziale dx e le regole fondamentali di derivazione, seguita nel 1686 dal lavoro sul calcolo integrale contenente l'introduzione del simbolo di integrazione $\int$.

Negli ultimi anni della sua vita redasse le sue celebri sintesi filosofiche, tra cui gli *Essais de Théodicée* (1710) e la *Monadologia* (1714). Tuttavia, questo periodo fu profondamente amareggiato dalla violenta controversia sulla priorità dell'invenzione del calcolo infinitesimale che lo vide contrapposto a Isaac Newton. Accusato ingiustamente di plagio a partire dal 1711 e sfavorito dal giudizio di parte emesso dalla Royal Society nel *Commercium Epistolicum* (1713), Leibniz difese la paternità autonoma della propria scoperta attraverso lo scritto anonimo *Charta Volans* e nel celebre carteggio epistemologico con Samuel Clarke. Gottfried Wilhelm von Leibniz morì ad Hannover il 14 novembre 1716, isolato e accompagnato al sepolcro dal solo suo segretario personale.

1.6.1 La prospettiva geometrico-differenziale del teorema

Mentre Newton predilige un modello cinematico, Leibniz sviluppa un approccio geometrico e algebrico, fondato sulla somma di aree infinitesimali e sulla complementarità tra somme e differenze. Per Leibniz, l'operazione di derivazione è definita tramite il rapporto tra i lati del *triangolo differenziale* (simile al triangolo caratteristico), i cui cateti rappresentano i differenziali delle variabili dx e dy.

Nel suo celebre saggio del 1693 pubblicato sugli *Acta Eruditorum* indicato dallo storico D. J. Struik come la prima enunciazione formale leibniziana del teorema fondamentale del

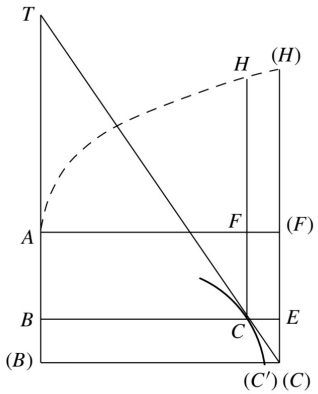


Figura 1.8

calcolo, Leibniz definisce la reciprocità tra quadratura e tangenti enunciando direttamente il teorema nei seguenti termini:

> Mostrerò ora che il problema generale delle quadrature [aree] può essere ridotto alla ricerca di una linea che possieda una data legge di tangenza (declivitas), cioè per la quale i lati del triangolo caratteristico abbiano una data relazione reciproca. Mostrerò poi come questa linea possa essere descritta da un moto che ho inventato.

Per dimostrare tale riduzione, Leibniz articola il problema attraverso i seguenti passaggi geometrico-differenziali:

1. Per determinare l'area sottesa da una curva $AH(H)$ di ordinata $z = FH$ e ascissa y, Leibniz introduce una curva ausiliaria $C(C')$ di ordinata x e ascissa y (rappresentata per chiarezza grafica nel semipiano opposto rispetto all'asse orizzontale).

2. La curva ausiliaria $C(C')$ viene costruita in modo che la pendenza della sua tangente — definita dal rapporto tra i cateti TB e BC del triangolo caratteristico differenziale ($TB : BC = dx : dy$) — sia proporzionale all'ordinata z della curva originale rispetto a un segmento di lunghezza costante a:

$$\frac{TB}{BC} = \frac{dx}{dy} = \frac{z}{a} \implies a\,dx = z\,dy$$

3. Interpretando il prodotto $z\,dy$ come l'area del rettangolo infinitesimo sotteso dalla curva di partenza e $a\,dx$ come l'area di un rettangolo di altezza dx e larghezza costante a, Leibniz passa alla somma di tutti gli elementi infinitesimali:

$$a\,x = \int z\,dy$$

In questo modo, la misura dell'area definita dall'integrale $\int z\,dy$ viene direttamente espressa e calcolata tramite la variazione dei valori dell'ordinata x della curva ausiliaria primitiva.

Verso l'analisi del XIX secolo Sebbene dimostrazioni geometriche della reciprocità tra tangenti e quadrature fossero già state individuate da James Gregory (1668) e Isaac Barrow (1670), il contributo decisivo di Newton e Leibniz risiede nell'aver formalizzato questa relazione all'interno di un'adeguata tecnica algoritmica di portata generale.

La fusione tra la comprensione dinamica di Newton e la struttura geometrico-algebrica di Leibniz ha consentito al calcolo di superare la frammentazione dei metodi geometrici del Seicento, ponendo le basi per la successiva formalizzazione rigorosa dell'Analisi Matematica nel XIX secolo.

Capitolo 2

I fondamenti del teorema tra Settecento e Ottocento: dalla svolta di Lagrange al rigore di Cauchy

2.1 La crisi dei fondamenti nel Settecento

Nel corso del Settecento, il calcolo infinitesimale attraversò un lungo e complesso periodo di transizione, caratterizzato da uno straordinario sviluppo applicativo a fronte di un apparente e prolungato disinteresse verso le proprie basi logiche e formali [9]. Sebbene la sua invenzione risalisse alla seconda metà del XVII secolo ad opera di Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, trascorse circa un secolo e mezzo prima che Augustin-Louis Cauchy riuscisse a conferire alla materia una fondazione coerente e rigorosa. Tale ritardo non fu soltanto il risultato della complessa natura intrinseca del problema — il quale richiedeva non solo l'individuazione di definizioni operative e appropriate, ma anche la capacità di dimostrare teoremi generali su tali concetti —, ma fu soprattutto la diretta conseguenza delle priorità scientifiche ed epistemologiche dominanti dell'epoca.

Per gran parte del XVIII secolo, infatti, i matematici più eminenti della comunità scientifica europea — tra cui spiccano i fratelli Jakob e Johann Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace — focalizzarono quasi esclusivamente la propria attenzione sui problemi concreti e sulle straordinarie potenzialità applicative del calcolo, trascurandone i fondamenti teorici. La disciplina veniva concepita primariamente come un poderoso algoritmo di straordinaria efficacia ed enorme potenza risolutiva. Poiché la grande maggioranza dei risultati ottenuti per via analitica trovava un riscontro immediato e pragmatico nei complessi problemi della fisica, dell'astronomia e della meccanica razionale, la validità intrinseca delle conclusioni era supportata da una costante e convincente verifica empirica, rendendo percepita come secondaria o meno urgente la necessità di un rigore teorico estrinseco.

In questo scenario, il Settecento si configurò come un'epoca di espansione travolgente, in cui la pratica matematica era guidata da una cieca e incrollabile fiducia nell'efficacia algoritmica dei simboli e dalla forte adesione al principio della cosiddetta «generalità

dell'algebra» [9]. Si condivideva la diffusa convinzione epistemologica che le proprietà formali e le manipolazioni valide per espressioni algebriche finite potessero essere estese e applicate senza riserve o cautele speciali anche a somme infinite, a sviluppi in serie o al campo dei numeri complessi.

Ciononostante, la questione dei fondamenti non venne del tutto dimenticata o ignorata. Quando i matematici del periodo si trovarono a riflettere sulle nozioni di base del calcolo, furono guidati principalmente da due potenti fattori propulsivi. Da un lato vi fu l'emulazione e l'ideale della geometria classica, in cui la principale spinta interna alla matematica risiedeva nel profondo desiderio di eguagliare il rigore metodologico, l'impeccabile struttura assiomatica e la chiarezza dimostrativa dei testi classici della tradizione greca, in primis le opere di Euclide e di Archimede. Dall'altro lato agirono le critiche esterne e la polemica filosofica, poiché l'assenza di definizioni solide e ampiamente condivise rese la nuova analisi strutturalmente vulnerabile a severi attacchi di natura logica e concettuale.

La critica di Berkeley Tra le contestazioni più incisive e storicamente rilevanti figurano senza dubbio quelle mosse dal filosofo e vescovo anglicano George Berkeley. Nel 1734, Berkeley pubblicò il celebre trattato *The Analyst* (scritto nella forma di un dialogo rivolto a un "matematico infedele"), muovendo una delle più severe ed efficaci critiche ai fondamenti del calcolo infinitesimale, sia nella versione delle flussioni di Newton sia nel calcolo differenziale di Leibniz.

Berkeley evidenziò una profonda incoerenza logica nel procedimento di derivazione. Egli osservò che considerare l'incremento $dx \neq 0$ per poterne manipolare e semplificare il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

e successivamente porre arbitrariamente $dx = 0$ alla fine del calcolo costituisce un passaggio non valido, in quanto il differenziale dx rimane sostanzialmente non definito in modo rigoroso.

Tuttavia, essendo consapevole che il calcolo infinitesimale permetteva di risolvere con estrema facilità problemi altrimenti inaccessibili alla matematica classica, Berkeley cercò di darne una spiegazione teorizzando un *processo di compensazione degli errori*: le varie approssimazioni e le inesattezze concettuali che si ripetono durante i ragionamenti si compenserebbero a vicenda, conducendo a un risultato finale corretto (permettendo di giungere, per citare lo stesso Berkeley, "se non alla scienza, almeno alla verità").

Questa interpretazione fu condivisa anche dall'ingegnere francese Nicolas Léonard Sadi Carnot. Le legittime obiezioni sollevate da Berkeley assestarono un duro colpo all'analisi matematica inglese, arrestandone temporaneamente lo sviluppo; i tentativi di fornirne una risistemazione rigorosa — come quello operato da Colin Maclaurin nel suo *Treatise of Fluxions* (1742), che ricondusse il calcolo a pura geometria accettando però la velocità istantanea come nozione primitiva — non riuscirono a risolvere in modo definitivo la crisi dei fondamenti.

A causa di queste incertezze, le trattazioni settecentesche dei concetti fondamentali venivano relegate quasi esclusivamente a brevi introduzioni manualistiche o a testi di carattere divulgativo, e raramente venivano operativemente applicate per dimostrare i teoremi più complessi e avanzati dell'analisi reale [9].

Le «metafisiche» del calcolo nel Settecento Per giustificare la correttezza dei procedimenti, i matematici del Settecento ricorrevano a diverse «metafisiche» del calcolo, tra loro ampiamente eterogenee e spesso logicamente incompatibili. Una prima posizione considerava gli infinitesimi attuali (sostenuti da Leibniz e L'Hôpital) come quantità fisse «infinitamente piccole» e trascurabili rispetto alle quantità finite; questo approccio era tuttavia soggetto all'incurabile obiezione formale di violare l'assioma di Archimede e di introdurre evidenti contraddizioni logiche. Un'altra prospettiva era quella delle flussioni e delle velocità di variazione, sostenuta da Newton e Maclaurin e fondata su un'intuizione prevalentemente fisica del movimento continuo, in cui le grandezze venivano considerate come generate dal fluire uniforme del tempo; tale visione venne tuttavia criticata da d'Alembert e Lagrange poiché introduceva nell'analisi pura nozioni estranee ed esterne alla matematica, mutuate direttamente dalla fisica.

2.1.1 La nozione di limite e i suoi vincoli concettuali

Per comprendere appieno la portata della svolta ottocentesca, è necessario esaminare come il concetto di limite veniva inteso nel XVIII secolo. A titolo di confronto, la formulazione di riferimento era la classica definizione fornita da Jean le Rond d'Alembert e Jean-Baptiste de La Chapelle sulle pagine dell'*Encyclopédie*:

Definizione 1. *Si dice che una grandezza sia il* limite *di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinarsi alla prima più di qualunque data grandezza, per quanto piccola la si possa supporre; tuttavia,* senza che *la grandezza che si avvicina* sia mai in grado di superare *la grandezza a cui si avvicina, in modo che la differenza tra una quantità e il suo limite sia assolutamente inassegnabile. Parlando correttamente, il limite* non coincide mai*, o non diventa mai uguale, alla quantità di cui è un limite, ma quest'ultima può sempre avvicinarsi di più, e differire da esso per quanto poco si desideri.*

Formulazioni di questo tipo soffrivano di marcati limiti teorici e operativi. In primo luogo, esse non venivano tradotte in un sistema formale di disuguaglianze e non venivano quasi mai impiegate in sede dimostrativa per fondare i teoremi dell'analisi. Inoltre, la terminologia appariva ambigua, poiché il termine settecentesco «grandezza» era poco preciso e l'atto di «avvicinarsi» o «tendere» faceva spesso appello a un'intuizione prevalentemente cinematica o geometrica del movimento continuo, sulla scia della tradizione newtoniana.

Ma l'ostacolo più severo risiedeva nelle due condizioni vincolanti imposte nell'*Encyclopédie*, le quali si rivelavano del tutto inadeguate per la matematica avanzata. Imponendo che la variabile non potesse mai superare il proprio limite, si rendeva concettualmente impossibile trattare successioni o funzioni oscillanti, come il limite delle somme parziali della serie

alternata $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ oppure il limite per x che tende a zero della funzione $x^2 \sin(1/x)$. Allo stesso tempo, stabilendo che una variabile non potesse mai coincidere con il proprio limite, diventava impossibile definire persino la derivata di una semplice funzione lineare $f(x) = ax + b$ come limite del rapporto incrementale, dal momento che il rapporto incrementale è costante e coincide in ogni punto con il valore limite stesso. L'abbandono di queste rigide restrizioni e il superamento della pura descrizione verbale avrebbero costituito il presupposto fondamentale per la nascita dell'analisi moderna.

2.1.2 La concezione dell'integrale

La precarietà e l'ambiguità dei fondamenti del XVIII secolo si riflettevano in modo ancora più evidente e marcato all'interno della teoria dell'integrazione. Durante tutto il Settecento, l'integrazione non possedeva affatto una definizione autonoma o indipendente: essa era intesa semplicemente, ed esclusivamente, come l'operazione inversa della derivazione, ossia come la ricerca della funzione primitiva.

Nonostante Leibniz avesse originariamente introdotto il concetto di integrale come una somma di quantità infinitamente piccole (scegliendo $\int$ la forma stilizzata della lettera S come simbolo di somma), la quasi totalità dei matematici settecenteschi — tra cui Euler, i fratelli Bernoulli, Lagrange e Laplace — rifiutò radicalmente questa impostazione a causa della profonda problematicità logica connessa alla nozione di infinitesimo. Si preferì di gran lunga considerare l'integrale indefinito come il vero concetto teorico primario, privo di ambiguità e logicamente più rigoroso. Di conseguenza, l'integrale definito non era assolutamente concepito come il limite di una somma, bensì soltanto come la pura e semplice valutazione numerica della primitiva algebrica previamente calcolata agli estremi dell'intervallo d'integrazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{con } F'(x) = f(x)$$

Questa impostazione teorica e concettuale comportava profonde e limitanti conseguenze epistemologiche.

- In primo luogo emergeva una marcata tautologia del legame tra derivata e integrale: la relazione fondamentale tra le due operazioni non costituiva l'oggetto di una dimostrazione, poiché, essendo l'integrale definito introdotto come la ricerca della primitiva, il loro legame reciproco era considerato una pura tautologia o una proprietà vera e banale per definizione.

- In secondo luogo si registrava un'assoluta assenza del problema dell'esistenza, in quanto l'integrabilità di una funzione coincideva puramente con la possibilità tecnica e algebrica di individuarne esplicitamente la primitiva.

- Infine, vi erano rigidi limiti formali sulle discontinuità e sulle singolarità, per cui l'integrazione di funzioni prive di una primitiva algebrica elementare o caratterizzate da punti interni di discontinuità rimaneva un problema indefinito e privo di una collocazione teorica rigorosa.

Accanto a questa visione teorica ristretta, si sviluppò tuttavia nel corso del Settecento una ricca e indispensabile prassi computazionale, fortemente orientata alla risoluzione di problemi fisici e ingegneristici. Autori come Euler, Legendre, Lacroix e Poisson fecero frequente e fruttuoso ricorso a somme finite per approssimare numericamente il valore degli integrali definiti e per calcolarne i relativi limiti d'errore.

Come evidenziato da Judith V. Grabiner, fu proprio questo articolato corpus di tecniche d'approssimazione numerica, unitamente all'uso delle disuguaglianze algebriche, a fornire a Cauchy il materiale tecnico grezzo da cui muovere. Nei primi decenni del XIX secolo, Cauchy avrebbe radicalmente ribaltato l'impostazione classica del Settecento: assumendo il limite delle somme finite come definizione primitiva e autonoma dell'integrale, egli trasformò la ricerca della primitiva e la relazione d'inversione con la derivata da banale tautologia a fondamentale teorema da dimostrare.

2.2 Joseph-Louis Lagrange

Cenni biografici Joseph-Louis Lagrange nasce a Torino il 25 gennaio 1736 con il nome di Giuseppe Lodovico Lagrangia [18]. Nonostante il padre occupi una posizione di prestigio come tesoriere delle opere pubbliche del Regno di Sardegna, dissesta la famiglia in speculazioni finanziarie sfortunate; lo stesso Lagrange affermerà in seguito che senza quelle peripezie economiche probabilmente non si sarebbe mai dedicato interamente alla matematica. Avviato inizialmente agli studi giuridici al Collegio di Torino, dove predilige il latino classico, scopre la passione per la matematica in modo autodidatta leggendo nel 1754 un lavoro di Edmund Halley sull'algebra applicata all'ottica. Il suo primo lavoro scientifico, pubblicato nel luglio del 1754 sotto forma di lettera in italiano a Giulio Fagnano, si rivela un'analisi imperfetta di un'analogia tra lo sviluppo binomiale e le derivate successive. Scoperto che il risultato era già noto a Leibniz e Bernoulli, Lagrange reagisce raddoppiando gli sforzi nello studio del problema della curva tautocrona.

Le sue intuizioni sulla tautocrona pongono le basi per il calcolo delle variazioni e, inviate in una celebre lettera a Leonhard Euler nell'agosto del 1755, impressionano a tal punto il matematico svizzero da procurare a Lagrange, ad appena diciannove anni, la nomina a professore di matematica presso le Regie Scuole di Artiglieria di Torino. Nel 1757 figura tra i fondatori della società scientifica che diventerà la Reale Accademia delle Scienze di Torino, sulle cui pubblicazioni rilascia importanti memorie sul calcolo delle variazioni, sulle probabilità, sulla teoria delle corde vibranti, sui sistemi di equazioni differenziali lineari e sulla meccanica dei fluidi. Nel 1764 e nel 1766 vince i prestigiosi premi dell'Académie des Sciences di Parigi dedicati allo studio della librazione della Luna e delle orbite dei satelliti di Giove.

Nel 1766, in seguito al ritorno di Eulero a San Pietroburgo e all'interessamento di Jean le Rond d'Alembert e Federico II di Prussia, Lagrange accetta la direzione della sezione di matematica dell'Accademia di Berlino, succedendo allo stesso Eulero. Durante il ventennio berlinese ottiene risultati straordinari in astronomia, sulla stabilità del sistema solare, nella teoria dei numeri — dimostrando nel 1770 che ogni intero positivo è somma di quattro quadrati e provando il teorema di Wilson — e nell'algebra, con la memoria del

1770 sulla risoluzione algebrica delle equazioni, che introduce lo studio delle permutazioni delle radici anticipando la teoria dei gruppi.

