UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

Corso di Laurea Magistrale in Matematica (LM–40)

Bernhard Riemann e il problema delle serie trigonometriche

Un percorso storico-matematico dall'Ottocento all'analisi moderna

Relatori
Prof.ssa Michela Eleuteri
Prof. Carlo Benassi

Candidato
Gabriele Giliberti

Anno Accademico 2025–2026

Prefazione

Nella storia della matematica, molte teorie non nascono dal desiderio di estendere conoscenze già acquisite, ma dall'esigenza di risolvere problemi rimasti a lungo irrisolti. Tra questi, uno dei più fecondi riguarda la rappresentazione delle funzioni mediante serie trigonometriche. Da questa questione, apparentemente circoscritta, ebbe origine il concetto di integrale come lo conosciamo oggi, destinato a trasformare l'analisi matematica.

L'opera di Bernhard Riemann occupa una posizione centrale in questa vicenda. La sua teoria dell'integrazione non fu concepita come una costruzione astratta, ma come una risposta a un problema preciso: stabilire quando i coefficienti di una serie trigonometrica potessero essere definiti e quale significato attribuire all'integrale delle funzioni coinvolte. In questo senso, l'integrale di Riemann rappresenta non soltanto una nuova definizione, ma il punto di incontro tra le esigenze dell'analisi, della teoria delle serie e della ricerca sui fondamenti della matematica.

Questo elaborato, pensato in occasione del bicentenario della nascita di Riemann, non intende limitarsi a celebrare uno dei maggiori matematici del XIX secolo. Si propone invece di ricostruire il contesto scientifico nel quale maturò la sua teoria, seguendo il filo che conduce dalle prime ricerche sulle serie trigonometriche alle profonde trasformazioni dell'analisi moderna. Ripercorrere questa storia significa osservare come un problema concreto abbia favorito la nascita di nuovi concetti, destinati a influenzare gli sviluppi successivi della teoria della misura, dell'analisi funzionale e della matematica contemporanea. È una vicenda nella quale le idee emergono gradualmente, attraverso il dialogo tra generazioni di matematici, fino a trovare nell'opera di Riemann uno dei loro momenti più alti.

La tesi è strutturata come segue: il `primo capitolo` tratterà il problema delle serie trigonometriche partendo dalla figura di Joseph Fourier, il `secondo capitolo` si concentrerà sull'analisi della *Habilitationsschrift* di Riemann del 1854, e infine, nel `terzo capitolo`, si vedranno gli sviluppi successivi a Riemann.

Indice

Prefazione **i**

1 Il problema delle serie trigonometriche **3**

1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier 3

1.1.1 La matematica in Francia dopo la Rivoluzione 4

1.1.2 *Théorie analytique de la chaleur* e l'equazione del calore . . . 5

1.1.3 La nascita delle serie di Fourier 8

1.1.4 Lo sviluppo in serie di Fourier 12

1.1.5 La convergenza delle serie di Fourier 17

1.2 Le reazioni dei matematici 21

1.2.1 Siméon-Denis Poisson e Augustin-Louis Cauchy 22

1.2.2 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 26

2 Riemann e la memoria del 1854 **33**

2.1 Le motivazioni della memoria 34

2.2 *Sul concetto di integrale definito* 36

2.3 La rappresentazione delle funzioni 42

2.3.1 Tre risultati preliminari 44

2.3.2 Condizioni necessarie e sufficienti 51

2.3.3 Due esempi notevoli 58

3 Sviluppi successivi a Riemann **63**

Definizioni principali sulle serie di Fourier 63

3.1 La nascita della teoria degli insiemi 66

3.1.1 Il problema dell'unicità della serie di Fourier 66

3.1.2 Georg Cantor e l'emergere della teoria degli insiemi 69

3.2 Il problema della convergenza 72

3.2.1 Convergenza uniforme e assoluta della serie di Fourier 73

3.2.2 Convergenza in media quadratica della serie di Fourier 76

3.2.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier 81

3.3 Dall'integrale di Riemann a Lebesgue 86
3.3.1 La teoria della misura di Borel 87
3.3.2 La teoria dell'integrazione di Lebesgue 90

Conclusioni **107**

A Gli integrali di Cauchy e di Riemann **109**

B Script MATLAB **113**

Bibliografia **119**

Capitolo 1

Il problema delle serie trigonometriche

Il problema delle serie trigonometriche occupa una posizione centrale nello sviluppo dell'analisi matematica tra il XVIII e il XIX secolo. Nato dallo studio delle corde vibranti e successivamente rilanciato dalle ricerche di Fourier sulla propagazione del calore, esso diede origine a un intenso dibattito riguardante la rappresentazione delle funzioni, la convergenza delle serie e gli strumenti analitici necessari per determinarne i coefficienti.

Il riferimento principale di questo capitolo sarà il libro [1] di Umberto Bottazzini, mentre le fonti storiche analizzate saranno la *Théorie analytique de la chaleur* [7] di Fourier, parti delle memorie [14] e [3] rispettivamente di Poisson e Cauchy, e l'articolo [6] sulla convergenza delle serie trigonometriche di Dirichlet.

1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier nacque il 21 marzo 1768 ad Auxerre, in Francia, in una famiglia modesta. Rimasto orfano di entrambi i genitori in giovane età, ricevette un'istruzione presso scuole religiose, dove manifestò fin da adolescente una straordinaria predisposizione per la matematica. Durante la Rivoluzione francese partecipò attivamente alla vita politica locale e, dopo un breve periodo di prigionia durante il Terrore, fu ammesso nel 1794 all'École Normale e



Fig. 1: *Joseph Fourier (1768-1830)*

successivamente divenne docente all'École Polytechnique, dove ebbe come maestri matematici del calibro di Lagrange, che Fourier descrisse come « *il primo tra gli uomini europei di scienza* » [16], e Laplace.

Nel 1798 prese parte alla spedizione napoleonica in Egitto come membro del corpo scientifico e, tornato in Francia nel 1801, Napoleone lo nominò prefetto del dipartimento dell'Isère, incarico amministrativo che Fourier svolse con notevole efficienza senza tuttavia abbandonare la ricerca matematica. Fu proprio durante il periodo trascorso a Grenoble che Fourier sviluppò le sue ricerche sulla propagazione del calore; il suo lavoro fu premiato nel 1811 e trovò la sua formulazione definitiva nella *Théorie analytique de la chaleur* (1822), destinata a esercitare un'influenza decisiva sullo sviluppo dell'analisi matematica del XIX secolo.

Negli ultimi anni della sua vita Fourier ricoprì importanti incarichi scientifici, tra cui quello di membro dell'Académie des Sciences, continuando a dedicarsi alla ricerca fino alla morte, avvenuta a Parigi il 16 maggio 1830. La sua opera non rivoluzionò soltanto la teoria della conduzione del calore, ma aprì nuove prospettive nello studio delle serie trigonometriche, contribuendo in modo determinante alla successiva elaborazione di concetti fondamentali dell'analisi, tra cui una teoria dell'integrazione più rigorosa.

1.1.1 La matematica in Francia dopo la Rivoluzione

Tra il XVIII e il XIX secolo si verificò una profonda frattura sul piano politico, sociale ed economico a causa della Rivoluzione francese. Nel Settecento i matematici svolgevano le loro attività all'ombra delle accademie, senza alcun obbligo di insegnamento, con una rendita economica garantita grazie al supporto di mecenati quali principi e sovrani: basti pensare ad esempio all'Accademia di Berlino, dove lavorò lungamente Euler e poi Lagrange prima di lasciare la Germania per l'Accademia di Parigi, e all'Accademia di Pietroburgo, dove furono attivi lo stesso Euler e Daniel Bernoulli. Era inoltre assai frequente l'informazione diretta tra matematici attraverso lettere personali, mentre le università erano pressoché inesistenti per quanto riguarda la ricerca. Un esempio interessante di tali corrispondenze è dato dalla lettera [18] che il matematico norvegese Niels Abel scrisse al connazionale Bernt Holmboe il 24 ottobre 1826, in cui asserì che

depuis le commencement de cette année. *Cauchy* est à présent le seul qui s'occupe des mathématiques pures. *Poisson*, *Fourier*, *Ampère* etc. s'occupent exclusivement du magnétisme et d'autres sujets physiques. M. *Laplace* n'écrit

Fig. 2: *Estratto della lettera tra Abel e Holmboe del 24 ottobre 1826*

> «*[...] Cauchy è ora l'unico che si occupa di matematica pura. Poisson, Fourier, Ampère, ecc. si occupano esclusivamente di magnetismo e di altri temi di fisica. [...]*»

Il fatto che materialmente segna la svolta nel modo di intendere e di svolgere il mestiere del matematico è la fondazione delle grandi scuole francesi in cui il tipo di insegnamento impartito è fondato sulla matematica pura e applicata, dove impegnativi corsi di analisi si affiancano a corsi di meccanica o di geometria descrittiva.

Verso la fine del Settecento, già prima della pubblicazione nel 1797 della celebre *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, c'era la forte e diffusa convinzione che la matematica fosse giunta a una fase di stallo, dove non era possibile proseguire con nuove scoperte. A prova di questa opinione ci sono gli scritti di Lagrange a D'Alembert e di Delambre, mentre controcorrente fu l'idea di Condorcet, che nel 1781 scrisse [1]:

> « *Siamo lontani dall'aver esaurito le applicazioni dell'analisi alla geometria, e invece di credere che ci stiamo avvicinando alla fine, al punto in cui queste scienze dovranno arrestarsi perché avranno raggiunto il limite delle forze del pensiero umano, dobbiamo piuttosto riconoscere di essere solo al primo passo di un immenso sviluppo. Le nuove applicazioni, indipendentemente dall'utilità che esse possono avere in sé, sono necessarie per il progresso dell'analisi in generale; esse danno luogo a questioni impensate e richiedono di creare nuovi metodi. I processi tecnici sono figli della necessità e lo stesso si può dire per i metodi delle scienze più astratte. Ma queste ultime sono dovute a necessità di carattere più elevato, la necessità di scoprire nuove verità o di conoscere meglio le leggi della natura* »

Le considerazioni di Condorcet si riveleranno sorprendentemente lungimiranti. Esse infatti anticipano non solo il notevole sviluppo che la matematica conoscerà nel corso dell'Ottocento, ma, almeno in parte, anche l'origine delle principali linee di ricerca; in particolare, uno dei settori più rilevanti della matematica e della fisica trarrà impulso dallo studio di un problema di grande interesse sia teorico sia applicativo: la natura e la **propagazione del calore**.

1.1.2 *Théorie analytique de la chaleur* e l'equazione del calore

La ricerca sui fenomeni termici conobbe un impulso significativo tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo. Un primo contributo fondamentale risale al 1784, quando Laplace e Lavoisier pubblicarono una memoria congiunta in cui presentarono i risultati delle loro indagini sperimentali sulla determinazione del calore specifico di diverse sostanze. Vent'anni più tardi, nel 1804, Jean-Baptiste Biot, allievo di

Laplace, affrontò il tema della propagazione del calore in una memoria apparsa sul *Journal des Mines*. In quegli stessi anni anche Fourier iniziò a dedicarsi allo studio del problema, sviluppando però un approccio profondamente innovativo rispetto ai suoi predecessori. Come avremo modo di vedere successivamente, le sue idee avrebbero esercitato un'influenza duratura sullo sviluppo dell'analisi matematica, alimentando il dibattito scientifico e stimolando le ricerche di studiosi quali Dirichlet, Riemann, Cauchy e Lebesgue. La prospettiva teorica proposta da Fourier trova una formulazione particolarmente chiara nel *Discours préliminaire*, che introduce la sua ***Théorie analytique de la chaleur***, pubblicata nel 1822 [7]:

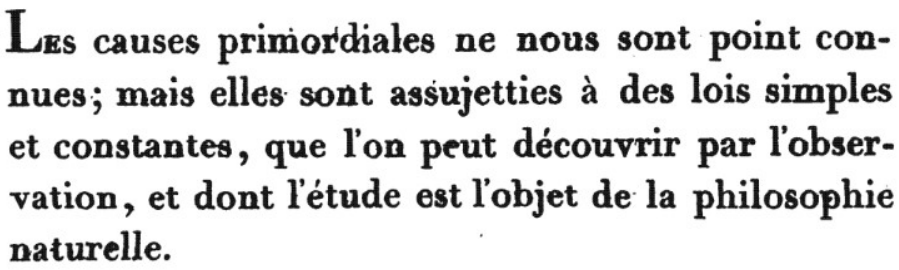

Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.

FIG. 3: *Incipit del Discours préliminaire*

«Le cause primordiali non ci sono note, ma sono soggette a leggi semplici e costanti, che si possono scoprire mediante l'osservazione, e il cui studio è l'oggetto della filosofia naturale.»

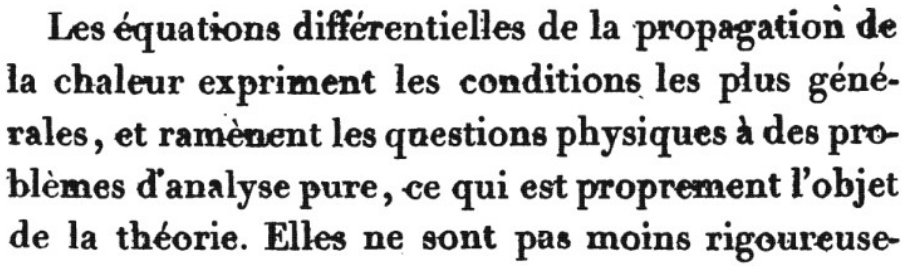

Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques à des problèmes d'analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie. Elles ne sont pas moins rigoureuse-

FIG. 4: *Discours préliminaire, p. xi*

«Le equazioni differenziali della propagazione del calore esprimono le condizioni più generali e riducono le questioni fisiche a problemi di analisi pura, e questo è l'oggetto vero e proprio della teoria. [...]»

«[...] Dopo aver stabilito queste equazioni differenziali, bisognava ottenerne gli integrali; il che consiste nel passare da un'espressione generale [commune] *a una soluzione specifica* [propre] *soggetta a tutte le condizioni date. Questa ricerca difficile esigeva un'analisi speciale, fondata su teoremi nuovi. [...]»*

portait beaucoup de perfectionner. Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en obtenir les intégrales; ce qui consiste à passer d'une expression commune, à une solution propre assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux dont nous ne pourrions ici faire connaître l'objet. La méthode qui en dérive ne laisse

Fig. 5: *Discours préliminaire, p. xii*

Nel secondo capitolo, Fourier considera un'armilla, ovvero un anello, di spessore dx la cui temperatura era influenzata solo dalle sezioni ad essa adiacenti e dall'atmosfera in contatto con la superficie esterna della sezione.