Nel 1787, dopo la morte della prima moglie e del re Federico II, si trasferisce a Parigi su invito di Luigi XVI come membro dell'Académie des Sciences. L'anno successivo pubblica la *Mécanique analytique*, capolavoro in cui sintetizza tutta la meccanica classica a partire dal principio delle velocità virtuali, riducendola a pura analisi algebrica e rimuovendo del tutto le figure e le costruzioni geometriche. Durante la Rivoluzione Francese collabora alla creazione del sistema metrico decimale all'interno della Commissione dei pesi e delle misure, e nel 1794 diventa il primo professore di analisi dell'École Polytechnique, insegnando anche all'École Normale.

Con la pubblicazione della *Théorie des fonctions analytiques* (1797) e delle *Leçons sur le calcul des fonctions* (1800), Lagrange tenta di rifondare l'analisi infinitesimale per via puramente algebrica, eliminando i concetti di limite e di infinitesimo e definendo le derivate attraverso lo sviluppo in serie di potenze di Taylor. Sebbene il suo programma algebrico sia destinato al superamento, esso introduce l'uso sistematico dell'algebra delle disuguaglianze e delle stime d'errore del resto, fornendo gli strumenti fondamentali per la successiva opera di Cauchy.

Nomimato senatore, conte dell'impero e insignito della Grand Croix dell'Ordre Impérial de la Réunion da Napoleone Bonaparte, Lagrange muore a Parigi il 10 aprile 1813 all'età di 77 anni, venendo sepolto al Panthéon.



Figura 2.1: Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

2.2.1 La ricerca dei fondamenti: le motivazioni teoriche e didattiche

Fu soltanto verso la fine del Settecento che la questione dei fondamenti tornò a essere considerata un problema centrale per la matematica europea. Il protagonista assoluto di questa fondamentale svolta concettuale fu Joseph-Louis Lagrange.

Mosso dalle critiche di Berkeley, stimolato dalle stringenti esigenze didattiche legate al suo insegnamento presso la neonata École Polytechnique di Parigi e guidato dalla ferma convinzione che il calcolo dovesse essere integralmente affrancato da qualsiasi intuizione di natura geometrica o fisica, Lagrange tentò di algebrizzare l'intera analisi sfruttando la teoria delle serie di potenzela e facendo uso solo di quantità finite. Nel suo programma, il concetto fondamentale di derivata veniva svincolato dai limiti e definito direttamente attraverso il coefficiente del termine lineare dello sviluppo in serie di Taylor.

Sebbene il suo ambizioso programma algebrico si rivelò in seguito storicamente inadeguato a causa dell'impossibilità di estenderlo a funzioni non analitiche e dell'assenza di una teoria generale sulla convergenza delle serie, Lagrange ebbe il merito storico di riportare la ricerca sui fondamenti al centro del dibattito scientifico. Riconoscendo che la giustificazione logica del calcolo costituiva un problema interno alla matematica stessa, egli sviluppò l'algebra delle disuguaglianze e le stime dei termini di errore che avrebbero fornito il materiale costitutivo fondamentale per l'opera di Cauchy. Fu proprio raccogliendo e rielaborando criticamente l'eredità di Lagrange che Cauchy, agli inizi degli anni venti dell'Ottocento, formulò la prima rigorosa definizione di limite, continuità, derivata e integrale basata sulle disuguaglianze.

La tradizione dell'analisi pura: da d'Alembert a Bolzano L'ambizione di Lagrange di affrancare il calcolo da ogni fondamento geometrico o cinematico non costituì un fatto isolato, bensì il culmine di una lunga tradizione settecentesca. Già d'Alembert aveva criticato la dottrina newtoniana delle flussioni per il ricorso alla nozione di movimento, sostenendo che l'analisi dovesse trattare esclusivamente quantità algebriche; analoga posizione fu assunta da Euler, il quale rivendicava un'analisi pura priva di figure e diagrammi (ideale poi rimarcato da Lagrange con l'assenza totale di figure nella sua *Mécanique analytique*). Fu proprio l'insistenza di Lagrange nel tradurre questa filosofia in un programma sistematico a convincere i matematici del primo Ottocento della necessità di una riduzione algebrica del calcolo. Emblematico fu l'apporto di Bernard Bolzano, il quale sostenne con forza la necessità di liberare l'analisi dalla geometria, giudicando un un'offesa al buon metodo ricavare verità matematiche pure da nozioni estranee quali lo spazio, il tempo o il movimento. Sulla stessa scia, Cauchy avrebbe adottato l'espressione lagrangiana *analyse algébrique* per il celebre sottotitolo del suo *Cours d'analyse* (1821).

2.2.2 La prospettiva algebrica: una fase di transizione

Già nel 1754, durante l'insegnamento alle Regie Scuole di Artiglieria di Torino, Lagrange manifestò l'esigenza di sviluppare la «vera metafisica» dei principi del calcolo. Nel 1760, in una nota al testo del frate barnabita Gerdil, egli analizzò criticamente l'uso degli infinitesimi di L'Hôpital, osservando che la correttezza dei risultati era ottenuta soltanto

attraverso una «compensazione degli errori» reciproca e non dimostrata. Sebbene in quella fase giovanile ritenesse ancora valido l'approccio newtoniano dei primi e ultimi rapporti, tra il 1760 e il 1772 Lagrange maturò un definitivo scetticismo verso i fondamenti sia leibniziani che newtoniani. Nel celebre saggio del 1772, *Sur une nouvelle espèce de calcul*, egli dichiarò che l'analisi poteva diventare rigorosa soltanto se ridotta interamente a concetti algebrici.

La pubblica ammissione della crisi dei fondamenti avvenne nel 1784 quando, su proposta dello stesso Lagrange, l'Accademia delle Scienze di Berlino bandì un celebre concorso a premi per ottenere «una teoria chiara e precisa di ciò che si chiama infinito in matematica» [9]. L'insoddisfazione per le memorie presentate (compresa quella vincitrice di L'Huilier) spinse Lagrange a tradurre le sue riflessioni in una trattazione sistematica.

Il culmine di questo programma fu raggiunto nel trattato *Théorie des fonctions analytiques* (1797), nato per le lezioni all'École Polytechnique. Lagrange si propose di eliminare completamente sia le intuizioni geometriche e fisiche sia i concetti di limite e di infinitesimo, riducendo l'intera analisi allo studio delle funzioni esplicitate mediante serie di potenze. La sua strategia si basava sull'assunzione che, dato un incremento h della variabile x, ogni funzione $f(x)$ potesse essere sviluppata nella forma:

$$f(x+h) = f(x) + ah + bh^2 + ch^3 + \dots$$

In quest'ottica, i coefficienti $a, b, c, \dots$ delle successive potenze di h non venivano definiti attraverso un passaggio al limite di un rapporto incrementale, ma venivano individuati direttamente come le derivate successive (prima, seconda, terza, ...) della funzione $f(x)$, fornendone così una definizione puramente algebrica nel campo dell'analisi finita.

Il contributo cruciale della *Théorie des fonctions analytiques* non risiede soltanto nella specifica definizione algebrica della derivata, ma nell'impostazione metodologica complessiva:

1. Lagrange non relegò le definizioni a un'introduzione formale, ma si impose di ridimostrare rigorosamente l'intero corpo dei risultati noti dell'analisi (compresa la relazione tra derivata e integrale) a partire dal suo fondamento algebrico.

2. Rifiutò categoricamente il ricorso alla geometria e alla cinematica come strumenti di prova, stabilendo che l'analisi doveva bastare a se stessa.

3. Introdusse sistematicamente la stima dei termini di errore nelle approssimazioni (attraverso la celebre forma del resto nella serie di Taylor).

Sebbene il programma algebrico di Lagrange sia storicamente fallito — a causa dell'impossibilità di sviluppare in serie di Taylor funzioni non analitiche o prive di derivate di ordine superiore — esso trasformò la natura della ricerca matematica. Riconoscendo che la questione del rigore era un problema matematico centrale e non periferico, Lagrange fornì sia a Bolzano sia a Cauchy non soltanto una serrata critica delle vecchie metafisiche, ma anche gli strumenti operativi (l'algebra delle disuguaglianze e le stime d'errore) che Cauchy avrebbe convertito nei pilastri della sua nuova analisi fondata sui limiti.

2.2.3 Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale

Nel quadro della transizione verso il rigore ottocentesco, assume un ruolo di primaria importanza l'analisi del modo in cui Lagrange affrontò la dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Come abbiamo già sottolineato in 2.1.2, dal punto di vista della struttura logica, per Lagrange l'integrale indefinito non possedeva una definizione autonoma, poiché coincideva semplicemente con la ricerca della funzione primitiva. Ciononostante, egli fu in grado di formulare e dimostrare una versione tecnicamente sofisticata di questo teorema, provando che [9]

Teorema 2.

$f(x) = F'(x)$ per una funzione $F(x)$ definita come l'area sotto la curva $y = f(x)$ fino a una certa x

Dimostrazione. Consideriamo l'area racchiusa sotto la curva tra i punti x ed $x+i$, rappresentandola analiticamente mediante l'incremento della funzione area $F(x+i) - F(x)$. Se ipotizziamo che la funzione $f(x)$ sia monotonicamente crescente nell'intervallo $[x, x+i]$, la geometria della situazione rende evidente che l'area della regione sottesa dalla curva debba necessariamente trovarsi compresa tra l'area del rettangolo iscritto $if(x)$ e quella del rettangolo circoscritto $if(x+i)$. Da tale intuizione geometrica scaturisce la disuguaglianza fondamentale:

$$if(x) \leq F(x+i) - F(x) \leq if(x+i) \tag{2.1}$$

Applichiamo lo sviluppo in serie di Taylor con resto per esprimere analiticamente i termini $f(x+i)$ e $F(x+i)$, ottenendo

$$f(x+i) = f(x) + if'(x+j_f)$$

e

$$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j_F)$$

dove j_f e j_F rappresentano due valori idonei compresi tra 0 ed i. Sostituendo tali espressioni algebriche nella disuguaglianza geometrica iniziale 2.1, otteniamo:

$$if(x) \leq iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j_F) \leq if(x) + i^2 f'(x+j_f)$$

Sottraiamo l'elemento $if(x)$ a tutti i membri in modo che la catena di disuguaglianze si trasformi nella seguente stima per il termine d'errore:

$$0 \leq i\big[F'(x) - f(x)\big] + \frac{i^2}{2}F''(x+j_F) \leq i^2 f'(x+j_f) \tag{2.2}$$

Vogliamo ora dimostrare che $F'(x) - f(x) = 0$. Per farlo supponiamo per assurdo che $F'(x) - f(x) \neq 0$. Allora è sempre possibile scegliere un valore di i tale che:

$$|i| < \left| \frac{F'(x) - f(x)}{f'(x+j_f) - \frac{1}{2}F''(x+j_F)} \right|$$

rendendo falsa la disuguaglianza 2.2. Questo ragionamento porta ad un assurdo. Di conseguenza, concludiamo che con il risultato cercato:

$$F'(x) = f(x)$$

□

L'uso fatto da Lagrange dello sviluppo in serie di Taylor svolse nel suo impianto teorico la medesima funzione logica che il teorema del valor medio per le derivate avrebbe svolto successivamente nell'opera di Cauchy. Inoltre, la gestione sofisticata dell'algebra delle disuguaglianze mostra una stretta parentela tecnica con la successiva dimostrazione di Cauchy, suggerendo un'influenza diretta (o mediata dai lavori di Poisson basati ovviamente a loro volta sui lavori di Lagrange) sul matematico francese.

Limiti della dimostrazione Tuttavia, la dimostrazione di Lagrange presentava profondi limiti concettuali legati al suo contesto epistemologico. In primo luogo, Lagrange presupponeva esplicitamente che la funzione F ammettesse almeno due derivate, ipotizzando a priori che f possedesse sia le derivate sia le primitive. In secondo luogo, la sua prova necessitava che la funzione fosse monotona e poggiava sul concetto non definito di area sotto la curva.

Per adattare la dimostrazione di Lagrange ai suoi scopi, Cauchy dovette definire e provare l'esistenza di F. In più dovette cercare e dimostrare un risultato equivalente a 2.1 ma che non fosse limitato solo alle funzioni monotone. Per fare ciò dovette enunciare il teorema della media per gli integrali definiti:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0) f\big(x_0 + \theta(X - x_0)\big) \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 1 \tag{2.3}$$

In questo modo, Cauchy riprese i risultati e le stime d'errore di Lagrange, fornendo loro una base logica interamente rinnovata e trasformandoli nel pilastro rigoroso che unisce il calcolo differenziale al calcolo integrale.

Dall'algebra delle serie all'algebra delle disuguaglianze: la svolta metodologica di Cauchy Sebbene Cauchy accogliesse l'ideale lagrangiano di un'analisi di stampo algebrico, rifiutò categoricamente lo specifico presupposto teorico individuato dal suo predecessore [9]. Lagrange aveva esteso al calcolo i metodi dell'algebra delle serie infinite, confidando nel principio della generalità formale. Cauchy avvertì tuttavia che le relazioni simboliche sussistono solo a determinate condizioni e che le serie infinite hanno valore analitico solo quando sono rigorosamente convergenti. Rilevando inoltre che funzioni distinte possono condividere la medesima serie di Taylor, Cauchy concluse che la teoria delle serie di potenze non potesse costituire la base logica del calcolo. La fondamentale intuizione di Cauchy fu la comprensione che il vero pilastro dell'analisi non era l'algebra delle uguaglianze formali usata da Lagrange, bensì l'algebra delle disuguaglianze, affinata attraverso lo studio e il controllo rigoroso delle stime d'errore nelle approssimazioni.

2.3 Augustin-Louis Cauchy

Cenni biografici Augustin-Louis Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789. La sua infanzia fu segnata dalle turbolenze della Rivoluzione Francese: nel 1793 la famiglia si rifugiò ad Arcueil per sfuggire ai pericoli della capitale, e affrontò anni di ristrettezze e stenti alimentari. Rientrato a Parigi, ricevette la prima istruzione dal padre in un ambiente frequentato da illustri scienziati come Pierre-Simon Laplace e Joseph-Louis Lagrange. Su consiglio di quest'ultimo, approfondì prima gli studi classici presso l'École Centrale du Panthéon, intraprese poi la formazione matematica all'École Polytechnique dal 1805, e si avviò infine alla carriera di ingegnere presso l'École des Ponts et Chaussées.

Inviato a Cherbourg nel 1810 per lavorare alle strutture portuali destinate alla flotta d'invasione napoleonica, Cauchy dedicò le notti e il tempo libero alla ricerca pura, dimostrando importanti risultati sulla geometria dei poliedri convessi. Nel 1812, colpito da una forte depressione, rientrò a Parigi e abbandonò progressivamente l'ingegneria per cercare un posizionamento accademico. L'ascesa fu rapida: tra il 1815 e il 1816 ottenne la cattedra di analisi all'École Polytechnique, vinse il Grand Prix dell'Accademia delle Scienze per un lavoro sulle onde e risolse una celebre congettura di Fermat sui numeri poligonali. In seguito all'estromissione di Carnot e Monge per motivi politici legati alla Restaurazione monarchica, Cauchy fu nominato membro dell'Académie des Sciences e assunse la cattedra di Biot al Collège de France.

Negli anni venti dell'Ottocento compì la sua celebre rivoluzione concettuale. Con opere fondamentali come il *Cours d'analyse* (1821) e il *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), Cauchy rifondò l'analisi matematica ponendo il concetto rigoroso di limite al vertice della disciplina. Sostituì l'intuizione geometrica e le manipolazioni algebriche settecentesche con un'algebra delle disuguaglianze, definì formalmente la continuità, la derivata come limite del rapporto incrementale, la convergenza delle serie, la teoria dei residui e la nozione di funzione complessa. Inoltre, ridefinì l'integrale definito in modo del tutto autonomo dall'antiderivata come limite di somme finite di partizione, fornendo la prima dimostrazione formale del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Uomo d'indole intransigente e di profonda fede cattolica, entrò spesso in conflitto ideologico e personale con i colleghi, talvolta non incoraggiando i lavori di giovani talenti come Niels Henrik Abel ed Évariste Galois. Nel 1830, a seguito della Rivoluzione di Luglio, si rifiutò di giurare fedeltà al nuovo regime di Luigi Filippo, perdendo le sue cattedre e scegliendo l'esilio volontario a Torino — dove insegnò fisica teorica — e poi a Praga come tutore del duca di Bordeaux.

Rientrato a Parigi nel 1838, riprese l'attività all'Académie ma tornò a insegnare solo dopo la caduta della monarchia nel 1848. In quest'ultima fase si dedicò intensamente alla fisica matematica, alla teoria dell'elasticità e alle equazioni differenziali. Cauchy morì improvvisamente a Sceaux il 23 maggio 1857. Con 789 articoli scientifici redatti, rimase uno dei matematici più prolifici e influenti della storia, la cui opera gettò le basi logiche dell'analisi moderna.



Figura 2.2: Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

2.3.1 La definizione di limite e il rigore analitico

È un luogo comune ampiamente diffuso nella storiografia della matematica ritenere che Cauchy abbia fornito le prime definizioni rigorose di limite, convergenza, continuità e derivata, e che si sia avvalso di tali concetti per strutturare sia il primo impianto sostanzialmente rigoroso dell'analisi infinitesimale, sia una trattazione sistematica dei criteri di convergenza per le serie infinite. È altrettanto noto l'assunto secondo cui le dimostrazioni di Cauchy avrebbero introdotto per la prima volta il formalismo ε-δ nell'analisi moderna.

Tuttavia, quando ci si accosta direttamente ai testi principali di Cauchy con queste aspettative si rischia di rimanere delusi. Sfogliando il *Cours d'analyse* del 1821, si noterà subito l'assenza di simboli quali δ o ϵ nelle vicinanze della definizione di limite; le parole utilizzate sembrano infatti richiamare l'intuizione dinamica piuttosto che l'algebra delle disuguaglianze. Analogamente, consultando il *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* del 1823 alla ricerca del concetto di derivata, si scoprirà con sorpresa che Cauchy la definiva ancora come il valore del rapporto incrementale quando gli incrementi diventano infinitesimi. Inoltre, analizzando la teoria delle serie nel *Cours d'analyse*, si potrebbe rimanere delusi nel constatare che, pur impiegando il celebre criterio di convergenza che porta il suo nome, Cauchy non tentò neppure di dimostrare che esso costituisse una condizione sufficiente per la convergenza. Di fronte a tali elementi, si potrebbe essere indotti a concludere che il reale apporto di Cauchy al rigore matematico sia stato fortemente sopravvalutato.

Tuttavia, la discrepanza tra le aspettative del lettore contemporaneo e l'effettivo

operato di Cauchy è più apparente che reale. Le definizioni e i procedimenti cauchiani possiedono infatti una solidità concettuale notevole, non soltanto se confrontati al contesto dell'epoca, ma anche rispetto ai canoni dell'analisi moderna. La difficoltà principale che il matematico moderno incontra nell'apprezzare l'opera di Cauchy deriva innanzitutto da una terminologia arcaica, il cui impiego rispondeva in realtà a una precisa scelta metodologica. Un secondo ostacolo risiede nella natura didattica dei volumi del 1821-1823, concepiti originariamente come lezioni per gli studenti dell'École Polytechnique destinati alle scienze applicate. Infine, va considerata la ridotta familiarità del lettore di oggi con lo stile espositivo, maggiormente discorsivo, tipico della matematica del primo Ottocento.

Per illustrare la portata di questa rifondazione concettuale, è sufficiente esaminare la nozione cardine dell'intera analisi cauchiana — il concetto di limite —, su cui poggiano le successive definizioni di continuità, convergenza, derivata e integrale:

Definizione 2. *Quando i valori successivi attribuiti a una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fisso, finendo per differire da esso di quanto si desidera, questo valore fisso è chiamato il limite di tutti gli altri.*

Rispetto alla tradizione settecentesca, Cauchy compì un passo decisivo distinguendo nettamente tra la variabile e il valore fisso che ne costituisce il limite, rimuovendo così ogni vincolo restrittivo sulla monotonicità o sulla coincidenza con il limite. Sebbene la formulazione di Cauchy mantenesse una veste discorsiva, essa veniva immediatamente tradotta nel corpo delle dimostrazioni in un'algebra rigorosa di disuguaglianze e stime d'errore, ponendo le basi per il formalismo e per la rigorizzazione dell'intera analisi infinitesimale.

2.3.2 Le motivazioni storiche della nuova definizione di integrale Cauchy

Per comprendere la portata della rivoluzione operata da Cauchy negli anni venti dell'Ottocento, è necessario chiarire le ragioni che lo spinsero ad abbandonare la concezione settecentesca dell'integrale definito come semplice differenza dei valori della primitiva agli estremi d'integrazione, in favore di una definizione autonoma basata sul limite di somme.

Da una prospettiva moderna, tale ridefinizione appare imprescindibile per il rigore dell'analisi, poiché non vi è alcuna garanzia a priori che ogni funzione ammetta una primitiva esplicita o esprimibile in termini di funzioni elementari. Tuttavia, l'esigenza di Cauchy non nacque soltanto da una pura speculazione astratta o da esigenze didattiche legate ai suoi corsi all'École Polytechnique, bensì dalle concrete necessità della ricerca matematica del suo tempo [9]:

- **Punti di discontinuità e poli:** Esempi già esaminati da Adrien-Marie Legendre e dallo stesso Cauchy nella memoria del 1814 evidenziavano come la formula $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$ fallisse quando nel dominio della funzione ci fossero dei punti in cui la funzione presentava o delle discontinuità o dei poli, richiedendo correttivi ad hoc come l'utilizzo di una formula speciale, il *valore principale di Cauchy*.

- **L'integrazione nel campo complesso:** Nei suoi fondamentali lavori sull'analisi complessa (a partire dalla memoria del 1814 e nei successivi sviluppi del 1825), Cauchy rilevò che il valore di un integrale tra due punti può dipendere dal cammino di integrazione scelto (come osservato anche da Poisson nel 1820). Ridurre l'integrale alla pura valutazione della primitiva agli estremi risultava del tutto insufficiente nel dominio complesso, imponendo la necessità di una teoria rigorosa nel reale basata sulle somme lungo un percorso.
- **Gli studi di Fourier:** Gli studi di Fourier sulla propagazione del calore avevano condotto a studiare le serie trigonometriche e poiché le somme delle serie trigonometriche presentavano delle discontinuità avevano reso necessario un profondo ripensamento del concetto di funzione.

In realtà mentre Cauchy operava questa rivoluzione, in parallelo c'era già chi lavorava per il suo superamento: infatti mentre Cauchy definiva un integrale che richiedeva una continuità (che si basava essenzialmente sulla continuità della funzione integranda), dalle ricerche di Fourier sorgeva la necessità di trattare in modo più sistematico le funzioni discontinue.

2.3.3 I precursori del XVIII secolo: Euler, Lacroix e Poisson

Nel formulare la sua teoria, Cauchy riprese e formalizzò intuizioni e tecniche d'approssimazione numerica sviluppate nel secolo precedente:

1. **Leonhard Euler (*Institutiones calculi integralis*, 1768–1770):** Pur definendo teoricamente l'integrale come l'inverso del differenziale, Euler aveva già fatto uso di formule approssimate per calcolare gli integrali $\int X\,dx$ suddividendo il dominio d'integrazione in sottointervalli e approssimando con una formula del tipo

   $$y = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + \cdots +' X(x -' X)$$

   valutando la funzione agli estremi sinistri dei segmenti. Euler fornì stime d'errore per funzioni monotone, ma presupponeva l'esistenza dell'integrale a prescindere dal processo di approssimazione.

2. **Silvestre-François Lacroix (*Traité du calcul*, 1797):** Attraverso il suo trattato, Lacroix trasmise a Cauchy sia la terminologia fondamentale (*elemento*, *costante arbitraria*, *integrale definito/indefinito*) sia la dimostrazione formale che, per funzioni monotone o a tratti monotone, partizioni via via più fitte producono somme sempre più vicine al valore effettivo dell'integrale.

3. **Simon-Denis Poisson (1820):** Nel tentativo di dimostrare quella che definì la «proposizione fondamentale della teoria degli integrali definiti», Poisson utilizzò lo sviluppo di Taylor con resto per mostrare che la differenza tra $F(b) - F(a)$ e la somma $S = \alpha \sum f(a+k\alpha)$ soddisfaceva la disuguaglianza $|F(b)-F(a)-S| \leq |M(b-a)\alpha^k|$, tendente a zero al rimpicciolirsi di α. La dimostrazione di Poisson soffriva

tuttavia di due gravi limiti: era ristretta a partizioni con sottointervalli uguali e si affidava all'intuizione geometrica per affermare l'indipendenza del risultato dalla modalità di suddivisione dell'intervallo.

2.3.4 L'integrale definito: definizione e esistenza

Di seguito viene presentata la riscrittura e la formalizzazione in termini moderni delle dimostrazioni originali di Cauchy sulla definizione e l'esistenza dell'integrale definito, tratte dalla Lezione 21 del *Calcul Infinitésimal* (*Œuvres*, Serie 2, Vol. 4, pp. 122–125) [9].

Supponiamo che la funzione $y = f(x)$ sia continua rispetto alla variabile x tra i due limiti finiti $x = x_0, x = X$. Designiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuovi valori di x posti tra questi limiti e supponiamo che essi aumentino sempre o diminuiscano sempre tra il primo limite e il secondo. Possiamo usare questi valori per dividere la differenza $X - x_0$ in elementi

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ X - x_{n-1}, \tag{2.4}$$

che abbiano tutti lo stesso segno. Una volta fatto ciò, moltiplichiamo ciascun elemento per il valore di $f(x)$ corrispondente all'estremo sinistro di tale elemento: cioè, l'elemento $x_1 - x_0$ sarà moltiplicato per $f(x_0)$, l'elemento $x_2 - x_1$ per $f(x_1)$, ...e infine l'elemento $X - x_{n-1}$ per $f(x_{n-1})$; e sia

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \tag{2.5}$$

la somma dei prodotti così ottenuti. La quantità S dipenderà chiaramente da:

1°: il numero n di elementi in cui abbiamo diviso la differenza $X - x_0$;

2°: i valori di questi elementi e quindi la modalità di divisione adottata.

È importante osservare che se i valori numerici di questi elementi diventano molto piccoli e il numero n molto grande, la modalità di divisione avrà solo un effetto insignificante sul valore di S. Questo infatti può essere dimostrato come segue.

Se dovessimo supporre tutti gli elementi della differenza $X - x_0$ ridotti a un unico elemento, che sarebbe proprio quella differenza, avremmo semplicemente che

$$S = (X - x_0)f(x_0). \tag{2.6}$$

Quando invece prendiamo le espressioni 2.4 per gli elementi della differenza $X - x_0$, il valore di S, determinato in questo caso dall'equazione 2.5, sarà uguale alla somma degli elementi moltiplicati per una media dei coefficienti $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$. [1]

[1] Cauchy aveva definito la *media* di un insieme di elementi $\{a_1, \ldots, a_n\}$, che designava con $M(a_1 \ldots a_n)$, come una quantità compresa tra il minimo e il massimo degli elementi dell'insieme. A questo punto della trattazione dell'integrale, per giustificare la conclusione sopra citata, Cauchy fece riferimento al *Cours d'analyse*, teorema III, Corollario. Questo corollario, riscritto in notazione moderna con gli indici per chiarezza, è il seguente: Supponiamo di avere un insieme di n quantità che hanno tutte

Inoltre, poiché questi coefficienti sono valori particolari dell'espressione $f[x_0+\theta(X-x_0)]$ per valori di θ compresi tra zero e uno, possiamo dimostrare con argomentazioni simili a quelle usate nella settima lezione che la media in questione è un altro valore della stessa espressione, corrispondente a un valore di θ compreso tra gli stessi limiti. Possiamo quindi sostituire all'equazione 2.5 la seguente:

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{2.7}$$

dove θ sarà un numero non negativo minore di uno.

Per passare dalla modalità di divisione che abbiamo appena considerato a un'altra in cui i valori numerici degli elementi di $X-x_0$ sono ancora più piccoli, è sufficiente dividere ciascuna delle espressioni 2.4 in nuovi elementi. Dobbiamo quindi sostituire nel membro di destra dell'equazione 2.5 il prodotto $(x_1-x_0)f(x_0)$ con una somma di prodotti simili, per la quale possiamo sostituire un'espressione della forma $(x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]$, dove θ_0 è un numero non negativo minore di uno; si noti che avremo tra questa somma e il prodotto $(x_1-x_0)f(x_0)$ una relazione simile a quella che esiste tra i valori di S dati dalle equazioni 2.7 e 2.6.

Analogamente, dobbiamo sostituire al prodotto $(x_2-x_1)f(x_1)$ una somma di termini che possono essere scritti nella forma $(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]$, dove θ_1 designa ancora un numero non negativo minore di uno. Continuando in questo modo, concludiamo infine che nella nuova modalità di divisione il valore di S sarà della forma

$$\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ & + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Se nell'equazione 2.8 poniamo

$$\begin{aligned} f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] &= f(x_0) \pm \epsilon_0, \\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] &= f(x_1) \pm \epsilon_1, \\ &\vdots \\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] &= f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

possiamo ricavare

$$S = (x_1-x_0)[f(x_0)\pm\epsilon_0]+(x_2-x_1)[f(x_1)\pm\epsilon_1]+\cdots+(X-x_{n-1})[f(x_{n-1})\pm\epsilon_{n-1}]. \tag{2.9}$$

lo stesso segno: $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Consideriamo un altro insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ di n quantità, e ricordiamo che la loro media $M(a_1 \dots a_n)$ è compresa tra il minimo e il massimo degli a_k. Allora il corollario afferma:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n = (y_1 + \cdots + y_n)M(a_1 \dots a_n).$$

Applicando questo al problema nel testo, poniamo $a_k = f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n$, e poniamo $y_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $y_n = X - x_{n-1}$. Usando il corollario, la conclusione di Cauchy è:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}) = (X - x_0)M[f(x_0) \dots f(x_{n-1})].$$

Quindi, sviluppando questi prodotti,

$$\begin{aligned} S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \\ \pm \epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Possiamo aggiungere che se gli elementi $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$ hanno valori numerici molto piccoli, ciascuna delle quantità $\pm\epsilon_0, \pm\epsilon_1, \ldots, \pm\epsilon_{n-1}$ sarà molto vicina a zero, e quindi lo stesso varrà per la somma

$$\pm\epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

che equivale al prodotto di $X - x_0$ per una media tra queste quantità. Ammesso ciò, quando compariamo le equazioni 2.5 e 2.10 vediamo che non cambieremmo percepibilmente il valore di S calcolato con una modalità di divisione in cui gli elementi della differenza $X - x_0$ hanno valori numerici molto piccoli se passassimo a una seconda modalità di divisione in cui ciascuno di quegli elementi fosse ulteriormente suddiviso in altri.

Ora supponiamo di considerare due distinte modalità di divisione della differenza $X - x_0$ in ciascuna delle quali gli elementi della differenza abbiano valori numerici molto piccoli. Possiamo confrontare queste due modalità con una terza modalità, scelta in modo che ogni elemento, sia della prima che della seconda modalità, sia formato unendo diversi elementi della terza modalità. Per soddisfare questa condizione, è sufficiente che ciascuno dei valori di x posti tra i limiti x_0 e X nelle prime due modalità sia utilizzato nella terza; e possiamo dimostrare che cambiamo pochissimo il valore di S passando dalla prima o dalla seconda modalità alla terza — e quindi, passando dalla prima alla seconda.

Così, quando gli elementi della differenza $X - x_0$ diventano infinitamente piccoli, la modalità di divisione ha solo un effetto impercettibile sul valore di S; e, se lasciamo che i valori numerici di questi elementi diminuiscano mentre il loro numero aumenta, il valore di S diventa infine, per tutti gli scopi pratici, costante. O, in altre parole, raggiunge infine un certo limite che dipende unicamente dalla forma della funzione $f(x)$ e dai valori limite x_0, X della variabile x. Questo limite è ciò che viene chiamato *integrale definito*.

2.3.5 Il teorema fondamentale del calcolo integrale di Cauchy

È interessante notare come Cauchy non abbia mai definito esplicitamente questo risultato con l'appellativo di "teorema fondamentale". La sua dimostrazione si basava sulla combinazione originale di due elementi chiave: il teorema della media per gli integrali, uno strumento già noto a Lagrange, e la proprietà di additività dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione, proprietà nota da tempo e che per Cauchy costituiva una diretta e immediata conseguenza della sua nuova definizione di integrale come limite di somme. La struttura di questa dimostrazione, fondata sulla derivazione della funzione integrale come limite del rapporto incrementale, risulta sorprendentemente moderna e rispecchia quasi del tutto la formulazione e la trattazione didattica che utilizziamo ancora oggi.
Di seguito viene presentata la riscrittura e la formalizzazione in termini moderni delle dimostrazioni originali di Cauchy sulla definizione e l'esistenza dell'integrale definito,

tratte dalla Lezione 21 del *Calcul Infinitésimal* (*Œuvres*, Serie 2, Vol. 4, pp. 151–152) [9].

Teorema 3. *Se $f(x)$ è continua e limitata nell'intevallo $[x_0, X]$ e*

$$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

allora

$$\mathfrak{F}'(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Se nell'integrale definito $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ lasciamo variare uno dei due limiti di integrazione, per esempio X, l'integrale stesso varierà con quella quantità. E se il limite X, ora variabile, viene sostituito da x, otteniamo come risultato una nuova funzione di x, che sarà ciò che viene chiamato un *integrale preso dall'origine* $x = x_0$. Sia

$$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{2.11}$$

questa nuova funzione. Sapendo che $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, otteniamo

$$\mathfrak{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathfrak{F}(x_0) = 0, \tag{2.12}$$

essendo θ un numero non negativo minore di uno. Inoltre, dalla formula

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\epsilon}^{X} f(x)\,dx \quad \text{dove } x_0 \le \epsilon \le X$$

si ottiene che

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha),$$

o

$$\mathfrak{F}(x + \alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha). \tag{2.13}$$

Segue dalle equazioni 2.12 e 2.13 che se la funzione $f(x)$ è finita e continua nell'intorno di un particolare valore della variabile x, la nuova funzione $\mathfrak{F}(x)$ non solo sarà finita ma anche continua nell'intorno di quel valore, poiché a un incremento infinitamente piccolo di x corrisponderà un incremento infinitamente piccolo in $\mathfrak{F}(x)$.

Quindi, se la funzione $f(x)$ rimane finita e continua da $x = x_0$ a $x = X$, lo stesso varrà per la funzione $\mathfrak{F}(x)$. In aggiunta, se entrambi i membri della formula 2.13 vengono divisi per α, possiamo concludere passando ai limiti che

$$\mathfrak{F}'(x) = f(x). \tag{2.14}$$

□

Così la funzione integrale descritta dalla 2.11 considerata come funzione di x ha come derivata la funzione $f(x)$ che compare sotto il segno di integrale.

Con questa dimostrazione, Cauchy ricongiunse i due rami del calcolo: l'integrazione come limite di somme e la derivazione come limite del rapporto incrementale si rivelarono matematicamente l'una l'operazione inversa dell'altra, fondando l'analisi moderna su basi interamente e indipendenti dall'intuizione geometrica o fisica.

Il salto epistemologico di Cauchy: l'eredità verso Riemann e Darboux La dimostrazione di Cauchy segna così il definitivo superamento della concezione settecentesca: l'integrale non è più inteso come mera operazione inversa della derivata, ma come un oggetto matematico autonomo fondato rigorosamente sul concetto di limite. Chiarendo il legame tra integrazione e derivazione tramite un vero e proprio teorema da dimostrare e non come una definizione tautologica, Cauchy ha gettato le basi su cui si innesteranno, nella seconda metà dell'Ottocento, i successivi e fondamentali contributi di Bernhard Riemann e Gaston Darboux.

Capitolo 3

Estensioni dell'integrale e generalizzazioni del teorema fondamentale

In questo capitolo analizzeremo l'evoluzione del teorema fondamentale del calcolo integrale a seguito della rifondazione dell'analisi ad opera di Cauchy. La definizione di Cauchy come abbiamo visto richiedeva un'ipotesi molto pesante cioè la continuità della funzione integranda. Come abbiamo già accennato, soprattutto a causa dei lavori di Fourier sull'equazione del calore, cominciarono a emergere funzioni via via più irregolari e "patologiche" che non rientravano nel perimetro d'azione del teorema fondamentale alla Cauchy. L'emergere di queste funzioni costrinse a ripensare al teorema, imponendo di riconsiderare le basi stesse della teoria dell'integrazione. La nostra indagine prende così le mosse dalla ridefinizione dell'integrale formulata da Riemann nel 1854, nata proprio dall'esigenza di comprendere quali funzioni fossero ancora integrabili in presenza di insiemi infiniti di punti di discontinuità. Succesivamente analizzeremo i contributi di Vito Volterra e Giuseppe Vitali, rimanendo sempre nell'ambito dell'integrazione alla Riemann. Non ci occuperemo invece della formulazione e degli sviluppi del teorema fondamentale connessi alla teoria dell'integrazione di Lebesgue, soprattutto perché questi si collocano fuori dagli scopi della didattica della scuola superiore. Analizzeremo invece, nella parte finale del capitolo, la formulazione del teorema fondamentale legata all'integrale di Henstock. Questo integrale, che risale alla seconda metà del Novecento, è definito in modo molto simile a quello di Riemann e rende integrabili tutte le funzioni che sono integrabili secondo Riemann. Tuttavia per questo integrale il teorema fondamentale assume una forma universale, afferma infatti che se f è la derivata di una funzione F allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

3.1 L'evoluzione del concetto di funzione

Per comprendere appieno le ragioni che spinsero Riemann a riconsiderare e rifondare la nozione di integrale definito nel 1854, è indispensabile ripercorrere la complessa evoluzione della nozione di *funzione*. Tale concetto non è nato infatti come un'idea compiuta, bensì come l'esito di un processo secolare di graduale astrazione, passato dalla descrizione quantitativa di fenomeni fisici e geometrici alla formulazione algebrica, fino alla pura corrispondenza insiemistica [25].