> « *Sia v la temperatura che la sezione posta alla distanza x avrà raggiunto dopo il tempo trascorso t; v è una certa funzione di x e di t, nella quale devono entrare anche tutte le temperature iniziali; è questa funzione che bisogna scoprire* »
>
> Capitolo II, pp. 100-101

Sotto tali ipotesi, indicando con h e k i coefficienti di conducibilità esterna e interna rispettivamente, fatti propri dall'articolo di Biot, egli ottiene l'equazione omogenea

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h}{k}v$$

il cui integrale generale è

$$v = M \cdot e^{-x\sqrt{h/k}} + N \cdot e^{x\sqrt{h/k}} \quad \text{con } M \text{ e } N \text{ costanti arbitrarie.}$$

Poiché si sta trattando la propagazione del calore lungo una sbarra infinita, si ha che v deve essere infinitamente piccola al crescere di x, da cui si ottiene $N = 0$ e $v = M \cdot e^{x\sqrt{h/k}}$. Considerando la variabilità della temperatura in dipendenza del tempo si ricava in modo analogo[1]

$$k\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.1}$$

[1] Nelle equazioni (1.1), (1.2) e (1.3) è stato omesso al primo membro il termine $-hv$ che, correttamente, non compare nemmeno nell'opera di Fourier. Ciò è dovuto al fatto che tale termine dipende dalla « *dispersione del calore del corpo [... che] riguarda solo le molecole della superficie del corpo e non quelle interne* » **[1, p. 63]**.

per il caso di una sbarra infinita, mentre per i casi di una lamina e di un corpo solido si ha rispettivamente

$$k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}\,, \tag{1.2}$$

$$k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}\,. \tag{1.3}$$

1.1.3 La nascita delle serie di Fourier

All'inizio del terzo capitolo Fourier cerca di integrare la (1.3) prendendo come esempio una lamina rettangolare semi-infinita $[0,+\infty)\times[-\pi/2,\pi/2]$ in cui la temperatura è 0 sui due lati $y=\pm\pi/2$ e 1 sull'estremità $x=0$. Di conseguenza ignora la coordinata z e omette il termine $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, riconducendosi dunque alla (1.2). Inoltre, volendo determinare le « *temperature stazionarie* » – vale a dire il caso di equilibrio termico –, abbiamo

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0\,.$$

da cui l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,. \tag{1.4}$$

A questo punto, detta $\varphi(x,y)$ una soluzione della (1.4) tale che

$$\varphi(x,\pm\pi/2)=0 \quad \forall x\in[0,+\infty) \tag{1.5}$$

$$\varphi(0,y)=1 \quad \forall y\in(-\pi/2,\pi/2)\,, \tag{1.6}$$

Fourier utilizza il metodo di separazione delle variabili: pone

$$\varphi(x,y)=a\cdot F(x)\cdot f(y) \quad \text{con } F(x)=e^{mx} \text{ e } f(y)=\cos(my),$$

che sostituita nella (1.4) dà come possibili alternative $\varphi(x,y)=a\,e^{mx}\cos(my)$ e $\varphi(x,y)=a\,e^{-mx}\cos(my)$. La prima opzione può essere scartata dato che φ diventerebbe infinitamente grande al crescere di x e quindi avremo

$$\varphi(x,y)=a\,e^{-mx}\cos(my) \quad \text{con } m\in\mathbb{N} \text{ qualunque e } a \text{ costante indeterminata.}$$

Imponendo la condizione (1.5), è chiaro che m deve essere un intero positivo dispari e dunque possiamo scrivere la soluzione generale

$$v(x,y)=a_1\,e^{-x}\cos y+a_3\,e^{-3x}\cos(3y)+a_5\,e^{-5x}\cos(5y)+a_7\,e^{-7x}\cos(7y)+\cdots$$

dove, come conseguenza della (1.6), le costanti $\{a_m\}_{m=1,3,5,7,\ldots}$ sono tali che

$$a_1\cos y+a_3\cos(3y)+a_5\cos(5y)+a_7\cos(7y)+\cdots=1\,. \tag{1.7}$$

Ora non resta che determinare tali costanti che osserviamo essere in numero infinito. Lo stesso Fourier afferma:

— $\frac{1}{2}\pi$ et + $\frac{1}{2}\pi$. On pourrait douter qu'il existât une pareille fonction, mais cette question sera pleinement éclaircie par la suite.

Fig. 6: *Capitolo III, p. 165*

«[...] Si potrebbe dubitare che esista una funzione del genere, ma questa questione sarà chiarita completamente più avanti.»

Per tale scopo, Fourier considera la serie (1.7) e le sue derivate successive, derivando termine per termine, e pone $y = 0$, giungendo così alle infinite equazioni

$$\begin{aligned}
a_1 &+ a_3 &+ a_5 &+ a_7 &+ \ldots &= 1\\
a_1 &+ 3^2a_3 &+ 5^2a_5 &+ 7^2a_7 &+ \ldots &= 0\\
a_1 &+ 3^4a_3 &+ 5^4a_5 &+ 7^4a_7 &+ \ldots &= 0\\
a_1 &+ 3^6a_3 &+ 5^6a_5 &+ 7^6a_7 &+ \ldots &= 0\\
a_1 &+ 3^8a_3 &+ 5^8a_5 &+ 7^8a_7 &+ \ldots &= 0\\
& & & & &\vdots
\end{aligned}$$

Per risolvere tale sistema, Fourier prende solamente le prime m equazioni in m incognite, con m finito, determina il valore della costante a_1 risolvendo il nuovo sistema finito eliminando successivamente le incognite $a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{2m-1}$ e ricava i valori delle restanti $m-1$ incognite, per poi infine passare al limite per $m \to +\infty$ ricavando così gli effettivi valori delle costanti $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$. Vediamo un esempio.

Esempio 1.1.

Supponiamo di usare le prime $m = 4$ equazioni

$$\begin{aligned}
a_1 &+ a_3 &+ a_5 &+ a_7 &= 1\\
a_1 &+ 3^2a_3 &+ 5^2a_5 &+ 7^2a_7 &= 0\\
a_1 &+ 3^4a_3 &+ 5^4a_5 &+ 7^4a_7 &= 0\\
a_1 &+ 3^6a_3 &+ 5^6a_5 &+ 7^6a_7 &= 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Chiamando E_k la k-esima equazione del sistema (1.8), con $k = 1, 2, 3, 4$, tramite le operazioni elementari in sequenza $E_{4-i} \leftarrow 7^2E_{3-i} - E_{4-i}$, per $i = 0, 1, 2$, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{aligned}
a_1 &+ a_3 &+ a_5 &+ a_7 &= 1\\
(7^2-1^2)\,a_1 &+ (7^2-3^2)\,a_3 &+ (7^2-5^2)\,a_5 & &= 7^2\\
(7^2-1^2)\,a_1 &+ 3^2\,(7^2-3^2)\,a_3 &+ 5^2\,(7^2-5^2)\,a_5 & &= 0\\
(7^2-1^2)\,a_1 &+ 3^4\,(7^2-3^2)\,a_3 &+ 5^4\,(7^2-5^2)\,a_5 & &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Chiamando E'_k la k-esima equazione del sistema (1.9), con $k = 1, 2, 3, 4$, tramite le operazioni elementari in sequenza $E'_{4-i} \leftarrow 5^2 E'_{3-i} - E'_{4-i}$, per $i = 0, 1, 2$, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr}
a_1 & + & a_3 & + & a_5 & + & a_7 = 1 \\
(7^2-1^2)(5^2-1^2)\,a_1 & + & (7^2+5^2-3^2)\,a_3 & + & (-5^2)\,a_5 & & = 5^2-7^2 \\
(7^2-1^2)(5^2-1^2)\,a_1 & + & (7^2-3^2)(5^2-3^2)\,a_3 & & & & = 7^2\cdot 5^2 \\
(7^2-1^2)(5^2-1^2)\,a_1 & + & 3^2(7^2-3^2)(5^2-3^2)\,a_3 & & & & = 0
\end{array}$$

A questo punto non ci rimane che moltiplicare la terza equazione del precedente sistema per 3^2 e sottrarci la quarta equazione, cosicché

$$(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2)\,a_1 = 7^2\cdot 5^2\cdot 3^2\,,$$

da cui si ricava a_1 e, a ritroso, le altre incognite a_3, a_5, a_7.