Sebbbene relazioni funzionali implicite siano rintracciabili già nell'antichità con le tavole astronomiche babilonesi, le prime intuizioni di una rappresentazione quantitativa delle variazioni risalgono al XIV secolo con Nicole Oresme. Egli introdusse l'idea di raffigurare l'intensità di una quantità variabile mediante segmenti verticali eretti sopra una linea base, prefigurando in modo embrionale il concetto di grafico. Tuttavia, è soltanto nel Seicento, con la nascita della geometria analitica ad opera di René Descartes e Pierre de Fermat, che la relazione tra variabili assume un legame algebrico esplicito: le funzioni venivano identificate direttamente con le equazioni algebriche delle curve geometriche, in una corrispondenza biunivoca tra equazione e rappresentazione visiva. Con l'invenzione del calcolo infinitesimale alla fine del XVII secolo, Isaac Newton concepì le variabili in termini cinematici come quantità *fluenti* generate dal movimento continuo nel tempo, mentre Gottfried Wilhelm Leibniz introdusse per la prima volta il termine stesso di «funzione» (1692) per indicare grandezze geometriche dipendenti da una curva, quali ordinate, sottotangenti o raggi di curvatura.

Nel corso del Settecento si assistette al progressivo distacco dell'analisi dalla geometria. Leonhard Euler, nella sua fondamentale opera *Introductio in analysin infinitorum* (1748), diede la prima definizione puramente analitica di funzione, intesa come un'espressione composta in modo qualsiasi da una quantità variabile e da costanti. Per Euler e i suoi contemporanei, la natura di una funzione risiedeva nella sua formula: una funzione era detta *continua* se era espressa da un'unica legge analitica globale su tutto il suo dominio, mentre era considerata *discontinua* o "mista" se risultava definita a tratti mediante formule distinte su sottointervalli differenti. Successivamente, Lagrange cercò di fondare l'intero calcolo infinitesimale su basi algebriche rigorose, definendo le funzioni attraverso la loro sviluppabilità in serie di potenze (serie di Taylor) e consolidando l'idea che una funzione ben definita dovesse possedere un elevato grado di regolarità e derivabilità. Questa impostazione fondata sull'equivalenza tra formula analitica e regolarità geometrica entrò in una profonda crisi all'inizio dell'Ottocento a causa degli studi di Fourier sulla propagazione del calore che condussero a ripensare al concetto di funzione. Nel medesimo periodo, Cauchy, nel suo *Cours d'Analyse*, definì la continuità non più in termini algebrici, bensì in termini analitici di limite: una funzione $f(x)$ è continua se una variazione infinitamente piccola della variabile x produce una variazione infinitamente piccola della funzione. Ciononostante, Cauchy e la maggior parte dei matematici della sua epoca continuavano intuitivamente a figurarsi le funzioni come oggetti legati a tracciati geometrici continui o continui a tratti, preparando il terreno per la definitiva svolta operata da Dirichlet nel 1829.

La rottura epistemologica di Dirichlet (1829) La definitiva rottura con l'intuito geometrico e con il formalismo algebrico avvenne nel 1829 per opera del matematico tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Nel riesaminare le condizioni di convergenza delle serie di Fourier, Dirichlet formulò la prima definizione astratta e moderna di funzione come corrispondenza univoca ed arbitraria tra due variabili numeriche, prescindendo completamente dall'esistenza di formule esplicite o di una rappresentabilità grafica.

Per mostrare fino a quale grado di astrazione potesse spingersi tale definizione, Dirichlet introdusse un celebre controesempio: una funzione definita su un intervallo limitato che assume due valori distinti a seconda della natura algebrica del punto considerato. «Si suppone», scrisse, «che $\phi(x)$ sia uguale a una determinata costante c quando la variabile x assume un valore razionale e sia uguale a un'altra costante d quando la variabile è irrazionale» [7]. Ponendo $c = 1$ e $d = 0$, si ottiene la funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali, nota oggi come *funzione di Dirichlet*:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{3.1}$$

La funzione di Dirichlet rappresenta un oggetto matematico rivoluzionario: è totalmente discontinua in ogni singolo punto del suo dominio, non è tracciabile sul piano cartesiano e non ammette alcuna rappresentazione geometrica intuitiva. Dirichlet estese in questo modo la classe delle funzioni vincolandole dalla possibilità e necessità di darne una rappresentazione tramite una formula analitica o una rappresentazione grafica. Quindi dopo Dirichlet il concetto di funzione assunse un significato più ampio e più astratto.

3.2 Bernhard Riemann

È precisamente all'interno di questo nuovo paradigma teorico (in cui le funzioni non sono più vincolate alla continuità o alla regolarità geometrica) che si colloca l'opera di Riemann nel 1854. Se una funzione può presentare discontinuità così capillari e diffuse, quali funzioni ammettono ancora un'area sottesa? Quali sono i reali requisiti che garantiscono l'esistenza dell'integrale? Con la sua ridefinizione dell'integrale basata sulle somme d'approssimazione e sull'oscillazione nei sottointervalli, Riemann fornirà una sua risposta a questo fondamentale interrogativo. Questa definizione non rappresentò soltanto un progresso tecnico, ma segnò la definitiva maturazione dell'analisi matematica: la validità dei teoremi fondamentali, e in primis del teorema fondamentale del calcolo integrale, doveva essere attentamente verificata e ridiscussa alla luce delle nuove scoperte.

Cenni biografici Georg Friedrich Bernhard Riemann nacque il 17 settembre 1826 a Breselenz, nel Regno di Hannover [15]. Dopo i primi studi ginnasiali a Hannover e Lüneburg, si iscrisse nel 1846 all'Università di Gottinga, passando presto dalla teologia allo studio della matematica sotto la guida di Moritz Stern e Carl Friedrich Gauss. Tra il 1847 e il 1849 proseguì la formazione all'Università di Berlino, dove l'influenza di



Figura 3.1: Bernhard Riemann (1826–1866)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet fu determinante nel trasmettergli un metodo di pensiero fondato sull'intuizione concettuale e sul rigore logico. Rientrato a Gottinga, completò nel 1851 la tesi di dottorato sulle superfici di Riemann e le funzioni di variabile complessa, ottenendo l'immediato apprezzamento di Gauss per l'eccezionale originalità dei metodi topologici introdotti.

Il momento di svolta per la teoria dell'integrazione giunse nel 1854: durante il percorso di abilitazione all'insegnamento universitario (Habilitation), Riemann presentò la dissertazione intitolata *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Fu proprio all'interno di questo lavoro fondamentale che introdusse per la prima volta la definizione formale di integrale definito mediante le somme d'approssimazione che oggi portano il suo nome, svincolando il calcolo integrale dal presupposto della continuità. Contestualmente, il 10 giugno 1854 tenne la storica lezione abilitativa *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, fondando la geometria riemanniana e anticipando la struttura matematica della relatività generale.

Nominato professore straordinario a Gottinga nel 1857 e succeduto a Dirichlet sulla cattedra di matematica nel 1859, Riemann diede contributi di inestimabile valore alla teoria delle funzioni abeliane e alla teoria dei numeri, formulando nella memoria sulla funzione zeta la celebre Ipotesi di Riemann. Nel giugno del 1862 sposò Elise Koch, con la quale ebbe una figlia. Colpito da tubercolosi nell'autunno dello stesso anno, cercò sollievo nel clima mite d'Italia, dove strinse fecondi legami scientifici con Enrico Betti, Felice Casorati e Francesco Brioschi. Morì a Selasca, sulle sponde del Lago Maggiore, il 20 luglio 1866, all'età di soli trentanove anni.

3.2.1 La definizione di integrale definito

Nella sua memoria del 1854, Bernhard Riemann apre la trattazione dell'integrabilità ponendosi direttamente il fondamentale interrogativo [22]:

> *«Quindi prima di tutto: che cosa si deve intendere con* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*? Per stabilire questo, prendiamo tra* a *e* b*, in ordine di grandezza uno dopo l'altro, una serie di valori* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *e indichiamo per brevità* $x_1 - a$ *con* δ_1*,* $x_2 - x_1$ *con* δ_2*, …,* $b - x_{n-1}$ *con* δ_n *e con* ε *una frazione propria positiva. Il valore della somma:*
>
> $$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$
>
> *dipenderà allora dalla scelta degli intervalli* δ *e delle quantità* ε*. Se essa ha la proprietà, comunque vengano scelti* δ *ed* ε*, di avvicinarsi infinitamente a un limite fisso* A *non appena tutti i* δ *diventano infinitamente piccoli, questo valore si chiama* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*.»*

Tradotta nel linguaggio moderno dell'analisi, questa costruzione storica viene formalizzata nel modo seguente.

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita su un intervallo limitato e chiuso. Si definisce suddivisione (o partizione) dell'intervallo $[a,b]$ un insieme finito e ordinato di punti $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tale che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme di tutte le possibili suddivisioni di $[a,b]$. Per ogni suddivisione $D \in \mathcal{D}$, l'ampiezza di D è definita come la massima lunghezza tra tutti i sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\|D\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Scelta arbitrariamente per ogni sottointervallo una famiglia di punti intermedi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per $i = 1, \ldots, n$, si definisce somma di Riemann della funzione f relativa alla suddivisione D e ai punti ξ_i la quantità:

$$S = S(D, f, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definizione 3 (Funzione integrabile alla Riemann)**.** *La funzione* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice* ***integrabile alla Riemann*** *sull'intervallo* $[a,b]$ *se esiste un numero reale* $I \in \mathbb{R}$ *tale che, per ogni* $\varepsilon > 0$*, esiste un* $\delta > 0$ *per cui, per ogni suddivisione* $D \in \mathcal{D}$ *con* $\|D\| \le \delta$ *e per* ***qualsiasi scelta dei punti intermedi*** $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$*, valga la disuguaglianza:*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

In tal caso, il numero I *è unico e prende il nome di* ***integrale definito di Riemann*** *della funzione* f *nell'intervallo* $[a,b]$*, denotato con la scrittura* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*.*



Figura 3.2: funzione con asintoto verticale in a

Confronto con l'integrale di Cauchy La definizione di Riemann rappresenta un'importante estensione dell'approccio precedentemente sviluppato da Cauchy. Cauchy considerava principalmente funzioni continue su un intervallo limitato. Sotto l'ipotesi di continuità, la scelta dello specifico punto intermedio ξ_i nell' i-esimo sottointervallo risulta inessenziale ai fini della convergenza della somma: assumere $\xi_i = x_{i-1}$ (l'estremo sinistro) porta esattamente allo stesso valore limite che si otterrebbe scegliendo qualunque altro valore dell'intervallo.

Nel momento in cui la continuità viene meno, l'assenza del vincolo sui punti intermedi rivela l'insufficienza del modello di Cauchy. Se f presenta asintoti o punti di discontinuità all'interno di $[x_{i-1}, x_i]$, la quantità $f(\xi_i)$ può variare sensibilmente al variare di ξ_i, provocando oscillazioni macroscopiche nella somma complessiva.

È proprio imponendo la condizione **"per ogni possibile scelta di ξ_i"** che Riemann trasforma questa difficoltà logica in uno strumento di indagine: la definizione 3 permette infatti di valutare rigorosamente l'integrabilità di funzioni aventi insiemi di discontinuità complessi, infiniti o persino densi.

La necessità della limitatezza della funzione Dalla definizione stessa di integrale secondo Riemann emerge una proprietà fondamentale: la limitatezza dell'integranda f nell'intervallo compatto $[a, b]$ è una condizione necessaria per la sua integrabilità.

Per comprendere questa necessità, si consideri per assurdo una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ non limitata, ad esempio, con un asintoto verticale in a (vedi figura 3.2).

In questo scenario, per qualunque suddivisione $D \in \mathcal{D}$ fissata — a prescindere da quanto sia piccola la sua norma $\|D\|$ — nel primo sottointervallo $[x_0, x_1]$ la funzione f non sarà mai superiormente limitata.

Poiché la scelta dei punti intermedi ξ_i è del tutto libera, per quel particolare sottointervallo $[x_0, x_1]$ è possibile scegliere un punto ξ_1 in cui il valore $|f(\xi_1)|$ sia arbitrariamente

grande. Ciò consente di far assumere alla somma di Riemann $S(D, f, \{\xi_i\})$ un valore numerico arbitrariamente grande, indipendentemente dalla finezza della suddivisione $\|D\|$. Di conseguenza, la differenza $|S(D, f, \{\xi_i\}) - I|$ non potrà mai rimanere inferiore a un ε arbitrario per tutte le possibili scelte dei punti intermedi. Pertanto, l'esistenza di un limite finito I richiede inderogabilmente che f sia limitata su $[a, b]$.

3.3 Sviluppi e generalizzazioni del teorema fondamentale

Nell'impostazione classica di Cauchy, la dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale si basa sulla preventiva introduzione della funzione integrale:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cauchy dimostra che se la funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, allora la funzione $F(x)$ risulta derivabile e costituisce una primitiva di f, ossia $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Di conseguenza, $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ e il teorema fondamentale discende come immediato corollario.

Pertanto, nella formulazione di Cauchy, la validità del teorema fondamentale dipende in modo cruciale dalla continuità dell'integranda f. Negli anni successivi, la ricerca matematica si è proposta di indebolire tale ipotesi, indagando il legame tra integrabilità e derivabilità sotto ipotesi più generali.

3.3.1 Il contributo di Vito Volterra

In questo paragragrafo esamineremo un teorema di Vito Volterra del 1881. Ci troviamo quindi a circa trent'anni dalla ridefinizione dell'integrale di Riemann e la sua teoria dell'integrazione è ormai arrivata a una piena maturità. Si erano ormai chiarite le sue potenzialità ma anche i suoi limiti. Uno di questi limiti era legato al fatto che non tutte le derivate fossero integrabili. Quindi il contributo di Volterra fu questo: egli dimostrò che se la derivata di una qualche funzione fosse integrabile allora per questa derivata valeva il teorema fondamentale del calcolo. Quindi Volterra rovescia la prospettiva di Cauchy: anziché partire dalla continuità di f per dedurre l'esistenza di una primitiva mediante la funzione integrale, ipotizza a priori l'esistenza di una primitiva G, supponendo per f soltanto la limitatezza.

Proposizione 2. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se esiste una funzione $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a, b]$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:*

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t \leq G(b) - G(a) \leq \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

dove $\underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t$ e $\overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t$ indicano rispettivamente l'integrale inferiore e l'integrale superiore di Riemann.

Dimostrazione. Sia $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una generica suddivisione dell'intervallo $[a, b]$. Poiché f è limitata, per ciascun sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ (con $i = 1, \ldots, n$) sono ben definiti l'estremo inferiore e l'estremo superiore:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

A partire da questi valori, si definiscono la somma inferiore $s(f, D)$ e la somma superiore $S(f, D)$ relative alla suddivisione D:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Poiché la funzione G è derivabile sull'intervallo $[a, b]$, essa è continua su ogni sottointervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$ e derivabile nei punti interni $]x_{i-1}, x_i[$. Applicando il teorema del valor medio di Lagrange a G in ciascun $[x_{i-1}, x_i]$, garantiamo l'esistenza di almeno un punto $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tale che:

$$G'(\xi_i) = \frac{G(x_i) - G(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

da cui si ricava:

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Poiché per definizione $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, moltiplicando per l'ampiezza positiva $(x_i - x_{i-1})$ si ottiene:

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq G(x_i) - G(x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1})$$

Sommando su tutti gli indici $i = 1, \ldots, n$, la somma centrale dà luogo a una catena telescopica:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(G(x_i) - G(x_{i-1})\big) = G(b) - G(a)$$

da cui segue la disuguaglianza per la suddivisione D:

$$s(f, D) \leq G(b) - G(a) \leq S(f, D)$$

Trattandosi di una relazione valida per una qualsiasi suddivisione D, passando all'estremo superiore sulle somme inferiori e all'estremo inferiore sulle somme superiori nell'insieme di tutte le suddivisioni $\mathcal{D}$, si conclude che:

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{D \in \mathcal{D}} s(f, D) \leq G(b) - G(a) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} S(f, D) = \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

È opportuno evidenziare due aspetti concettuali di questo risultato:

1. La limitatezza dell'integranda f è richiesta poiché rappresenta una condizione necessaria per l'integrabilità alla Riemann.

2. La dimostrazione non richiede l'ipotesi che f sia continua né che sia integrabile secondo Riemann. La validità del passaggio si regge unicamente sull'applicazione del teorema di Lagrange alla primitiva G. Nel caso particolare in cui f sia integrabile, allora segue la validità del TFCI.

Corollario 1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Se la funzione* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ammette una primitiva* G *ed è inoltre integrabile secondo Riemann su* $[a,b]$*, allora*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione. Essendo f integrabile alla Riemann (e di conseguenza necessariamente limitata) non solo vale la disuguaglianza vista nella proposizione 2 ma sappiamo anche che l'integrale inferiore e superiore coincidono:

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,dt$$

ovvero vale la formula fondamentale del calcolo. □

Rispetto alla formulazione di Cauchy, il contributo di Volterra estende la validità del teorema fondamentale: la formula di valutazione sussiste per qualsiasi funzione che possieda una primitiva, a patto che sia integrabile secondo Riemann, senza che vi sia alcuna necessità di richiederne la continuità globale. Resta naturalmente aperto il problema concettuale di stabilire sotto quali condizioni una data funzione f ammetta effettivamente una primitiva.

3.3.2 Il contributo di Giuseppe Vitali

All'inizio del Novecento comparve nella scena matematica l'integrale di Lebesgue e da questo momento in poi l'integrale di Riemann sparì quasi completamente dalla scena rimanendo soltanto come uno strumento di interesse didattico. L'ultimo grande teorema della teoria dell'integrazione alla Riemann è il teorema di Vitali-Lebesgue che dà una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia integrabile alla Riemann basandosi sulla misura dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. Una dimostrazione di questo teorema fa uso di un'idea che lo stesso Vitali attribuisce a Ciro Poli e che adesso ci apprestiamo ad analizzare [21]. Il contributo citato da Vitali che compare nell'articolo *Sulla condizione della integrabilità riemanniana lungo un dato intervallo delle funzioni limitate di una variabile reale* [24], può essere interpretato come un modo alternativo di affrontare, sotto l'ipotesi di continuità, due risultati fondamentali del calcolo integrale: l'integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue e il teorema fondamentale del calcolo integrale.

La differenza rispetto all'impostazione di Cauchy riguarda soprattutto l'ordine logico con cui vengono affrontati i due problemi. Cauchy dimostra dapprima che una funzione continua è integrabile e, solo dopo aver stabilito l'esistenza dell'integrale, definisce la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

e ne studia la derivabilità, dimostrando che, nei punti in cui f è continua,

$$F'(x) = f(x).$$

L'integrabilità delle funzioni continue e il TFCI risultano dunque trattati come due risultati distinti.

L'idea di Vitali permette invece di procedere in modo più generale. Si parte dalla sola ipotesi che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia limitata, senza supporre a priori che essa sia integrabile. In questo caso l'integrale di Riemann potrebbe infatti non esistere; sono però sempre definiti l'integrale inferiore e l'integrale superiore. Per ogni $x \in [a,b]$ possiamo quindi considerare le funzioni

$$\underline{F}(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \overline{F}(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'idea fondamentale è allora la seguente: prima si studiano le proprietà delle funzioni integrali inferiore e superiore assumendo soltanto che f sia limitata; successivamente si aggiunge l'ipotesi di continuità di f. In questo modo si può dimostrare simultaneamente che f è integrabile e che la funzione integrale è una primitiva di f.

Proposizione 3. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, allora $\underline{F}(x)$ è Lipschitziana su $[a,b]$, e dunque in particolare continua.*

Dimostrazione. Supponiamo dunque che f sia limitata su $[a,b]$. Esistono allora due costanti $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \le f(t) \le M$ per ogni $t \in [a,b]$.

Siano $x_0, x_0 + h \in [a,b]$ e supponiamo inizialmente $h > 0$. Per l'additività dell'integrale inferiore,

$$\underline{F}(x_0 + h) - \underline{F}(x_0) = \underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dalla monotonia dell'integrale inferiore e dalla disuguaglianza $m \le f(t) \le M$ segue che:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} m\,\mathrm{d}t \le \underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x_0+h} M\,\mathrm{d}t.$$

Pertanto

$$m \cdot h \le \underline{F}(x_0 + h) - \underline{F}(x_0) \le M \cdot h.$$

Ponendo $K = \max\{|m|, |M|\}$, si ottiene

$$|\underline{F}(x_0 + h) - \underline{F}(x_0)| \leq K|h|.$$

La stessa stima vale anche per $h < 0$, ragionando sull'intervallo $[x_0 + h, x_0]$. Dunque

$$|\underline{F}(x) - \underline{F}(y)| \leq K|x - y| \text{ per ogni } x, y \in [a, b]$$

. Pertanto $\underline{F}$ è Lipschitziana e quindi continua su $[a, b]$. □

La stessa dimostrazione si applica all'integrale superiore e mostra che anche $\overline{F}(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ è Lipschitziana e quindi continua.

È importante osservare che, fino a questo punto, non è stata utilizzata la continuità di f: è stata sufficiente la sua limitatezza.

Proposizione 4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e continua allora $\underline{F}'(x) = f(x)$.*

Dimostrazione. Consideriamo, per semplicità, $h > 0$ e un generico punto $x_0 \in [a, b]$. Per l'additività dell'integrale inferiore,

$$\frac{\underline{F}(x_0 + h) - \underline{F}(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poiché f è continua sull'intervallo compatto $[x_0, x_0 + h]$, essa raggiunge in tale intervallo un minimo e un massimo. Poniamo

$$m = \min_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t), \qquad M = \max_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t).$$

Si ha quindi

$$m \leq f(t) \leq M.$$

Per monotonia dell'integrale inferiore,

$$m \cdot h \leq \underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M \cdot h.$$

Dividendo per $h > 0$,

$$m \leq \frac{\underline{F}(x_0 + h) - \underline{F}(x_0)}{h} \leq M.$$

Ora sfruttiamo la continuità di f in x_0. Quando $h \to 0^+$, l'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ si restringe a x_0 e, per la continuità di f,

$$m \longrightarrow f(x_0), \qquad M \longrightarrow f(x_0).$$

Segue allora che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\underline{F}(x_0+h) - \underline{F}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Lo stesso ragionamento, applicato a $h < 0$, permette di ottenere anche il limite sinistro. Pertanto

$$\underline{F}'(x_0) = f(x_0).$$

Poiché x_0 è arbitrario,

$$\underline{F}'(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Quindi la funzione integrale inferiore è una primitiva di f. □

La stessa argomentazione può essere applicata alla funzione integrale superiore ottenendo

$$\overline{F}'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in [a,b]$$

Pertanto, quando f è continua, sia la funzione integrale inferiore sia la funzione integrale superiore sono primitive di f.

A questo punto si può concludere il passaggio fondamentale.

Abbiamo infatti che sia $\underline{F}(x)$ sia $\overline{F}(x)$ sono primitive di $f(x)$ dunque devono differire per una costante C. Ovvero:

$$\underline{F}(x) = \overline{F}(x) + C.$$

Ma sapendo che per $x = a$, entrambe le funzioni valgono zero per definizione, ne segue

$$\underline{F}(x) = \overline{F}(x) \qquad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

In particolare, per $x = b$,

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Per definizione, ciò significa che f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$.

Possiamo quindi finalmente porre

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

Abbiamo dunque dimostrato contemporaneamente:

1. che ogni funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann;
2. che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una primitiva di f.

Confronto con l'impostazione di Cauchy

La differenza rispetto alla trattazione classica di Cauchy risiede nella struttura logica della dimostrazione. Cauchy, infatti, procede in due stadi separati e sequenziali: in primo luogo stabilisce che la continuità di f ne garantisce l'integrabilità (f continua $\implies$ f integrabile), e solo in un secondo momento definisce la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ per dimostrare che $F'(x) = f(x)$.

L'impostazione basata sulle funzioni integrali inferiore e superiore rovescia e unifica questo percorso. Si parte dall'ipotesi generale in cui f è unicamente limitata, risultato da cui discende la continuità delle due funzioni integrali $\underline{F}(x)$ e $\overline{F}(x)$. Aggiungendo l'ipotesi di continuità per f, si dimostra che le derivate di entrambe le funzioni coincidono con f ($\underline{F}'(x) = \overline{F}'(x) = f(x)$). Tale coincidenza implica l'uguaglianza $\underline{F}(x) = \overline{F}(x)$, garantendo automaticamente l'integrabilità di f secondo Riemann.

In questo quadro, l'integrabilità delle funzioni continue e il teorema fondamentale del calcolo non costituiscono più due teoremi separati, ma vengono ricavati contestualmente come parti di un'unica architettura dimostrativa.

3.4 Ralph Henstock

Cenni biografici Ralph Henstock nacque il 2 giugno 1923 nel villaggio minerario di Newstead (Nottinghamshire) e fu uno dei più autorevoli teorici dell'integrazione del XX secolo [14]. Figlio unico di un minatore e discendente da immigrati fiamminghi del XVII secolo, mostrò un precoce talento matematico che gli consentì di vincere una borsa di studio per il St. John's College di Cambridge. Dopo un'interruzione dovuta al servizio civile bellico presso il Ministero delle Forniture, completò la propria formazione al Birkbeck College di Londra sotto la guida di Paul Dienes, che lo indirizzò in modo decisivo verso lo studio dell'integrazione. Nel 1948 conseguì il dottorato di ricerca con una tesi sulle funzioni d'intervallo, valutata da J.C. Burkill e H. Kestelman.

A partire dalla fine degli anni '50, Henstock formulò la sua innovazione teorica più celebre: l'integrale *gauge* (o di Riemann generalizzato), sviluppato in modo indipendente dal matematico ceco Jaroslav Kurzweil e oggi noto universalmente come integrale di Henstock-Kurzweil. Sulla retta reale, tale operatore unifica e semplifica la teoria classica: pur mantenendo la semplicità strutturale delle somme di Riemann, esso ricomprende l'integrale di Lebesgue, risulta equivalente all'integrale di Denjoy-Perron e consente di gestire agevolmente la convergenza non assoluta. Negli anni successivi Henstock estese sistematicamente la teoria attraverso la nozione di "spazi di divisione" (*division spaces*), fornendo un quadro unificato che trovò feconde applicazioni nelle equazioni differenziali, nell'analisi armonica, nella teoria della probabilità e nella meccanica quantistica con l'integrale di Feynman.

La sua carriera accademica lo vide docente in diversi atenei britannici — tra cui il Birkbeck College, le università di Belfast, Bristol e Lancaster — fino all'assegnazione della cattedra di Matematica Pura presso la New University of Ulster (1970–1988) e al successivo titolo di Leverhulme Fellow. Nomina a Fellow della Royal Statistical Society



Figura 3.3: Ralph Henstock (1923-2007)

nel 1958 e vincitore dell'Andy Prize nel 1994, fu autore di 42 articoli scientifici, 171 recensioni per MathSciNet e quattro fondamentali monografie. Nel 1949 sposò Marjorie Jardine, con la quale ebbe il figlio John. Henstock si spense il 17 gennaio 2007.

3.4.1 La definizione di integrale secondo Henstock

Il punto di partenza dell'integrale alla Henstock è di partire dalla definizione di integrale alla Riemann cercando di eliminare ciò che rende necessario la limitatezza delle funzioni.

Definizione 4 (Partizione)**.** *Dato un intervallo $[a,b]$, chiameremo partizione di $[a,b]$ ogni insieme finito di intervalli $\{[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]\}$ tali che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Definizione 5 (Partizione Etichettata)**.** *Una **partizione etichettata** di $[a,b]$ è una famiglia di coppie*

$$\dot{P} = \{(I_j, \xi_j)\}_{j=1,\dots,n}$$

dove $\{I_j\}_{j=1}^n$ è una partizione di $[a,b]$ e $\xi_j \in I_j$ per ogni $j = 1,\dots,n$. Il punto ξ_j è detto etichetta *(o punto di valutazione) dell'intervallo I_j.*

Definizione 6 (Gauge)**.** *Si definisce **gauge** su $[a,b]$ una qualsiasi funzione φ strettamente positiva:*

$$\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+ \quad \textit{tale che} \quad \varphi(x) > 0 \ \ \forall x \in [a,b]$$

Definizione 7 (Partizione etichettata subordinata a una gauge)**.** *Una* ***partizione etichettata*** $\dot{P} = \{(I_j, \xi_j)\}_{j=1,\dots,n}$ *di* $[a, b]$ *si dice* ***subordinata alla gauge*** φ *se per ogni* $j = 1, \dots, n$ *si ha:*

$$|I_j| = x_j - x_{j-1} \leq \varphi(\xi_j)$$

A questo punto, avendo formalizzato la struttura delle partizioni etichettate subordinate a una *gauge*, disponiamo di tutti gli strumenti necessari per definire rigorosamente l'integrale di Henstock.

Definizione 8 (Integrale alla Henstock)**.** *Una funzione* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice* ***integrabile alla Henstock*** *su* $[a, b]$ *e il suo integrale vale* $I \in \mathbb{R}$*, se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una gauge* $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *tale che, per ogni partizione etichettata* $\dot{P} = \{(I_j, \xi_j)\}_{j=1,\dots,n}$ *di* $[a, b]$ *subordinata a* φ*, si ha:*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - I \right| \leq \varepsilon$$

Ora sorgono spontanee alcune questioni fondamentali circa la ben-postezza della definizione appena fornita:

1. L'integrale di Henstock è unico?
2. Gode delle consuete proprietà di linearità, additività rispetto all'intervallo e monotonia?
3. **Data una generica *gauge* $\varphi(x) > 0$, existe sempre almeno una partizione etichettata ad essa subordinata?**

Relativamente ai primi due quesiti la risposta è affermativa; tuttavia, trattandosi di verifiche standard che seguono argomentazioni algebriche tradizionali, non ci soffermeremo sui dettagli tecnici delle dimostrazioni che si possono trovare ad esempio in [2] e che esulano in parte dai fini primari di questo lavoro.

Il terzo quesito, al contrario, riveste un ruolo imprescindibile. Qualora infatti la risposta alla domanda (3) fosse negativa, l'intera definizione di integrale di Henstock risulterebbe priva di sostanza (ovvero banalmente verificata per vacuità, non esistendo alcuna partizione su cui testare la condizione). La garanzia che l'insieme delle partizioni φ-subordinate sia sempre non vuoto costituisce il pilastro dell'intera teoria ed è assicurata dal fondamentale risultato seguente.

Teorema 4 (Teorema di Cousin)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato e sia* $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *una qualsiasi gauge. Allora esiste sempre almeno una partizione etichettata* $\dot{P}$ *di* $[a, b]$ *subordinata a* φ*.*

Dimostrazione (per assurdo). Supponiamo per assurdo che esista una gauge φ su $[a, b]$ che non ammetta alcuna partizione etichettata subordinata ad essa.

Consideriamo il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$. Dividiamo $[a, b]$ nei due sottointervalli $[a, c]$ e $[c, b]$. Se entrambi gli intervalli ammettessero una partizione subordinata a φ, unendo le due partizioni otterremmo una partizione di $[a, b]$ subordinata a φ (assurdo).

Di conseguenza, almeno uno dei due sottointervalli non ammette partizioni subordinate a φ. Chiamiamo $I_1 = [a, b]$ e indichiamo con $I_2 = [a_2, b_2]$ la metà che non ammette partizioni subordinate.

Iterando questo procedimento, dividiamo I_2 a metà e definiamo $I_3 = [a_3, b_3]$ come il sottointervallo privo di partizioni subordinate. Iterando il ragionamento, costruiamo una successione di intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$ tale che:

1. $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \ldots$
2. $|I_n| = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$, l'intersezione di tutti gli I_n contiene un unico punto $\bar{x} \in [a, b]$ tale che:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{\bar{x}\}$$

Poiché φ è una gauge, nel punto $\bar{x}$ si ha $\varphi(\bar{x}) = r > 0$.

Consideriamo l'intorno di $\bar{x}$: $(\bar{x} - \frac{r}{2}, \bar{x} + \frac{r}{2})$. Poiché la lunghezza degli intervalli tende a zero, cioè $\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$, si ha che:

$$\exists \bar{n} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq \bar{n} \quad |I_n| \leq \frac{r}{2}$$

e poiché $\bar{x} \in I_n$, ne consegue che:

$$I_n \subseteq \left[\bar{x} - \frac{r}{2},\ \bar{x} + \frac{r}{2}\right]$$

Ciò significa che per questo intervallo I_n vale $|I_n| \leq \frac{r}{2} = \frac{1}{2}\varphi(\bar{x}) < \varphi(\bar{x})$, con $\bar{x} \in I_n$.

Ma allora possiamo considerare la partizione $\dot{P} = \{(I_n, \bar{x})\}$ formata dal solo intervallo I_n avente come etichetta $\bar{x}$. Tale partizione è chiaramente subordinata alla gauge φ, poiché:

$$|I_n| \leq \varphi(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \bar{x} \in I_n$$

Questo contraddice l'ipotesi di costruzione di I_n (ovvero che I_n non ammettesse alcuna partizione subordinata a φ). L'assurdo prova il teorema. □

3.4.2 Proprietà fondamentali

Per comprendere l'efficacia e la portata dell'integrale di Henstock, è fondamentale stabilire prima di tutto la sua relazione con le teorie dell'integrazione preesistenti. Il primo risultato fondamentale mostra come questa formulazione costituisca una diretta estensione dell'integrale di Riemann, riproducendone esattamente i valori su tutte le funzioni integrabili nel senso classico.

Proposizione 5. *Se una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora è integrabile anche secondo Henstock e i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ con valore dell'integrale pari a I. Per definizione di integrabilità secondo Riemann, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che, per ogni suddivisione D dell'intervallo $[a,b]$ con ampiezza $\|D\| \leq \delta$, risulta:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon$$

per qualsiasi scelta ammissibile delle etichette $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Per verificare l'integrabilità secondo Henstock, è sufficiente mostrare l'esistenza di una gauge opportuna. Scegliendo la gauge costante $\varphi(x) \equiv \delta$ per ogni $x \in [a,b]$, ogni partizione etichettata $\dot{P}$ subordinata a φ soddisfa automaticamente il vincolo di ampiezza $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta$. Ne consegue che la disuguaglianza precedente vale per qualsiasi partizione φ-subordinata, provando che f è integrabile secondo Henstock con medesimo valore dell'integrale I. □

La reale potenza della teoria di Henstock-Kurzweil risiede tuttavia nella sua capacità di superare i limiti rigidi della teoria classica, consentendo l'integrazione di funzioni fortemente discontinue. L'esempio paradigmatico è rappresentato dalla funzione di Dirichlet, notoriamente non integrabile secondo Riemann a causa della sua discontinuità in ogni punto del dominio, ma perfettamente gestibile mediante l'uso di gauge non costanti.

Proposizione 6. *La funzione di Dirichlet $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

è integrabile secondo Henstock su $[0,1]$ e il suo integrale vale $I = 0$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $I = 0$. Consideriamo le somme di Henstock della forma $\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$.

- Se l'etichetta $\xi_j \notin \mathbb{Q}$, allora $f(\xi_j) = 0$, per cui $f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = 0$; il contributo del corrispondente sottointervallo alla somma complessiva è quindi nullo.
- Gli unici addendi non nulli sono quelli per cui $\xi_j \in \mathbb{Q}$, nel qual caso si ha $f(\xi_j) = 1$.