Seguendo tale procedura per ogni m finito e facendo tendere $m \to +\infty$, si ha

$$a_1 = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdot 13\cdot\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12\cdot 14\cdot\cdots} = \frac{4}{\pi}$$

come conseguenza del

Teorema 1.2. (Formula di Wallis – 1656)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\,.$$

✍ Dimostrazione

Una delle dimostrazioni più semplici della formula di Wallis consiste nell'utilizzare la cosiddetta *formula di Eulero-Wallis per il seno*: siccome le radici della funzione seno cardinale $f(x) = \sin x/x$ sono $\pm n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Ruffini risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} &= k\,(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots \\
&= \bar{k}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots\,.
\end{aligned}$$

Ora, facendo ad ambo i membri il limite per $x \to 0$ segue che $\bar{k} = 1$, da cui

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\,. \tag{1.10}$$

La tesi si ottiene valutando la (1.10) in $x = \pi/2$, infatti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi/2} &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 3^2}\right)\cdots \\
&= \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{6^2-1}{6^2}\cdot\cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots
\end{aligned}$$

□

Risostituendo il valore ottenuto per a_1 e ricavando con procedura analoga i valori di $a_3, a_5, a_7, \ldots$ Fourier trova per i coefficienti le seguenti espressioni

$$a_1 = \frac{4}{\pi}\,, \quad a_3 = -\frac{4}{3\pi}\,, \quad a_5 = \frac{4}{5\pi}\,, \quad a_7 = -\frac{4}{7\pi}\,, \quad \ldots$$

da cui si ottiene la relazione

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos(3y) + \frac{1}{5}\cos(5y) - \frac{1}{7}\cos(7y) + \cdots\,, \tag{1.11}$$

dove il secondo membro è una funzione di $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ che è dunque costante. Dopodiché Fourier prosegue esaminando la relazione (1.11):

> « *L'equazione*
>
> $$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \textit{ecc.}$$
>
> *appartiene a una linea che, avendo x come ascissa e y come ordinata, è composta da segmenti rettilinei distinti, ciascuno parallelo all'asse e pari alla metà della circonferenza. Questi segmenti paralleli sono posti alternativamente sopra e sotto l'asse, a una distanza di $\pi/4$, e uniti da perpendicolari che sono a loro volta parte della retta. Per formarsi un'idea precisa della natura di questa retta, è necessario supporre che il numero di termini della funzione*
>
> $$\cos x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \textit{ecc.}$$
>
> *assuma inizialmente un valore determinato. In quest'ultimo caso l'equazione*
>
> $$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \textit{ecc.} \tag{1.12}$$
>
> *appartiene a una retta curva che passa alternativamente sopra e sotto l'asse, intersecandolo ogni volta che l'ascissa x diventa uguale a una delle quantità*
>
> $$0\,, \quad \pm\frac{\pi}{2}\,, \quad \pm\frac{3}{2}\pi\,, \quad \pm\frac{5}{2}\pi\,, \quad \textit{ecc.}$$
>
> *man mano che aumenta il numero di termini dell'equazione, la curva in questione tende sempre più a coincidere con la retta precedente, composta da segmenti paralleli e perpendicolari; cosicché questa retta è il limite delle diverse curve che si otterrebbero arrotondando successivamente il numero di termini.* »
>
> Capitolo III, pp. 176-177

Il grafico a cui fa riferimento Fourier è dunque quello in Figura 7, anche se non lo disegna nella sua opera. Si osserva che nell'edizione originale [7] della *Théorie analytique de la chaleur* tra le radici di (1.12) compare $x = 0$, valore non compatibile in quanto, come afferma Fourier, i segmenti paralleli all'asse delle ascisse hanno lunghezza pari a metà della circonferenza unitaria, vale a dire π. Tale incongruenza è stata poi giustamente corretta nella raccolta [4] curata da Darboux.

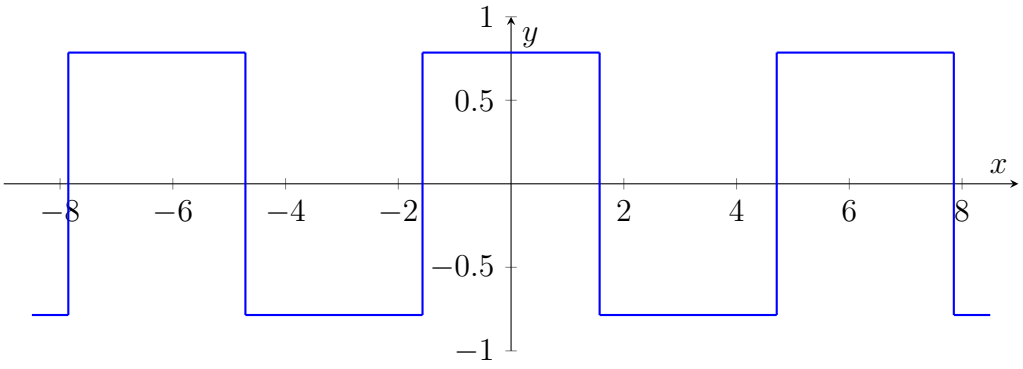


Fig. 7: *Grafico secondo Fourier della funzione (1.12)*

1.1.4 Lo sviluppo in serie di Fourier

Nella sesta sezione del terzo capitolo Fourier affronta lo **sviluppo di una funzione arbitraria in serie trigonometriche**. Così inizia:

> *« La questione della propagazione del calore in un solido rettangolare ha portato all'equazione*
>
> $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,;$$
>
> *e se supponiamo che tutti i punti di una delle facce del solido abbiano una temperatura comune, è necessario determinare i coefficienti $a, b, c, d, e,$ ecc. della serie*
>
> $$a\cos x + b\cos(3x) + c\cos(5x) + d\cos(7x) + \ldots \text{ ecc.},$$
>
> *in modo che il valore di questa funzione sia uguale a una costante ogni volta che l'arco x è compreso $-\pi/2$ e $\pi/2$. Qui abbiamo appena assegnato il valore di questi coefficienti; ma abbiamo trattato solo un caso di un problema più generale, che consiste nello* ***sviluppare una qualsiasi funzione in una serie infinita di seni o coseni di archi multipli****. Questa questione è legata alla teoria delle equazioni alle differenze parziali ed è stata sollevata fin dall'inizio di questa analisi. Era necessario risolverla per integrare correttamente le equazioni della propagazione del calore; ora ne esporremo la soluzione. »*
>
> Capitolo III, pp. 210-211

Per prima cosa Fourier esamina il caso in cui è possibile ridurre a una serie di seni di più archi una funzione la cui espansione contiene solo potenze dispari della variabile. Designando tale funzione tramite

$$\varphi(x) = a\sin x + b\sin(2x) + c\sin(3x) + d\sin(4x) + e\sin(5x) + \cdots, \tag{1.13}$$

ne considera lo sviluppo in serie di Maclaurin

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n = Ax - B\frac{x^3}{3!} + C\frac{x^5}{5!} - D\frac{x^7}{7!} + E\frac{x^9}{9!} - \cdots$$

con

$$\begin{array}{rcccccccccc} A &=& a &+& 2b &+& 3c &+& 4d &+& 5e &+& \cdots \\ B &=& a &+& 2^3 b &+& 3^3 c &+& 4^3 d &+& 5^3 e &+& \cdots \\ C &=& a &+& 2^5 b &+& 3^5 c &+& 4^5 d &+& 5^5 e &+& \cdots \\ D &=& a &+& 2^7 b &+& 3^7 c &+& 4^7 d &+& 5^7 e &+& \cdots \\ E &=& a &+& 2^9 b &+& 3^9 c &+& 4^9 d &+& 5^9 e &+& \cdots \\ & \vdots & & & & & & & & & & & \end{array} \tag{1.14}$$