Poiché l'insieme dei numeri razionali in $[0,1]$ è numerabile, ordiniamone gli elementi in una successione:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots\}$$

Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, definiamo la gauge $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ nel modo seguente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{\varepsilon}{2^n} & \text{se } x = p_n \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sia ora $\dot{P} = \{(I_j, \xi_j)\}_{j=1}^m$ una qualsiasi partizione etichettata di $[0,1]$ subordinata alla gauge φ. Valutiamo la corrispondente somma di Henstock:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in \mathbb{Q}}}^{m} 1 \cdot |I_j|$$

Poiché la partizione è subordinata a φ, se un'etichetta è il numero razionale $\xi_j = p_n$, l'ampiezza dell'intervallo $|I_j|$ non può superare $\varphi(p_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Poiché un punto p_n può comparire come etichetta al più in due intervalli adiacenti (e la somma delle relative ampiezze rimane comunque limitata da $\frac{\varepsilon}{2^n}$), sommando su tutte le etichette razionali della partizione si ottiene:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in \mathbb{Q}}}^{m} 1 \cdot |I_j| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Ne consegue direttamente che:

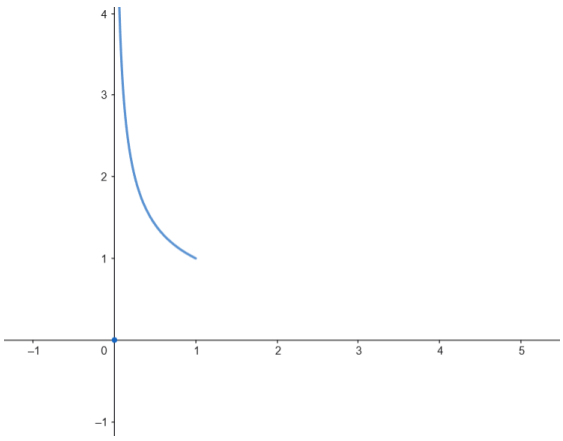
$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, la funzione di Dirichlet risulta integrabile secondo Henstock con valore dell'integrale $I = 0$. □

Per capire meglio perché nell'integrazione alla Henstock il teorema fondamentale abbia una validità così generale, è utile analizzare la causa profonda che nell'impostazione classica di Riemann obbliga la funzione integranda ad essere limitata.

Consideriamo a titolo esemplificativo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0,1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Tale funzione presenta un asintoto verticale per $x \to 0^+$. Se f fosse integrabile secondo Riemann e avesse integrale che vale I, fissata una suddivisione D con ampiezza $\|D\| \leq \delta$ arbitrariamente piccola, per qualsiasi scelta delle etichette ξ_i dovrebbe valere:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon$$

ovvero:

$$I - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq I + \varepsilon$$

La seconda rappresenta il passaggio critico della dimostrazione. Fissata infatti la suddivisione D, nel primo intervallo $[0, x_1]$ il primo addendo assume la forma $f(\xi_1)(x_1 - 0)$. Poiché l'etichetta ξ_1 può essere scelta arbitrariamente vicina a 0^+, è possibile far tendere $f(\xi_1) \to +\infty$, rendendo la somma arbitrariamente grande e facendo di conseguenza fallire la disuguaglianza. Ne segue che f non è integrabile secondo Riemann.

Passando all'integrazione secondo Henstock, osserviamo che $f(x)$ è integrabile in senso improprio (o generalizzato) secondo Riemann, e il suo integrale vale:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 = 2$$

Adesso mostriamo che per questa funzione il valore dell'integrale improprio secondo Riemann coincide anche con il valore dell'integrale alla Henstock (questo in realtà vale per tutte le funzioni integrabili in senso improprio alla Riemann).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi(x) > 0 \quad \text{tale che per ogni } \dot{P} \text{ subordinata a } \varphi(x) \text{ si ha } \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - 2 \right| \leq \varepsilon$$

L'analisi dell'esistenza e della scelta della *gauge* procede come segue:

1. Dalla definizione è garantita l'esistenza di almeno una *gauge* $\varphi(x)$ ammissibile.

2. Consideriamo ora la funzione ausiliaria:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

In una generica partizione subordinata a ψ, il primo intervallo $[0, x_1]$ deve necessariamente ammettere 0 come etichetta. A titolo illustrativo, si consideri ad esempio $[0, x_1] = \left[0, \frac{1}{3}\right]$:

- $\left|\left[0, \frac{1}{3}\right]\right| = \frac{1}{3}$;
- Se l'etichetta è $\xi_1 = 0$, si ha $\psi(0) = 1$ e $\frac{1}{3} \leq 1$ (soddisfatta);
- Se l'etichetta fosse $\xi_1 = \frac{1}{3}$, si avrebbe $\psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$, ma $\frac{1}{3} \not\leq \frac{1}{6}$. Allo stesso modo si verifica che $\frac{1}{3} \not\leq \psi(x)$ per ogni $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$.

Si consideri quindi la nuova *gauge* definita da $\delta(x) = \min\{\psi(x), \varphi(x)\}$:

- $\delta(x)$ è una *gauge* ben definita;
- Poiché $\delta(x) \leq \psi(x)$, essa impone vincolatamente l'uso dello zero come etichetta del primo intervallo;
- Poiché $\delta(x) \leq \varphi(x)$, essa garantisce la validità della stima dell'integrale di Henstock.

La somma di Riemann-Henstock assume dunque la seguente forma:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - 2 \right| \leq \varepsilon$$

nella quale il contributo relativo al primo addendo si annulla identicamente:

$$f(0) \cdot (x_1 - 0) = 0 \cdot x_1 = 0$$

In questo modo, l'effetto della singolarità puntuale viene neutralizzato in maniera automatica direttamente dalla struttura formale della definizione.

Sintetizzando, l'ostacolo che nella teoria di Riemann impone la limitatezza dell'integranda risiede nell'**arbitrarietà della scelta delle etichette** ξ_i. Nell'integrazione di Riemann, la costruzione segue due fasi nettamente distinte:

1. Si fissa la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ nei sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$;
2. Si scelgono arbitrariamente le etichette $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in cui valutare la funzione.

Idea chiave di Henstock: Nelle somme integrali che servono per definire l'integrale alla Henstock, le ampiezze degli intervalli che contengono i punti ξ_i in cui la funzione è valutata dipendono da questi punti e in particolare sono legate al comportamento locale della funzione. Se la funzione varia o assume valori molto grandi in un punto ξ_i, l'intervallo contenente ξ_i è costretto ad essere molto piccolo per tenere sotto controllo il corrispondente termine della somma integrale.

3.4.3 Forma universale del teorema fondamentale del calcolo integrale

Per dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale per l'Integrale di Henstock senza assumere la continuità o la limitatezza della derivata, occorre un lemma di analisi reale noto come Saddle Lemma.

Lemma 1 (Straddle Lemma)**.** *Sia $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e sia $F' = f$. Allora $\forall x_0 \in (a,b)$ e $\forall \varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che, per ogni coppia di numeri α, β con:*

$$x_0 - \delta \leq \alpha < x_0 < \beta \leq x_0 + \delta \quad (\textit{con } \alpha < \beta)$$

si ha:

$$\left| \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Per la dimostrazione del Straddle Lemma rimandiamo a [2].

Osservazione. *Il Saddle Lemma afferma che l'incremento medio $\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ approssima la derivata $f(x_0)$ in x_0 purché l'intervallo $[\alpha, \beta]$ contenga x_0 e sia sufficientemente piccolo. Riformulando l'equazione:*

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} - f(x_0) = \varepsilon' = \varepsilon'(x_0, \alpha, \beta) \quad \textit{con} \quad |\varepsilon'| \leq \varepsilon$$

se e solo se

$$F(\beta) - F(\alpha) = f(x_0)(\beta - \alpha) + \varepsilon'(\beta - \alpha) \quad \textit{con } |\varepsilon'| \leq \varepsilon$$

Siamo ora pronti a dimostrare il risultato centrale della teoria di Henstock.

Teorema 5 (TFCI per l'Integrale di Henstock)**.** *Se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$, allora la sua derivata $f = F'$ è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e si ha:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una gauge $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ tale che per ogni partizione etichettata $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^n$ subordinata a φ risulti:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(b) - F(a)) \right| \leq \varepsilon(b - a)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni punto $x \in [a,b]$, applicando il Saddle Lemma in $x_0 = x$, esiste un numero $\delta(x) > 0$ tale che, per qualsiasi sottointervallo $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$ contenente x con ampiezza limitata da $\delta(x)$, vale:

$$F(\beta) - F(\alpha) = f(x)(\beta - \alpha) + \varepsilon'_x(\beta - \alpha) \quad \text{con } |\varepsilon'_x| \leq \varepsilon$$

Definiamo la gauge $\varphi(x) = \delta(x)$.

Per il teorema di Cousin, esiste una partizione etichettata $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^n$ subordinata a δ. Per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, l'etichetta ξ_i soddisfa $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e $x_i - x_{i-1} \leq \delta(\xi_i)$. Ponendo $\alpha = x_{i-1}$ e $\beta = x_i$, possiamo applicare la relazione del Saddle Lemma nel punto $x = \xi_i$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon_i'(x_i - x_{i-1}) \quad \text{con } |\varepsilon_i'| \leq \varepsilon$$

Riscriviamo il valore del termine $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$:

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1}) - \varepsilon_i'(x_i - x_{i-1})$$

Sommando su tutti gli $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i'(x_i - x_{i-1}) \\ &= (F(b) - F(a)) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i'(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

Valutiamo la differenza in valore assoluto:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(b) - F(a))\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i'(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i'|(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)\end{aligned}$$

Poiché $(b - a)$ è costante e ε può essere scelto arbitrariamente piccolo, l'integrabilità di f e la formula fondamentale del calcolo risultano completamente dimostrate. □

L'integrale di Henstock-Kurzweil rappresenta il punto d'arrivo naturale di questo lungo percorso di evoluzione storica del teorema fondamentale del calcolo integrale. L'integrale permette infatti di superare ogni ipotesi accessoria di continuità o limitatezza della funzione integranda all'interno del teorema, la cui formulazione restituisce la sua "forma universale" ed essenziale: *ogni funzione derivabile in ogni punto di un intervallo possiede una derivata integrabile, e il valore dell'integrale coincide esattamente con la variazione totale della funzione originale sull'intervallo.*

Capitolo 4

Dal significato storico al problema didattico: una proposta per l'insegnamento del teorema fondamentale del calcolo integrale

4.1 L'analisi della manualistica scolastica: il caso di *5 Matematica.blu 2.0*

Per comprendere in che modo il teorema fondamentale del calcolo integrale venga trasposto nella pratica didattica della scuola secondaria di secondo grado, è utile analizzare preliminarmente la sua presentazione all'interno di qualche manuale scolastico. A questo scopo abbiamo preso in esame il testo *5 Matematica.blu 2.0* (seconda edizione) di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone, edito da Zanichelli. Questo perché attualmente è uno dei testi più diffusi nella scuola superiore. La nostra analisi non intende valutare la correttezza matematica della trattazione, che risulta rigorosa e ben strutturata, bensì ricostruirne la struttura concettuale ed espositiva, individuando quali relazioni tra integrale, area, derivata e primitiva vengano rese esplicite e quale ruolo venga successivamente attribuito al teorema fondamentale.

All'interno del quinto volume, il percorso relativo al calcolo integrale si sviluppa in continuità con la trattazione degli integrali indefiniti. Il capitolo 29, intitolato proprio «Integrali indefiniti», introduce il concetto di primitiva e presenta l'integrazione come operazione inversa della derivazione, fornendo i principali algoritmi per la determinazione delle primitive. Il capitolo 30, «Integrali definiti», introduce invece una costruzione autonoma dell'integrale definito, muovendo dal problema geometrico della determinazione delle aree e giungendo progressivamente alla definizione mediante somme integrali e passaggio al limite. Il teorema fondamentale compare successivamente, nel secondo paragrafo del capitolo 30, come risultato destinato a stabilire il legame tra integrale definito e indefinito attraverso la funzione integrale.

La sequenza adottata dal manuale può essere schematizzata nel modo seguente:

1. Problema delle aree: accenno storico al metodo di esaustione;
2. Approssimazione mediante somme: definizioni di somme integrali inferiore e superiore;
3. Integrale definito: definizione formale come limite delle somme integrali;
4. Proprietà dell'integrale definito: additività, linearità, confronto;
5. Teorema della media integrale;
6. Funzione integrale: definizione formale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$;
7. Teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema di Torricelli-Barrow);
8. Formula di valutazione: $\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$.

La prima parte della trattazione dell'integrale definito fa uso di un'approssimazione geometrica e il problema consiste nel determinare l'area di una regione delimitata dal grafico di una funzione continua f non negativa e dall'asse delle ascisse. L'intervallo d'integrazione viene suddiviso in sottointervalli, si introducono le somme integrali inferiori e superiori e si osserva che, all'infittire della suddivisione, esse convergono allo stesso limite: l'integrale definito.

Dopo aver presentato le proprietà dell'integrale, il manuale introduce il teorema della media integrale: se f è continua in $[a, b]$, esiste un punto $z \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(z). \tag{4.1}$$

Tale risultato svolge una funzione propedeutica essenziale nella dimostrazione del teorema fondamentale. Viene quindi definita la funzione integrale ponendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{4.2}$$

con x variabile nell'intervallo d'integrazione. In questo modo il manuale costruisce esplicitamente una funzione il cui valore rappresenta, nel caso di f non negativa, l'area accumulata a partire dall'estremo a. Su questa costruzione viene formulato il teorema fondamentale del calcolo integrale:

Teorema 6 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile in tutto $[a, b]$ e la sua derivata coincide con la funzione integranda $f(x)$:*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

In altri termini, la funzione integrale $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che esiste la derivata di $F(x)$ e calcoliamo tale derivata applicando la definizione di rapporto incrementale. Incrementiamo la variabile x di un valore $h \neq 0$ tale che $a \leq x + h \leq b$ e calcoliamo la differenza $F(x + h) - F(x)$:

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt.$$

Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione:

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Per il teorema della media integrale, l'integrale a secondo membro è uguale al prodotto dell'ampiezza h dell'intervallo per il valore $f(z)$, con z opportuno punto compreso tra x e $x + h$:

$$F(x + h) - F(x) = h \cdot f(z).$$

Dividendo ambo i membri per $h \neq 0$, otteniamo il rapporto incrementale della funzione integrale:

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(z).$$

Analizziamo il comportamento per $h \to 0$. Poiché z è compreso tra x e $x + h$, per $h \to 0$ il punto z tende a x. Essendo la funzione f continua per ipotesi nell'intervallo, si ha che $\lim_{h\to 0} f(z) = f(x)$. Di conseguenza, esiste anche il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ ed è pari a $f(x)$:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) = f(x).$$

La funzione $F(x)$ è dunque derivabile e la sua derivata coincide con il valore assunto dalla funzione integranda nell'estremo superiore di integrazione x:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x).$$

□

La trattazione si conclude infine con il passaggio alla formula di valutazione: se $\varphi(x)$ è una generica primitiva di $f(x)$, il TFCI permette di stabilire che $\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$. È proprio in questo passaggio che la funzione integrale, inizialmente introdotta come funzione di accumulazione dell'area, viene ricondotta alla pratica operativa del calcolo mediante primitive.

4.1.1 Analisi dell'approccio presentato nel libro di testo

L'analisi della trattazione proposta in *5 Matematica.blu 2.0* permette di mettere in luce alcuni aspetti didattici relativi all'insegnamento del calcolo integrale.

La sequenza dei contenuti: Un primo elemento critico riguarda la collocazione del capitolo sugli integrali indefiniti prima di quello sugli integrali definiti. Poiché lo studente ha già affrontato l'integrazione come operazione inversa della derivazione, egli possiede già uno schema interpretativo consolidato che associa l'integrale alla ricerca delle primitive. Quando nel capitolo successivo l'integrale definito viene costruito in modo autonomo come limite di somme, l'oggetto appare del tutto indipendente. Tuttavia, nel momento in cui il TFCI dimostra la relazione $F'(x) = f(x)$, esiste il forte rischio che lo studente interpreti questo fondamentale risultato non come la scoperta di una connessione profonda tra accumulazione e variazione, ma come una banale conferma di quanto già sapeva ("l'integrazione è l'inversa della derivata"). La scelta del libro di testo di anteporre il capitolo sull'integrazione indefinita è probabilmente legato al fatto che gli integrali indefiniti sono quelli su cui gli studenti faranno esercizi. Quindi questa organizzazione dei contenuti consente agli insegnanti di anticipare esercizi d'integrazione indefinita mentre eventualmente si procede alla sistemazione teorica dell'integrale definito.

Valorizzazione della matematica procedurale: La sequenza del manuale evidenzia una rapida transizione dalla costruzione geometrica dell'integrale definito alla formula di valutazione. Questa, dal punto di vista operativo, è la conseguenza immediatamente spendibile dagli studenti. Non appena acquisita tale formula, la definizione dell'integrale come limite di somme perde centralità nella pratica degli esercizi.

Il compito dello studente si riduce così alla ricerca algebrica di una primitiva, valutandone la differenza agli estremi. In questo modo, all'interno dell'economia complessiva del testo, viene accordato un peso nettamente prevalente alla matematica procedurale rispetto a quella concettuale. Lo studente impara ad applicare correttamente la procedura senza aver necessariamente interiorizzato il significato profondo della relazione $F'(x) = f(x)$.

Stretta corrispondenza con la dimostrazione elaborata da Cauchy: La trattazione teorica del manuale presenta una rigorosa concatenazione sequenziale. La continuità della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ rappresenta il perno dell'intera impalcatura: consente di applicare il teorema di Weierstrass per l'esistenza delle somme integrali per ottenere una forma più forte del teorema della media integrale e permette infine il passaggio al limite $f(z) \to f(x)$ nella dimostrazione del TFCI.

Risulta particolarmente significativo osservare come questo impianto presenti una stretta corrispondenza con la dimostrazione di Augustin-Louis Cauchy nel suo *Résumé des leçons* del 1823. La trattazione scolastica contemporanea conserva così una struttura che affonda le proprie radici nella rigorizzazione ottocentesca dell'analisi infinitesimale, ereditandone l'impostazione logica ma anche l'elevato grado di astrazione. Tuttavia, in quasi tutti i libri di testo il legame che c'è tra il teorema della media integrale e il teorema del valor medio di Lagrange non viene messo in luce.

La prospettiva geometrico: Un ulteriore elemento caratterizzante risiede nell'adozione di una prospettiva prevalentemente geometrica. L'integrale definito viene introdotto

e motivato quasi esclusivamente come strumento per la misurazione delle aree di figure piane fisse (trapezoidi). Sebbene la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ formalizzi l'idea di un'area variabile, i supporti grafici del manuale rimangono prevalentemente legati a regioni statiche del piano. Tale approccio attenua la percezione della natura dinamica dell'integrazione, ovvero la comprensione dell'integrale come processo di accumulazione continua di una grandezza variabile.

4.2 Quadro teorico di riferimento

L'analisi svolta evidenzia la necessità di individuare un quadro teorico di riferimento per progettare un percorso didattico alternativo. La proposta sviluppata in questo lavoro si basa su tre prospettive complementari: il *Principio di Necessità* di Guershon Harel [10], le *images of rate* e la covariazione di Patrick W. Thompson [23], e i lavori di David M. Bressoud [4, 5].

4.2.1 Il Principio di Necessità di Harel

Il primo riferimento teorico è costituito dal *Principio di Necessità* formulato da Guershon Harel (1998). L'idea fondamentale è che l'apprendimento di un concetto matematico risulti efficace e duraturo solo quando risponde a un effettivo bisogno intellettuale (*intellectual need*) maturato dallo studente. Nel contesto scolastico della secondaria, il bisogno più solido è rappresentato dal *Need for Computation*, inteso come la necessità di calcolare o determinare le proprietà di oggetti e contesti reali o problematici per l'allievo.

Una presentazione tradizionale cala dall'alto la definizione formale della funzione integrale $F(x)$ e ne dimostra successivamente la derivabilità. Dal punto di vista cognitivo, tuttavia, questo approccio lascia irrisolta una domanda essenziale: *perché dovrebbe essere interessante studiare il tasso di variazione di un'area o di una quantità accumulata?* Applicare il Principio di Necessità significa ribaltare la prospettiva: porre gli studenti di fronte a un problema che non possa essere affrontato con gli strumenti algebrici elementari. La necessità di risolvere tale problema motiva la costruzione intuitiva dell'approssimazione mediante somme, rendendo il simbolo dell'integrale e l'enunciato del teorema fondamentale la risposta naturale a una questione aperta.

4.2.2 Thompson: immagini di tasso, covariazione e accumulazione

Il secondo pilastro teorico risiede nei lavori di Patrick W. Thompson (1994) sulle concezioni di tasso di variazione e accumulazione. Thompson dimostra che le difficoltà degli studenti nel comprendere il teorema fondamentale non derivano solo dalla complessità della formalizzazione, ma da immagini mentali impoverite o statiche dei concetti di *rate of change* e di accumulazione (*accrual*).

Per Thompson, un'immagine (*image*) non è una semplice figura visiva, ma un sistema dinamico di operazioni mentali che consente all'allievo di interpretare una situazione e di anticiparne l'evoluzione. Una comprensione operativa del TFCI richiede lo sviluppo di

un'immagine matura della *covariazione*, in cui l'accumulazione e l'incremento istantaneo non sono visti come entità separate, ma come aspetti coordinati dello stesso fenomeno.

Il nucleo concettualizzato da Thompson riconfigura il TFCI non come un'uguaglianza algebrica tra operatori simbolici ($\int$ e $\frac{d}{dx}$), ma come la coordinazione tra due processi dinamici:

1. L'accumulazione di una quantità ottenuta attraverso la somma di piccoli contributi coordinati ($v(t) \cdot \Delta t$);
2. Il tasso di variazione con cui tale quantità complessiva cambia al variare dell'estremo di integrazione.

Superando la visione statica dell'area geometrica fissa, Thompson propone di fare esperienza dell'accumulazione in contesti dinamici (cinematica, flussi di fluidi) prima di procedere alla formalizzazione analitica del limite.

4.2.3 Bressoud e la prospettiva storico-epistemologica

Il terzo riferimento teorico è rappresentato dai lavori di David M. Bressoud: *How should we introduce integration?* (1992) [4] e *Historical reflections on teaching the fundamental theorem of calculus* (2011) [5]. L'autore mostra come l'analisi dello sviluppo storico del calcolo infinitesimale offra preziosi spunti per comprendere e superare le difficoltà didattiche degli studenti. Bressoud sottolinea la natura sfaccettata e plurale dell'integrazione, evidenziando che essa ammette diverse accezioni fondamentali:

- **Come operazione inversa della derivazione (antiderivata):** la prospettiva newtoniana e settecentesca (Bernoulli, Euler, Lagrange), in cui l'integrale permette di risalire dalla conoscenza del tasso di variazione alla quantità complessiva accumulata;
- **Come misurazione geometrica:** il calcolo delle aree, dei volumi e delle lunghezze di curve, radicato nel metodo di esaustione di Archimede;
- **Come limite di somme discrete:** la formalizzazione rigorosa introdotta da Cauchy (1823) e affinata da Riemann (1854).

Bressoud rileva criticamente come molti manuali tradizionali, anche quelli universitari, introducano l'integrale definito direttamente attraverso la definizione di Riemann, imponendo agli studenti un'impalcatura formale astratta (notazione di sommatoria, formule per le somme di potenze) totalmente disconnessa dal percorso precedente. Questa impostazione ripropone la matematica più recente e concettualmente più complessa (quella ottocentesca) a studenti che muovono i primi passi nel calcolo.

Per superare questa frattura pedagogica, Bressoud (1992) propone di seguire la lezione della storia: l'applicazione primaria dell'integrazione risiede nella risoluzione di equazioni differenziali e nella ricostruzione di una funzione a partire dalla sua derivata. L'autore individua nelle *approssimazioni numeriche* (come la regola dei trapezi o dei rettangoli applicata a passi discreti Δx) il "ponte intuitivo" naturale tra la ricerca delle antiderivate e la misura dell'area del sottografico.

4.3 La Proposta Didattica

Alla luce dei quadri teorici di riferimento e delle criticità emerse dall'analisi del manuale, la presente proposta didattica intende ribaltare la sequenza tradizionale d'insegnamento dell'integrale definito e del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Nelle trattazioni scolastiche correnti l'integrale definito viene introdotto come limite di somme di Riemann legate al problema geometrico dell'area, mentre le applicazioni fisiche (cinematica, lavoro, flusso) compaiono soltanto a posteriori, una volta dimostrato il teorema in modo formale. D'altro canto, nei testi di fisica della scuola secondaria, la cinematica viene affrontata al biennio prima che gli studenti posseggano gli strumenti dell'analisi. Di conseguenza il legame tra velocità e posizione si riduce allo studio del moto rettilineo uniforme o del moto uniformemente accelerato. In quest'ultimo caso, il ricorso all'area del trapezio o del triangolo sotteso dalla retta $v(t)$ viene spesso introdotto a posteriori, lasciando la fisica e la matematica come due ambiti concettualmente disconnessi.

La proposta qui sviluppata mira a superare questa frattura, rispondendo direttamente al *Principio di Necessità* di Harel e alla visione dinamica di Thompson. L'idea cardine consiste nel porre come problema d'innesco primario non la misura geometrica delle aree, bensì la **ricostruzione dello spostamento di un veicolo a partire dalla conoscenza della sua velocità istantanea**. L'area del sottografico non costituisce il punto di partenza astratto del percorso, ma emerge come un **sottoprodotto geometrico e computazionale** del tutto naturale.

4.3.1 Obiettivi

- Valorizzare la molteplice natura dell'integrale riconoscendolo non come mero algoritmo di calcolo, ma attraverso le sue diverse sfaccettature (cinematico-dinamica, geometrica e computazionale);
- Calcolare approssimazioni discrete e valutarne analiticamente l'errore massimo, cogliendo il passaggio al limite prima di ricorrere alla formalizzazione rigida di Riemann;
- Comprendere il teorema fondamentale come relazione dinamica tra accumulazione (spostamento) e tasso di variazione istantaneo (velocità);
- Sperimentare con GeoGebra e verificare graficamente e numericamente la validità del teorema fondamentale.

4.3.2 Target e prerequisiti

Il percorso didattico è stato sviluppato e pensato per essere rivolto agli studenti del quinto anno di Licei Scientifici.

I prerequisiti richiesti sono:

- Conoscere i concetti di posizione, velocità media e velocità istantanea;

- Saper interpretare grafici cartesiani cinematici (grafici posizione-tempo e velocità-tempo).
- Conoscere i comandi di base dell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra.

4.3.3 Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Questa proposta didattica si colloca in modo coerente all'interno delle nuove *Indicazioni Nazionali per i licei* [13]:

- **Introduzione allo studio della matematica e delle discipline scientifiche:**

  > *«Tutto ciò va collocato in una prospettiva storica e interdisciplinare, che consenta di riflettere, ad esempio, sul rapporto tra matematica e fisica nella nascita del Calcolo.»*

- **Secondo biennio - Elementi di calcolo differenziale e integrale:**

  > *«Lo studente comprende come i problemi di determinare l'area delle figure e le tangenti alle curve motivano lo studio dei processi di approssimazione e conducono ai concetti di integrale, derivata e limite. In particolare, lo studente conosce una definizione di integrale di una funzione, basata sulla nozione di area del sottografico e sull'approssimazione con funzioni costanti a tratti [...] interpreta il significato dell'integrale in diversi contesti.»*

- **Quinto anno - Elementi di analisi matematica e modelli differenziali:**

  > *«Lo studente è in grado di: enunciare il Teorema fondamentale del calcolo e utilizzarlo per calcolare l'integrale di alcune funzioni di interesse, trovando una primitiva con semplici strategie; illustrare il significato del Teorema fondamentale in situazioni e contesti di altre discipline.»*

4.3.4 Descrizione della proposta: dalla ricostruzione dello spazio percorso al teorema fondamentale del calcolo integrale

Il problema iniziale: dal tachimetro alla ricostruzione dello spazio

La proposta didattica prende avvio da una situazione problematica tratta dall'esperienza quotidiana, che permette di mettere in relazione la matematica con un problema concreto di cinematica. L'obiettivo è introdurre il teorema fondamentale non come una formula da applicare, ma come la risposta a una necessità: determinare una quantità complessiva conoscendo il tasso con cui essa varia nel tempo.

Agli studenti viene presentata la seguente situazione:

Stiamo viaggiando in automobile lungo una strada rettilinea. Il tachimetro funziona correttamente e ci permette di conoscere la velocità istantanea dell'automobile, ma il contachilometri si è rotto. Supponiamo di annotare la velocità indicata dal tachimetro ogni dieci secondi. Conoscendo questi valori e sapendo qual era la posizione iniziale dell'automobile, come possiamo stimare la posizione raggiunta dopo cinquanta secondi? E come possiamo migliorare la nostra stima?

La situazione viene costruita in modo da evitare una difficoltà non necessaria nella fase iniziale: l'automobile non parte da ferma, ma si trova già in movimento al momento della prima rilevazione. Si assume inoltre che proceda sempre nello stesso verso lungo una strada rettilinea, così che lo spazio percorso coincida con la variazione della coordinata di posizione.

Il tachimetro riporta le velocità in chilometri orari, come avviene normalmente nella realtà. Poiché le rilevazioni vengono effettuate ogni dieci secondi, per i calcoli si convertiranno le velocità in metri al secondo. Questa scelta consente di utilizzare unità di misura coerenti nei calcoli.

Per rendere il problema quantitativamente definito, si considera un'automobile la cui velocità aumenta gradualmente da 50 km/h a 90 km/h nell'intervallo di cinquanta secondi. Si assume che, nell'intervallo osservato, la velocità sia descritta dalla funzione

$$v(t) = \frac{50 + 0{,}016t^2}{3{,}6}, \qquad 0 \le t \le 50, \tag{4.3}$$

dove t è espresso in secondi e $v(t)$ in metri al secondo. La funzione è crescente nell'intervallo considerato e assume valori compatibili con una situazione di guida plausibile.

Il problema non richiede inizialmente agli studenti di conoscere la funzione che descrive esattamente la velocità. Al contrario, viene fornita loro soltanto una tabella di rilevazioni, come avverrebbe se dovessero lavorare a partire dai dati annotati durante il viaggio. La legge matematica verrà introdotta successivamente, nella fase di esplorazione con GeoGebra.

La prima attività: stimare lo spazio percorso a partire da una tabella

Agli studenti viene consegnata la Tabella 4.1, ottenuta campionando la velocità a intervalli di dieci secondi.

La prima consegna consiste nel determinare una stima dello spazio percorso durante i primi dieci secondi. Gli studenti possono utilizzare la relazione dello spazio percorso nel moto uniforme,

$$\Delta x = v\,\Delta t, \tag{4.4}$$

assumendo, in prima approssimazione, che la velocità rimanga costante e pari a quella registrata all'inizio dell'intervallo.

Tabella 4.1: Rilevazioni della velocità dell'automobile a intervalli di dieci secondi.

Tempo t (s)	Velocità (km/h)	Velocità (m/s), circa
0	50,0	13,89
10	51,6	14,33
20	56,4	15,67
30	64,4	17,89
40	75,6	21,00
50	90,0	25,00

Nel primo intervallo, per esempio, la velocità iniziale è di circa 13,89 m/s. Assumendo che essa rimanga costante per dieci secondi, si ottiene

$$\Delta x_1 \approx 13{,}89 \cdot 10 = 138{,}9\,\text{m}. \tag{4.5}$$

La stessa procedura viene ripetuta per gli intervalli successivi. In questo modo, lo spazio percorso complessivamente nell'intervallo di cinquanta secondi viene stimato sommando gli spostamenti parziali:

$$x(50) - x(0) \approx \sum_{i=0}^{4} v(t_i)\Delta t, \tag{4.6}$$

dove $t_i = 10i$ e $\Delta t = 10\,\text{s}$.
Utilizzando i valori della tabella, si ottiene

$$\begin{aligned} x(50) - x(0) \approx\ & 13{,}89 \cdot 10 + 14{,}33 \cdot 10 \\ & + 15{,}67 \cdot 10 + 17{,}89 \cdot 10 \\ & + 21 \cdot 10. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il risultato è approssimativamente

$$x(50) - x(0) \approx 827{,}8\,\text{m}. \tag{4.8}$$

Se, per semplicità, si pone $x(0) = 0$, la posizione stimata dopo cinquanta secondi è quindi circa 827,8 m.

L'insegnante invita gli studenti a riflettere sul significato del risultato: si tratta della posizione effettiva dell'automobile oppure di una stima? È possibile affermare che la velocità sia rimasta costante in ciascun intervallo? Che cosa accadrebbe se le rilevazioni fossero più frequenti?

Queste domande permettono di far emergere il limite del procedimento. I dati disponibili non descrivono ogni istante del moto: tra due rilevazioni consecutive, la velocità può variare. Di conseguenza, il calcolo effettuato non determina necessariamente la posizione esatta, ma fornisce una stima costruita sulla base di un'ipotesi semplificativa.

Dalla stima per difetto alla stima per eccesso

Poiché la velocità dell'automobile aumenta durante tutto l'intervallo considerato, utilizzare la velocità iniziale di ogni intervallo significa assumere un valore inferiore a quello che il veicolo raggiunge successivamente nello stesso intervallo. La stima ottenuta con questa procedura è dunque un' approssimazione per difetto dello spazio percorso.

Per comprendere meglio la qualità dell'approssimazione, si propone agli studenti di ripetere il calcolo utilizzando, in ogni intervallo, la velocità rilevata alla fine dell'intervallo. In questo caso si ottiene una stima per eccesso dello spazio percorso:

$$x(50) - x(0) \approx \sum_{i=1}^{5} v(t_i)\Delta t. \tag{4.9}$$

Con i dati della tabella, la stima per eccesso è

$$\begin{aligned} x(50) - x(0) \approx\ & 14{,}33 \cdot 10 + 15{,}67 \cdot 10 \\ & + 17{,}89 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 25 \cdot 10, \end{aligned} \tag{4.10}$$

da cui

$$x(50) - x(0) \approx 938{,}9\,\text{m}. \tag{4.11}$$

Le due procedure forniscono pertanto una stima per difetto di circa 827,8 m e una stima per eccesso di circa 938,9 m. Lo spazio effettivamente percorso, assumendo che la velocità sia crescente e che la tabella riporti i valori della funzione agli estremi degli intervalli, è compreso tra queste due stime.

La differenza tra i due risultati è

$$938{,}9 - 827{,}8 \approx 111{,}1\,\text{m}. \tag{4.12}$$

Questa differenza rappresenta l'ampiezza dell'intervallo entro cui si trova il valore effettivo, sulla base delle due stime costruite. Non coincide con l'errore effettivo della stima per difetto, ma fornisce un'indicazione della sua precisione.

L'insegnante può a questo punto chiedere: *come possiamo restringere l'intervallo tra la stima per difetto e quella per eccesso?* La risposta attesa è che occorre effettuare rilevazioni più frequenti, riducendo la durata di ciascun intervallo.

L'idea di fondo è che, se la velocità viene osservata in un numero crescente di istanti, la variazione che essa subisce tra due rilevazioni consecutive tende a diventare più piccola. Di conseguenza, le stime per difetto e per eccesso tendono ad avvicinarsi.

Per una funzione di velocità crescente e per intervalli tutti della stessa ampiezza Δt, la differenza tra le somme superiore e inferiore è

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t - \sum_{i=1}^{N} v(t_{i-1})\Delta t$$
$$= \Delta t \sum_{i=1}^{N} \big[v(t_i) - v(t_{i-1})\big]. \tag{4.13}$$

La somma tra parentesi è telescopica: i termini intermedi si elidono e rimangono soltanto il valore finale e quello iniziale della velocità. Pertanto,

$$E_N = \big[v(t_N) - v(t_0)\big]\Delta t. \tag{4.14}$$

Nel caso considerato, la variazione complessiva della velocità è pari a

$$25 - 13,89 \approx 11{,}11\,\text{m/s}. \tag{4.15}$$

Con un passo temporale di dieci secondi, si ottiene

$$E_N \approx 11{,}11 \cdot 10 = 111{,}1\,\text{m}, \tag{4.16}$$

in accordo con la differenza tra le due stime.

Se l'intervallo temporale complessivo rimane fissato e si aumenta il numero N delle suddivisioni, il passo temporale diventa

$$\Delta t = \frac{t_N - t_0}{N}. \tag{4.17}$$

Di conseguenza, quando N cresce, Δt tende a zero e la differenza tra le somme superiore e inferiore tende a zero.

Questa osservazione permette di introdurre un'idea essenziale: una quantità accumulata può essere approssimata mediante una somma di contributi sempre più piccoli. Nel caso del moto, ciascun contributo è uno spostamento parziale; la somma di tali contributi consente di ricostruire la variazione complessiva della posizione.

Il passaggio alla rappresentazione geometrica e alle spezzate di posizione

Una volta completata l'attività numerica, l'insegnante propone di rappresentare graficamente i dati della tabella, riportando il tempo sull'asse orizzontale e la velocità sull'asse verticale.

Gli studenti sono invitati a osservare che ciascun prodotto $v(t_i)\Delta t$ può essere interpretato geometricamente come l'area di un rettangolo avente base Δt e altezza $v(t_i)$. La somma degli spostamenti parziali corrisponde quindi alla somma delle aree dei rettangoli costruiti sotto il grafico della velocità, nel caso della stima per difetto.

Analogamente, utilizzando le velocità rilevate alla fine di ciascun intervallo, si ottengono rettangoli che, essendo la velocità crescente, si collocano al di sopra del grafico. La loro area complessiva fornisce la stima per eccesso.

Questo passaggio consente di collegare due rappresentazioni dello stesso procedimento: da un lato la somma numerica degli spostamenti parziali, dall'altro la somma delle aree dei rettangoli nel piano velocità-tempo.