Dopodiché utilizza le equazioni (1.14) per determinare i coefficienti $a, b, c, d, e, \ldots$ con un procedimento del tutto analogo a quanto visto nell'Esempio 1.1: usando le prime m equazioni in m incognite, con m finito, determina a eliminando in successione le incognite $b, c, d, e, \ldots$, ricavando di conseguenza anche queste ultime, e poi passa al limite per $m \to +\infty$. Dopo vari calcoli si ottengono i valori delle incognite $a, b, c, d, e, \ldots$ a partire da quelli degli scalari $A, B, C, D, E, \ldots$, così come mostrato in Figura 8. A questo punto, ricordando che $A = \varphi'(0)$, $B = \varphi'''(0)$, $C = \varphi^{(5)}(0)$, $D = \varphi^{(7)}(0)$, $E = \varphi^{(9)}(0)$, ecc., sostituendo il tutto nella (1.13) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \cdot \Bigg(& \varphi'(0) + \varphi'''(0)\left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{1^2}\right) + \varphi^{(5)}(0)\left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{1^2}\right) \\ & + \varphi^{(7)}(0)\left(\frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{1^6}\right) + \cdots \Bigg) \\ - \frac{1}{2}\sin(2x) \cdot \Bigg(& \varphi'(0) + \varphi'''(0)\left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{2^2}\right) + \varphi^{(5)}(0)\left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{2^2}\right) \\ & + \varphi^{(7)}(0)\left(\frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{2^6}\right) + \cdots \Bigg) \\ + \frac{1}{3}\sin(3x) \cdot \Bigg(& \varphi'(0) + \varphi'''(0)\left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{3^2}\right) + \varphi^{(5)}(0)\left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{3^2}\right) \\ & + \varphi^{(7)}(0)\left(\frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{3^6}\right) + \cdots \Bigg) \\ - \frac{1}{4}\sin(4x) \cdot \Bigg(& \varphi'(0) + \varphi'''(0)\left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{4^2}\right) + \varphi^{(5)}(0)\left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{4^2}\right) \\ & + \varphi^{(7)}(0)\left(\frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{4^6}\right) + \cdots \Bigg) + \cdots \end{aligned}$$

che, dopo una lunga e complicata analisi, Fourier dimostra essere equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx + \sin(2x)\int_0^\pi \varphi(x)\sin(2x)\,dx \\ + \sin(3x)\int_0^\pi \varphi(x)\sin(3x)\,dx + \cdots \\ \cdots + \sin(ix)\int_0^\pi \varphi(x)\sin(ix)\,dx + \cdots . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Proseguendo, nel paragrafo 224 Fourier mostra che, in modo simile a quanto visto precedentemente, è possibile sviluppare una qualunque funzione pari in serie

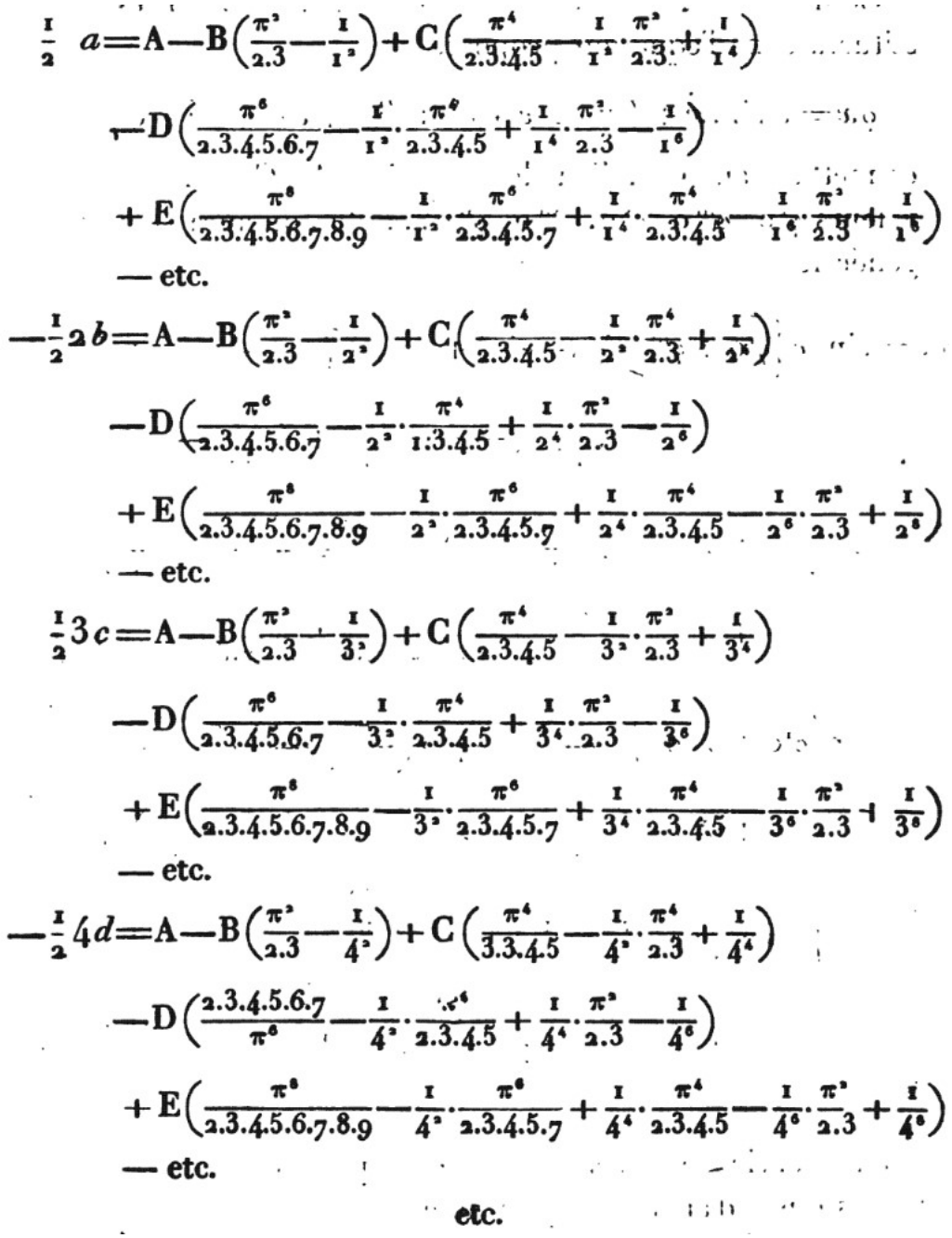


Fig. 8: *Capitolo III, p. 225*

di coseni di archi multipli, giungendo così alla relazione

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)\,dx + \cos x \int_0^\pi \varphi(x)\cos x\,dx \\ + \cos(2x)\int_0^\pi \varphi(x)\cos(2x)\,dx \\ + \cos(3x)\int_0^\pi \varphi(x)\cos(3x)\,dx + \cdots \\ \cdots + \cos(ix)\int_0^\pi \varphi(x)\cos(ix)\,dx + \cdots .\end{aligned} \tag{1.16}$$

Le considerazioni più interessanti arrivano però a partire dal paragrafo 232.