La corrispondenza tra spazio percorso e area non è una semplice analogia visiva. Essa deriva dalla relazione dello spazio nel moto uniforme, $s = v\Delta t$, e dal fatto che il prodotto tra la velocità e la durata dell'intervallo coincide con l'area del rettangolo avente altezza v e base Δt. Le unità di misura confermano questa interpretazione:

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}. \tag{4.18}$$

Oltre alla visualizzazione nel piano velocità-tempo, l'attività geometrica può essere letta direttamente sul piano del moto (tempo-posizione). Ipotizzando che la velocità rimanga costante all'interno di ciascun intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, la posizione dell'automobile non è descritta da una curva liscia, ma da una **spezzata poligonale** i cui segmenti hanno pendenza costante pari al valore assunto dalla velocità in quell'intervallo.

Utilizzando le velocità iniziali, si ottiene una spezzata che si mantiene costantemente al di sotto del grafico effettivo della posizione e dunque lo approssima per difetto (essendo la velocità in realtà crescente). Utilizzando invece le velocità finali di ciascun intervallo, si costruisce una spezzata che si colloca al di sopra del grafico reale della posizione e lo approssima dunque per eccesso. L'area dei rettangoli nel piano velocità-tempo e l'altezza finale raggiunta dalle spezzate nel piano del moto offrono così due prospettive geometriche complementari per analizzare le approssimazioni della posizione.

L'area sottesa dal grafico della velocità assume così un significato fisico preciso: rappresenta la variazione della posizione dell'automobile. La domanda iniziale può pertanto essere riformulata in termini geometrici: come possiamo determinare l'area compresa tra il grafico di una funzione e l'asse dei tempi quando il grafico non è una retta orizzontale?

La risposta viene cercata attraverso l'approfondimento delle approssimazioni e il confronto tra le somme ottenute con un numero crescente di rettangoli.

4.3.5 Il laboratorio GeoGebra: esplorare l'accumulazione e la precisione delle stime

Dopo l'attività iniziale su carta, il percorso prosegue con un laboratorio informatico della durata indicativa di due ore. Il software GeoGebra permette di rendere dinamico il procedimento appena introdotto, consentendo agli studenti di modificare il numero delle suddivisioni, osservare le somme per difetto e per eccesso, visualizzare le spezzate poligonali di approssimazione della posizione e confrontare i risultati numerici con la rappresentazione grafica.

La simulazione utilizza la stessa funzione di velocità del problema iniziale:

$$v(t) = \frac{50 + 0{,}016t^2}{3{,}6}, \qquad 0 \le t \le 50. \tag{4.19}$$

In GeoGebra la velocità è espressa in metri al secondo e il tempo in secondi. In questo modo, le aree dei rettangoli nel piano velocità-tempo e le ordinate delle spezzate

nel piano della posizione sono espresse in metri e possono essere confrontate direttamente con le stime dello spazio percorso.

Prima fase: costruzione del modello e visualizzazione delle spezzate

Si definisce la funzione velocità e si introducono due parametri dinamici:

- N, il numero delle suddivisioni dell'intervallo temporale;
- T, il tempo finale fino al quale si vuole stimare lo spazio percorso.

Per la prima esplorazione si imposta $T = 50$ e $N = 5$, così da riprodurre le cinque suddivisioni di dieci secondi utilizzate nell'attività su carta.

Si costruiscono quindi le somme per difetto e per eccesso:

$$S_{\text{inf}}(T, N) = \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\Delta t, \tag{4.20}$$

$$S_{\text{sup}}(T, N) = \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t, \tag{4.21}$$

dove

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \qquad t_i = i\Delta t, \tag{4.22}$$

considerando per semplicità l'intervallo iniziale $[0, T]$.

In ambiente GeoGebra, oltre a visualizzare i rettangoli nel piano velocità-tempo, è possibile costruire e osservare direttamente le **spezzate poligonali** che approssimano la funzione posizione. La spezzata inferiore (ottenuta considerando la velocità costante a tratti al valore iniziale di ogni intervallo) e la spezzata superiore (ottenuta con i valori finali) permettono agli studenti di visualizzare chiaramente il "ritardo" e l'"anticipo" accumulati dal veicolo rispetto alla posizione reale, mostrando geometricamente come le due linee racchiudano la curva della posizione e come si adattino all'andamento del moto.

In questa prima fase non è opportuno rendere visibile la funzione integrale esatta o la curva teorica della posizione: gli studenti devono poter confrontare le stime, osservare l'andamento delle spezzate e formulare ipotesi prima di conoscere il risultato a cui si vuole arrivare.

Con $T = 50$ secondi e $N = 5$, la simulazione deve restituire valori approssimativamente pari a

$$S_{\text{inf}} \approx 827{,}8\,\text{m}, \qquad S_{\text{sup}} \approx 938{,}9\,\text{m}. \tag{4.23}$$

Questi valori consentono di verificare la coerenza tra l'attività su carta e quella digitale.

Seconda fase: analisi della precisione

Gli studenti mantengono fisso il tempo finale $T = 50$ e aumentano gradualmente il valore di N, passando per esempio da 5 a 10, 20, 50 e 100.

A ogni passaggio osservano come cambiano i rettangoli, come si infittiscono i segmenti delle spezzate di posizione e come si modificano i valori delle due somme. L'obiettivo è individuare una regolarità: aumentando il numero delle suddivisioni, i rettangoli diventano più stretti, le spezzate per difetto e per eccesso approssimano sempre più finemente la curva continua e le due stime tendono ad avvicinarsi.

Per guidare l'osservazione si possono proporre le seguenti domande:

1. Che cosa succede alle somme per difetto e per eccesso quando aumenta N?
2. Come si modificano visivamente le spezzate poligonali nel grafico della posizione all'aumentare delle suddivisioni?
3. Come cambia la differenza tra le due somme?
4. Perché la stima per difetto rimane inferiore a quella per eccesso?
5. Possiamo ottenere una stima sempre più precisa senza cambiare il tempo finale?
6. Quale ruolo svolge la larghezza Δt dei rettangoli?

Si può inoltre visualizzare la differenza

$$E_N = S_{\text{sup}} - S_{\text{inf}} = \big[v(T) - v(0)\big]\,\Delta t. \tag{4.24}$$

È importante chiarire che questa quantità misura la distanza tra le due stime e non coincide con l'errore effettivo di una singola stima. La simulazione permette di osservare che tale distanza diminuisce all'aumentare di N, fornendo un riscontro visivo della relazione ricavata nell'attività precedente.

Terza fase: dal tempo finale alla funzione di accumulazione

Dopo aver studiato l'effetto del numero delle suddivisioni, gli studenti mantengono N sufficientemente elevato e fanno variare il tempo finale T, da zero a cinquanta secondi.

In questo modo, non osservano più soltanto lo spazio percorso in un intervallo fissato, ma il processo attraverso cui lo spazio si accumula al trascorrere del tempo. Ogni nuovo valore di T corrisponde a un nuovo intervallo di osservazione e a una nuova area sottesa dal grafico della velocità.

Si introduce quindi la funzione di accumulazione

$$A(T) = \int_0^T v(t)\,dt. \tag{4.25}$$

In questa fase la notazione integrale può essere presentata inizialmente come il modo matematico di indicare il limite delle somme di rettangoli, da formalizzare successivamente. Il significato fisico della funzione è

$$x(T) = x(0) + A(T), \tag{4.26}$$

ossia la posizione raggiunta è data dalla posizione iniziale più lo spazio accumulato nel tempo.

La simulazione permette di visualizzare il punto $(T, A(T))$, che descrive come varia la quantità accumulata al variare del tempo finale. Si sottolinea che il grafico della funzione di accumulazione non è il grafico della velocità: il primo rappresenta lo spazio percorso fino all'istante T, mentre il secondo rappresenta la velocità istantanea in quell'istante.

Quarta fase: il confronto tra velocità e pendenza della funzione di accumulazione

Nell'ultima fase dell'esplorazione si introduce la retta tangente al grafico della funzione $A(T)$. Facendo variare il tempo finale T, gli studenti possono osservare come cambia la pendenza della tangente e confrontarla con il valore della velocità $v(T)$.

La domanda guida è la seguente:

> *La velocità dell'automobile descrive quanto spazio viene percorso per unità di tempo. La pendenza della funzione di accumulazione descrive quanto rapidamente cresce lo spazio percorso. Che relazione possiamo individuare tra queste due grandezze?*

Gli studenti sono invitati a confrontare i valori numerici e a osservare la rappresentazione grafica. Se la funzione di accumulazione è derivabile, la pendenza della sua tangente nel punto di ascissa T è $A'(T)$. La simulazione suggerisce quindi la congettura

$$A'(T) = v(T). \tag{4.27}$$

È essenziale presentare questa conclusione come una congettura sostenuta dall'esplorazione, non come una dimostrazione matematica. Il software consente di osservare la corrispondenza tra le grandezze e di formulare un'ipotesi; la sua validità generale deve essere stabilita attraverso la formalizzazione teorica.

Per favorire la scoperta, è opportuno mostrare inizialmente soltanto i rettangoli e le somme approssimate. La funzione di accumulazione esatta e la retta tangente vengono rese visibili soltanto nella fase successiva, così da evitare che il risultato atteso sia presentato prima che gli studenti abbiano avuto la possibilità di formulare una propria interpretazione.

4.3.6 Dalla funzione di accumulazione al teorema fondamentale del calcolo integrale

La prima attività e il laboratorio convergono verso un unico problema matematico: comprendere il legame tra una funzione che descrive un tasso istantaneo di variazione e la quantità complessiva accumulata nel tempo.

Nel contesto cinematico, la velocità $v(t)$ descrive la variazione istantanea della posizione. Lo spazio percorso in un intervallo viene invece ricostruito sommando contributi del tipo $v(t_i)\Delta t$. Quando la velocità è continua, il limite di queste somme definisce l'integrale della velocità e permette di determinare la variazione della posizione:

$$x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)\,dt. \tag{4.28}$$

La relazione tra velocità e posizione è espressa da

$$x'(t) = v(t). \tag{4.29}$$

Il percorso consente quindi di riconoscere il carattere inverso delle due operazioni: la derivata descrive il tasso istantaneo di variazione della posizione, mentre l'integrale consente di ricostruire la variazione complessiva a partire da tale tasso.

Per rendere esplicito questo legame, si considera la funzione di accumulazione

$$A(T) = \int_0^T v(t)\,dt. \tag{4.30}$$

Se v è continua, il primo teorema fondamentale del calcolo integrale garantisce che A è derivabile e che

$$A'(T) = v(T). \tag{4.31}$$

La relazione ipotizzata durante l'esplorazione con GeoGebra trova così una giustificazione matematica generale.

Il secondo aspetto del teorema permette di collegare l'integrale definito alla ricerca di una primitiva. Se F è una primitiva di v, cioè $F'(t) = v(t)$, allora

$$\int_0^T v(t)\,dt = F(T) - F(0). \tag{4.32}$$

Di conseguenza, se conosciamo una primitiva $F(t)$ della funzione velocità, il problema iniziale della ricostruzione dello spazio percorso $x(t)$ può essere risolto con la formula:

$$x(T) = x(0) + F(T) - F(0). \tag{4.33}$$

Nel caso specifico del modello adottato, la funzione di velocità espressa in metri al secondo è

$$v(t) = \frac{50 + 0{,}016t^2}{3{,}6}. \tag{4.34}$$

Una sua primitiva è

$$F(t) = \frac{1}{3{,}6}\left(50t + \frac{0{,}016}{3}t^3\right). \tag{4.35}$$

Pertanto, lo spazio percorso nei primi cinquanta secondi è

$$\begin{aligned} x(50) - x(0) &= \int_0^{50} v(t)\,dt \\ &= \frac{1}{3{,}6}\left(50 \cdot 50 + \frac{0{,}016}{3} \cdot 50^3\right) \\ &\approx 879{,}6\,\text{m}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Il valore previsto dal modello si trova effettivamente tra le stime ottenute con cinque intervalli: circa 827,8 m per difetto e 938,9 m per eccesso. Il confronto consente di riprendere il problema iniziale e di discutere il significato della precisione raggiunta mediante le somme di rettangoli.

È opportuno precisare che la funzione quadratica adottata rappresenta un modello matematico del moto, non una legge universale del comportamento di un'automobile. Il risultato esatto è tale rispetto al modello ipotizzato; in una situazione reale, la precisione dipenderebbe anche dall'affidabilità delle misurazioni e dall'adeguatezza della funzione utilizzata per descrivere la velocità.

Il ruolo del teorema di Lagrange nel consolidamento del percorso

Una volta introdotta la relazione tra posizione e velocità, è possibile richiamare il teorema di Lagrange per mettere in relazione la velocità media e la velocità istantanea.

Considerando un intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, la velocità media è definita da

$$v_{\text{media}} = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \tag{4.37}$$

Se la funzione posizione è continua nell'intervallo e derivabile al suo interno, il teorema di Lagrange garantisce l'esistenza di almeno un istante $t^* \in (t_{i-1}, t_i)$ tale che

$$x'(t^*) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \tag{4.38}$$

Poiché $x'(t) = v(t)$, ne segue che in almeno un istante dell'intervallo la velocità istantanea coincide con la velocità media.

Questo risultato arricchisce la riflessione sul significato delle rilevazioni: la velocità media di un intervallo non è necessariamente uguale alla velocità iniziale o finale, ma coincide con una velocità istantanea assunta dal veicolo in un opportuno istante intermedio.

Il richiamo al teorema di Lagrange va tuttavia collocato dopo la costruzione della funzione di accumulazione e la formalizzazione del legame tra posizione e velocità. Esso

non sostituisce la definizione dell'integrale come limite di somme e non costituisce, da solo, una dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Il suo ruolo è piuttosto quello di consolidare il collegamento tra le grandezze cinematiche e i concetti di derivata e variazione media.

4.3.7 Organizzazione del percorso

Il percorso può essere organizzato in una lezione introduttiva di circa un'ora, seguita da un laboratorio GeoGebra di due ore e da una successiva fase di sistematizzazione teorica. I tempi sono indicativi e possono essere adattati alle conoscenze pregresse della classe.

La prima fase è dedicata al problema del tachimetro. Gli studenti ricevono la tabella dei valori di velocità e costruiscono una prima stima dello spazio percorso. L'obiettivo è far emergere la necessità di un metodo per sommare gli spostamenti parziali.

La seconda fase riguarda il confronto tra stima per difetto e stima per eccesso. Gli studenti comprendono che il risultato dipende dal numero delle rilevazioni e che l'aumento della frequenza dei campionamenti consente di migliorare la precisione dell'approssimazione.

La terza fase è dedicata alla rappresentazione geometrica e all'esplorazione con GeoGebra. La corrispondenza tra i prodotti $v(t_i)\Delta t$ e le aree dei rettangoli consente di collegare il problema cinematico al problema del calcolo delle aree. La manipolazione dei parametri rende visibile il processo di approssimazione e permette di osservare il comportamento delle somme quando il numero delle suddivisioni aumenta.

La quarta fase introduce la funzione di accumulazione e la congettura $A'(T) = v(T)$. Il confronto tra la pendenza della tangente alla curva di accumulazione e la velocità istantanea costituisce il momento centrale della scoperta concettuale.

Infine, la quinta fase è dedicata alla formalizzazione del teorema fondamentale del calcolo integrale e alla relazione tra integrale definito e primitiva. Il risultato teorico permette di comprendere perché il procedimento di ricostruzione dello spazio non sia soltanto una tecnica numerica, ma un caso particolare di un metodo generale per determinare quantità accumulate a partire da tassi di variazione.

Considerazione conclusiva sul legame della proposta didattica con le origini storiche del teorema fondamentale Un'ultima riflessione di carattere storico merita di essere evidenziata. La costruzione su cui si basa la nostra proposta didattica — fondata sulla stima della posizione a partire dalla velocità e sull'approssimazione mediante tassi di variazione successivi— ricalca sostanzialmente quella che utilizzò Evangelista Torricelli e che lo portò a formulare le prime considerazioni riconducibili al teorema fondamentale. Torricelli, pur non avendo a disposizione gli strumenti della geometria analitica e il simbolismo formale odierno, trovò in questa prospettiva cinematica il primo accesso naturale a tali risultati. Il fatto che questo sia stato storicamente il modo originario in cui tali concetti sono emersi costituisce un forte indizio del fatto che esso rappresenti, anche dal punto di vista cognitivo e intuitivo, la modalità più semplice e naturale per l'apprendimento del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Bibliografia

[1] Isaac Barrow. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. The Open Court Publishing Company, Chicago and London, 1916. Translated, with notes and proofs, and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus by J. M. Child.

[2] Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration*, volume 32 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[3] Carl B. Boyer. *Storia della matematica*. Mondadori, Milano, 1980. Titolo originale: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[4] David M. Bressoud. How should we introduce integration? *The College Mathematics Journal*, 23(4):296–298, sep 1992.

[5] David M. Bressoud. Historical reflections on teaching the fundamental theorem of calculus. *The American Mathematical Monthly*, 118(2):99–115, 2011.

[6] Guido Castelnuovo. *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*. Feltrinelli, Milano, 1962. Prefazione e cura di Umberto Forti.

[7] William Dunham. *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[8] Mordechai Feingold. Newton, Leibniz, and Barrow too: An attempt at a reinterpretation. *Isis*, 84(2):310–338, 1993.

[9] Judith V. Grabiner. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications, Mineola, NY, 2005. Pubblicato originalmente da The MIT Press, 1981.

[10] Guershon Harel. Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6):497–507, 1998.

[11] Jorge M. López Fernández. A commentary on barrow's proof of the first fundamental theorem of calculus. Department of Mathematics, University of Puerto Rico, Río Piedras, 2011. Joint Mathematics and Education Seminar.

[12] Luca Lussardi. Appunti di storia dell'Analisi Matematica. 2020.

[13] Ministero dell'Istruzione e del Merito. Indicazioni nazionali per i Licei, 2026.

[14] Patrick Muldowney. Ralph henstock, 1923–2007. *Real Analysis Exchange*, 32(2):v–vii, 2007.

[15] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Georg friedrich bernhard riemann. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, 1998.

[16] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Gottfried Wilhelm von Leibniz. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, October 1998.

[17] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Isaac barrow. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, June 1998.

[18] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Joseph-louis lagrange. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, 1999.

[19] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Isaac Newton. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, January 2000.

[20] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Evangelista Torricelli. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, November 2002.

[21] Ciro Poli. Sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 49:132–134, 1913–1914.

[22] Bernhard Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Trascritto da D. R. Wilkins, 2000. Versione preliminare: dicembre 1998; versione corretta: aprile 2000. Pubblicato originariamente in: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Vol. 13, 1867, pp. 1–41.

[23] Patrick W. Thompson. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3):229–274, 1994.

[24] Giuseppe Vitali. Sulla condizione della integrabilità riemanniana lungo un dato intervallo delle funzioni limitate di una variabile reale. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 6(5):361, dicembre 1927. Estratto editato dalla Casa Editrice Nicola Zanichelli, Bologna.

[25] Adolph Andrei Pavlovich Youschkevitch. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1):37–85, 1976.