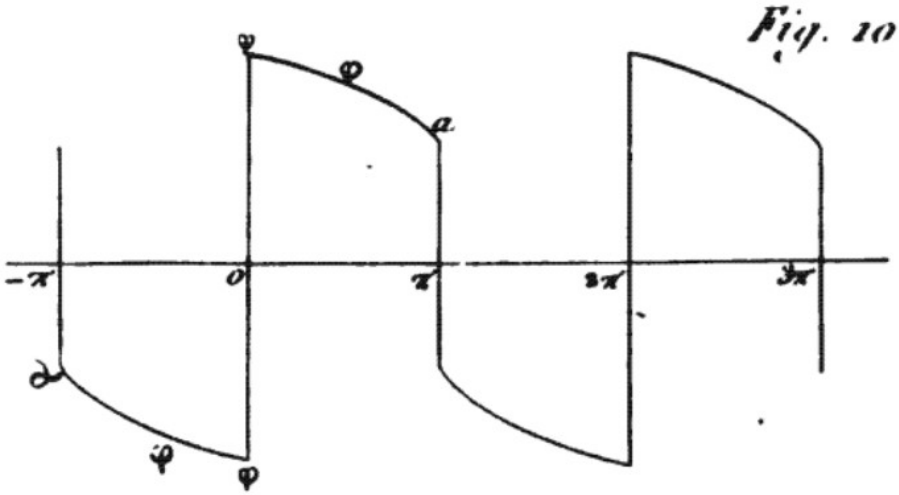


Fig. 9: *Figura 10, Tavola I*

> « *Nell'equazione che dà lo sviluppo di una funzione qualunque in seni d'archi multipli* [vedi (1.15)], *la serie cambia segno e conserva lo stesso valore assoluto quando la variabile* x *diventa negativa; conserva il suo valore e il suo segno quando la variabile viene aumentata o diminuita di un multiplo qualunque della circonferenza* 2π. *L'arco* $\varphi\varphi a$ *(vedi fig. 10)* [vedi Figura 9], *che corrisponde all'intervallo da* 0 *a* π, *è arbitrario; tutte le altre parti della linea sono determinate. L'arco* $\varphi\varphi\alpha$, *che corrisponde all'intervallo da* 0 *a* $-\pi$, *ha la stessa forma dell'arco dato* $\varphi\varphi a$, *ma lui è nella situazione opposta. L'arco totale* $\alpha\varphi\varphi\varphi\varphi a$ *si ripete nell'intervallo da* π *a* 3π *e in tutti gli intervalli simili. [...] Potremmo cambiare gli estremi degli integrali e scrivere* $\int_0^{2\pi}$ *o* $\int_{-\pi}^{\pi}$ *invece di* $\int_0^{\pi}$, *ma in ciascuno di questi due casi bisogna scrivere al primo membro* [della (1.15)] $\pi\,\varphi(x)$ *invece di* $\frac{\pi}{2}\,\varphi(x)$. »
>
> Capitolo III, pp. 253

E ancora:

> « *La funzione* $\varphi(x)$, *sviluppata in coseni di archi multipli, è rappresentata da una linea formata da due archi uguali posizionati simmetricamente su entrambi i lati dell'asse* y, *nell'intervallo da* $-\pi$ *a* π *(vedi fig. 11)* [vedi Figura 10]; *questa condizione è espressa come* $\varphi(x) = \varphi(-x)$. *La linea che rappresenta la funzione* $\psi(x)$ *è invece formata da due archi opposti nello stesso intervallo, che è espresso dall'equazione* $\psi(x) = -\psi(-x)$. »
>
> Capitolo III, pp. 253-254

A questo punto Fourier dice che « *una funzione qualunque* $F(x)$ *rappresentata da una linea tracciata arbitrariamente nell'intervallo da* $-\pi$ *a* π *può essere sempre composta da due funzioni come* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ », vale a dire che, facendo sempre riferimento alla Figura 10, $F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, dove φ può essere sviluppata in serie di coseni

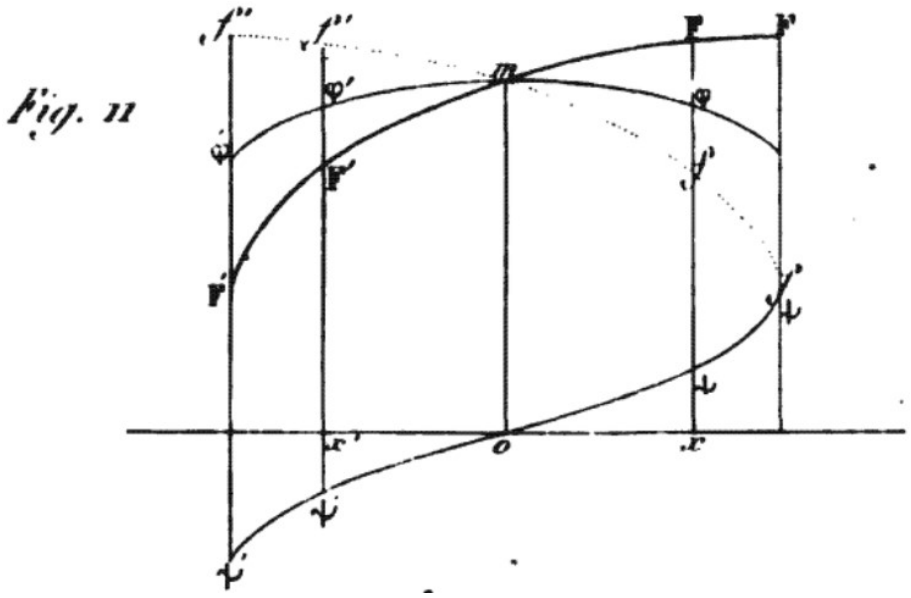


Fig. 10: *Figura 11, Tavola II*

di archi multipli mentre ψ in seni di archi multipli. Ma allora, sommando membro a membro (1.15) con (1.16) e prendendo come estremo di integrazione $[-\pi, \pi]$, si ottiene

$$\begin{aligned}\pi \cdot F(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx + \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\cos(ix)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(ix)\,dx + \sin(ix)\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin(ix)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx + \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\cos(ix)\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos(ix)\,dx + \sin(ix)\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(ix)\,dx\right)\end{aligned}$$

che è la **serie di Fourier completa** per la funzione F, dove la seconda uguaglianza è conseguenza della prossima

Proposizione 1.3.

Mantenendo le precedenti notazioni, per ogni $i \geq 0$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(ix)\;dx = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(ix)\;dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(ix)\;dx = \int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin(ix)\;dx$$

✍ **Dimostrazione** *Capitolo III, pp. 255-256*

« Va ora notato che nell'integrale $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos x\,dx$ si potrebbe, senza cambiarne il valore, sostituire $\varphi(x)+\psi(x)$ al posto di $\varphi(x)$: siccome la funzione $\cos x$ è composta, a destra e a sinistra dell'asse delle x, da due parti simili e la funzione $\psi(x)$ è al contrario formata da due parti opposte, l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos x\,dx$ è nullo.

Sarebbe lo stesso se mettessimo $\cos(2x)$ *oppure* $\cos(3x)$ *e in generale* $\cos(ix)$ *al posto di* $\cos x$*, essendo* i *uno dei numeri interi da* 0 *fino all'infinito. Così l'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos(ix)\, dx$ *è uguale all'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) + \psi(x)) \cos(ix)\, dx$,[2] *ovvero* $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(ix)\, dx$*. Si riconoscerà anche che l'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin(ix)\, dx$ *è uguale all'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(ix)\, dx$ *perché l'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ix)\, dx$ *è nullo.* »

A completamento della trattazione, Fourier ricava anche l'espansione nel caso di una funzione f definita in un generico intervallo $[-r, r]$.

$$rfx = \frac{1}{2}\int_{-r}^{+r} fx\, dx \quad \begin{matrix} + \cos.\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx \cos.\left(\frac{\pi x}{r}\right) dx + \cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)\int fx \cos.\left(2\pi\frac{x}{r}\right) dx + \text{etc.} \\ + \sin.\left(\pi\frac{x}{r}\right)\int fx \sin.\left(\frac{\pi x}{r}\right) dx + \sin.\left(2\pi\frac{x}{r}\right)\int fx \sin.\left(2\pi\frac{x}{r}\right) dx + \text{etc.} \end{matrix} \quad \text{(P)}$$

toutes les intégrales doivent être prises comme la première, de $x = -r$ à $x = +r$. Si l'on fait la même substitution dans

Fig. 11: *Capitolo III, p. 257*

1.1.5 La convergenza delle serie di Fourier

Abbiamo visto che secondo Fourier il grafico in Figura 7 rappresenta una funzione. Oggigiorno diremmo chiaramente che ciò non è vero, a meno che non si considerino i segmenti verticali in corrispondenza dei punti di discontinuità $\pm(2k-1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{N}$, pezzi che invece Fourier considera esplicitamente come parte della curva. Questo mette in luce il delicato concetto di **continuità** di una funzione che ancora nell'Ottocento vedeva più concezioni da parte dei matematici. Per Fourier il concetto di "funzione continua" è per certi versi una via di mezzo tra l'accezione classica di Leibniz, riassumibile nel suo *principio di continuità*[3], e una più simile a quella moderna: prendendo la (1.12), egli definisce la y come funzione di x e m, dove quest'ultimo è il numero finito di termini considerati nello sviluppo in serie, e dunque il suo grafico deve essere pensato come il "limite" di una successione di curve continue

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\cos((2m-1)x)$$

[2] Qui Fourier commette un piccolo refuso scrivendo $\psi(x) + \psi(x)$ al posto di $\varphi(x) + \psi(x)$.

[3] «*In ogni supposta transizione, che finisca in un termine qualsiasi, è ammissibile istituire un ragionamento generale in cui può essere incluso anche il termine finale*» .

al crescere indefinitamente di m. In modo simile, nel paragrafo 184, Fourier considera un altro esempio.

> « *Lo stesso vale per la serie*
>
> $$\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \text{ecc.} \qquad (1.17)$$
>
> *Questa serie infinita, che è sempre convergente, dà il valore* $\frac{1}{2}x$ *ogni volta che l'arco* x *è maggiore di* 0 *e minore di* π. *Ma non equivale più a* $\frac{1}{2}x$ *se l'arco supera* π; *al contrario ha valori molto diversi da* $\frac{1}{2}x$, *perché è evidente che nell'intervallo da* $x = \pi$ *a* $x = 2\pi$, *la funzione riprende con segno opposto tutti i valori che aveva avuto nell'intervallo precedente, da* $x = 0$ *a* $x = \pi$. *Questa serie è conosciuta da tempo* [da Eulero], *ma l'analisi che ha permesso di scoprirla non indica perché il risultato smetta di valere quando la variabile è maggiore.*
> *Dunque bisogna esaminare attentamente il metodo che abbiamo appena usato e cercare lì l'origine di questa limitazione, a cui le serie trigonometriche sono soggette.* »
>
> Capitolo III, p. 184

Anche qui Fourier descrive solamente il grafico di (1.17) senza rappresentarlo.

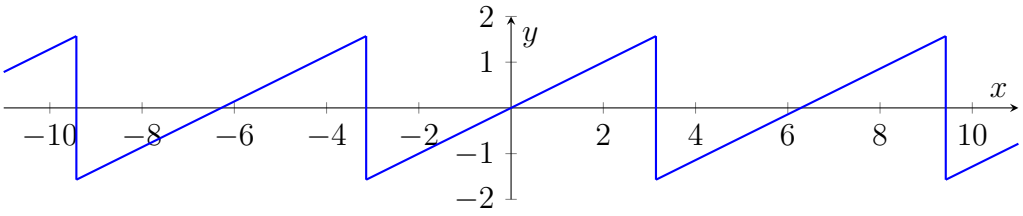


Fig. 12: *Grafico secondo Fourier della funzione (1.17)*

Questo passo fu fonte di una critica da parte di Lagrange, come sostiene **[9, p. 172]**. In risposta al matematico italiano, Fourier gli mandò privatamente una nota di una pagina in cui scrisse che dalla convergenza della serie (1.17) seguiva anche quella di

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots, \qquad (1.18)$$

ottenuta sostituendo $\pi - x$ al posto di x. Il suo scopo principale era quello di smentire l'affermazione di Lagrange secondo cui differenziando la (1.18), trovando cioè

$$-\frac{1}{2} = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cdots,$$

e integrandola, ovvero

$$C - \frac{1}{2}x = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots,$$

si otteneva ponendo $x = 0$ che $C = 0$, vale a dire la relazione

$$-\frac{1}{2}x = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots$$

che contraddice la (1.18). Fourier fece dunque notare a Lagrange che $x = 0$ non era un valore tale da rendere valida la (1.18), come si verifica immediatamente con una facile sostituzione. Si vede quindi che Lagrange ebbe difficoltà a comprendere la rappresentabilità di una funzione mediante una serie, così come la questione della **convergenza**: questo fatto è un indizio della profondità della sua opposizione alle idee di Fourier. L'approccio di Fourier alla trattazione delle serie infinite è dunque il seguente **[1, p. 70]**: non avendo a disposizione alcun criterio sufficiente a garantire la convergenza di una serie, calcola direttamente la somma dei primi m termini, sfruttando artefici di trigonometria elementare o le tecniche del calcolo infinitesimale, e poi effettua il limite per $m \to +\infty$. Ciò che ancora differenzia l'approccio di Fourier da quelli standard da Cauchy in poi è la mancanza di criteri di esistenza del limite che definisce la somma della serie: per sapere se una serie converge, Fourier non ha altra via che mostrare concretamente quale ne sia la somma mediante processi di calcolo effettivo. Così sentenzia Fourier **[9, p. 183]**:

> *« Le mie ricerche su questo argomento dimostrano che anche funzioni arbitrarie discontinue possono sempre essere rappresentate da sviluppi in seno o coseno di archi multipli, e che gli integrali contenenti questi sviluppi sono altrettanto generali di quelli contenenti funzioni arbitrarie di archi multipli. Questa è una conclusione che il famoso Eulero ha sempre respinto. »*

Nel nono capitolo della **[7]**, più precisamente dal paragrafo 423, Fourier crede di dimostrare che le somme parziali della serie di Fourier di una funzione f convergono nei punti di continuità di f alla stessa f:

Quant à la proposition exprimée par l'équation (A) (art. 418), il est également facile d'en rendre la vérité sensible par des constructions, et c'est pour ce théorême que nous les avons d'abord employées. Il suffira d'indiquer la marche de la démonstration.

Fig. 13: *Capitolo IX, p. 563*

> *« Per quanto riguarda la proposizione espressa dall'equazione (A) (art. 418), è altrettanto facile rendere la sua verità evidente attraverso costruzioni, ed è proprio per questo teorema che le abbiamo inizialmente utilizzate. Basterà indicare il procedimento della dimostrazione. »*

dove l'«*equazione (A)*» è [7, p. 555]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_a^b f(\alpha) \cos\left(\frac{2i\pi}{X}(x-\alpha)\right) d\alpha \tag{1.19}$$

con $a, b \in [0, X]$. Posto $a = -\frac{X}{2}$ e $b = \frac{X}{2}$, prendendo il secondo membro di (1.19) deduce che esso è uguale a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} f(\alpha) \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2i\pi}{X}(\alpha - x)\right)\right] d\alpha\,,$$

dopodiché, per facilitare i calcoli, Fourier considera $X = 2\pi$ e pone $r := \alpha - x$.

Definizione 1.4.

Definiamo ***senoverso*** *la funzione* $\operatorname{sin vers}\theta := 1 - \cos\theta$.

A questo punto Fourier utilizza l'identità

$$\sum_{i=-j}^{j} \cos(ir) = \cos(jr) + \sin(jr) \cdot \frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}$$

per poi moltiplicare il secondo membro per $f(\alpha)\,d\alpha$, supponendo che j sia infinito, e integrare da $\alpha = -\pi$ fino ad $\alpha = \pi$; di conseguenza considera

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(jr)\,d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(jr)\frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}\,d\alpha\,. \tag{1.20}$$

Ora:

> « *La linea curva, la cui ascissa è* α *e l'ordinata* $\cos(jr)$*, è coniugata con la linea la cui ascissa è* α *e l'ordinata* $f(\alpha)$*, cioè le ordinate corrispondenti vengono moltiplicate tra loro, è evidente che l'area della curva prodotta, presa tra limiti qualsiasi, diventa nulla quando il numero* j *cresce senza limite. Così il primo termine* $\cos(jr)$ *dà un risultato nullo.* »
>
> Capitolo IX, p. 564

In altre parole, l'oscillazione del termine $\cos(j(\alpha - x))$ fa tendere a 0 il primo integrale della (1.20) per $j \to +\infty$. Proseguendo, Fourier afferma che le stesse argomentazioni sarebbero valide anche per il termine $\sin(jr)$ se non fosse moltiplicato per il fattore $\frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}$, ma «*confrontando le tre curve che hanno come ascissa comune* α*, e come ordinate* $\sin(jr)$*,* $\frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}$ *e* $f(\alpha)$*, si riconosce ovviamente che l'integrale* $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(jr)\frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}\,d\alpha$ *ha valori residuali solo per alcuni intervalli infinitamente piccoli; cioè, quando l'ordinata* $\frac{\sin r}{\operatorname{sin vers} r}$ *diventa infinita. Questo avverrà se* r*, ovvero* $\alpha - x$*,*

è nullo; e in quell'intervallo dove α *differisce infinitamente poco da* x*, il valore di* $f(\alpha)$ *si confonde con* $f(x)$». In conclusione, sostituendo il tutto nel secondo membro della (1.19) e usando qualche notazione più moderna, ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(i(x-\alpha))\,d\alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(jr)\,\frac{\sin r}{\operatorname{sin\,vers} r}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} f(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin(jr)\,\frac{r}{\frac{1}{2}r^2}\,dr\,, \quad 0<\varepsilon\ll 1 \\
&= \frac{1}{\pi} f(x)\int_{0}^{\varepsilon}\frac{2\sin(jr)}{r}\,dr \\
&= \frac{2}{\pi} f(x)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo applicato il cambio di variabile $u = jr$ con $j \to +\infty$, mentre l'ultima segue dalla **[7, pp. 442-443]**

Proposizione 1.5.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\,.$$

Questo secondo Fourier concluderebbe la "dimostrazione", anche se in generale il risultato è falso. Tuttavia, come vedremo nella prossima sezione, l'idea è particolarmente rilevante per gli sviluppi successivi.

1.2 Le reazioni dei matematici

Abbiamo appena visto quanto la presunta dimostrazione di Fourier sulla convergenza della serie di Fourier di una generica funzione periodica alla funzione stessa sia molto dubbia. Anche due matematici contemporanei trovarono la sua dimostrazione poco fondata, **Siméon-Denis Poisson** (1781-1840) e **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857), rivali tra loro e con Fourier **[8, p. 55]**. Tuttavia anche questi ultimi portarono come argomento delle dimostrazioni sbagliate. La vera svolta sulle serie trigonometriche si avrà con il rigore di **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) e, successivamente, con **Bernhard Riemann** (1826-1866).



(A) (B) (C)

FIG. 14: *(A) Siméon Poisson (1781-1840)*
(B) Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
(C) Lejeune Dirichlet (1805-1859)

1.2.1 Siméon-Denis Poisson e Augustin-Louis Cauchy

In [14] Poisson cerca di colmare le lacune avute da Fourier utilizzando metodi integrali che anticipano tecniche ben note al giorno d'oggi. Partendo dalla relazione

$$\frac{1-p^2}{1-2p\cos\alpha+p^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \cos(n\alpha)\ , \quad \text{con } |p|<1, \tag{1.21}$$

chiama f la funzione che si vuole esprimere mediante una serie di quantità periodiche nell'intervallo $[-\ell,\ell]$, con $\ell>0$; dopodiché nella (1.21) pone $\alpha=\frac{\pi(x-x')}{\ell}$, moltiplica ambo i membri per $\frac{dx'}{2\ell}\,f(x')$ e integra in $[-\ell,\ell]$ rispetto a x', ottenendo così

$$\begin{aligned}&\int_{-\ell}^{\ell} \frac{(1-p^2)\ f(x')\,dx'}{2\ell\left(1-2p\cos\left(\frac{\pi(x-x')}{\ell}\right)+p^2\right)}\\ &\quad=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x')\,dx' + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi(x-x')}{\ell}\right) f(x')\,dx'\,.\end{aligned} \tag{1.22}$$

A questo punto, se g indica una quantità positiva e infinitamente piccola, si può prendere $p=1-g$ e di conseguenza il primo membro della (1.22) sarà uguale a $f(x)$.[4] Inoltre, per tutti i valori finiti di n si avrà $p^n=(1-g)^n=1$; invece per

[4] «*Per mostrare che nel caso di $p=1-g$, l'integrale che forma il primo membro dell'equazione [...] è uguale a $f(x)$, finché la quantità x è compresa tra $-\ell$ e ℓ, osserviamo che il coefficiente di dx' sotto il segno $\int$ diventerà infinitamente piccolo insieme a g, tranne per i valori di x' che rendono il suo denominatore infinitamente piccolo, cioè per: i valori di x' che rendono $\cos\left(\frac{\pi(x-x')}{\ell}\right)$ infinitamente vicino all'unità; ma la variabile x' essendo compresa come x tra $-\ell$ e ℓ, questi valori di x' si riducono*

$n \to +\infty$, il termine p^n differisce dall'unità, ma, integrando per parti, l'integrale che moltiplica p^n sotto il segno di sommatoria svanisce. In conclusione possiamo sostituire p^n con l'unità in tutti i termini della sommatoria e di conseguenza avremo

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x')\,dx' + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\left(\frac{n\pi(x-x')}{\ell}\right) f(x')\,dx'\,.$$

che ridà esattamente lo sviluppo in serie di Fourier visto in precedenza, ponendo $\ell = \pi$ e usando la relazione $\cos(n(x-x')) = \cos(nx)\cos(nx') + \sin(nx)\sin(nx')$.

Facciamo qualche considerazione sulla incorrettezza del procedimento di Poisson. Oltre all'implicito scambio tra gli operatori di sommatoria e di integrale nella (1.22), il passaggio al limite per $p \to 1$ è possibile per il Teorema di Abel (vedi Teorema 1.6) solamente se supponiamo che la serie

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\left(\frac{n\pi(x-x')}{\ell}\right) f(x')\,dx' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\int_{-\ell}^{\ell}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x'\right) f(x')\,dx' + \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\int_{-\ell}^{\ell}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x'\right) f(x')\,dx'\right]\end{aligned}$$

sia convergente, ma ciò equivarrebbe ad assumere che la serie di Fourier di f sia convergente, che è esattamente quello che si voleva dimostrare!

Teorema 1.6. (Teorema di Abel – 1826)

Supponiamo che la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *sia convergente. Allora, posto*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,,$$

avremo che F *è definita per* $x \in (-1,1)$ *e inoltre*

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,.$$

---

a quelli che differiscono infinitamente poco da x, in più o in meno; quindi se poniamo $x' = x + z$, bisognerà considerare questa nuova variabile z come infinitamente piccola, così come la costante g; il che ridurrà il denominatore del coefficiente di dx' a $g^2 + \frac{\pi^2 z^2}{\ell^2}$; e l'integrale in questione a

$$f(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{g\ell\,dz}{g^2\ell^2 + \pi^2 z^2}\,, \quad 0 < \varepsilon \ll 1\,.$$

Ora, questo integrale relativo a z è infinitamente piccolo a causa di g, per qualsiasi valore di z che non lo sia, ne consegue che si può, senza paura di errore, estenderla ora da $z = -\infty$ a $z = +\infty$; il che darà l'unità per il suo valore, e $f(x)$ per il valore che si voleva ottenere.» .

✍ **Dimostrazione**

Poniamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Allora

$$a_n = \begin{cases} S_0 & \text{se } n = 0 \\ S_n - S_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= S_0 + \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1})\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n + S_N x^N\,, \quad |x| < 1\,, \end{aligned} \tag{1.23}$$

ma allora passando al limite per $N \to +\infty$ nella (1.23) avremo

$$F(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\,, \quad |x| < 1\,. \tag{1.24}$$

Osserviamo che, se $|x| < 1$, abbiamo $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, da cui segue

$$S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S x^n\,. \tag{1.25}$$

Dunque, considerando (1.24) e (1.25), per ogni $x \in (0,1)$ si ha

$$|F(x) - S| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S)\, x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} |S_n - S|\, x^n\,. \tag{1.26}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario; poiché $S_n \to S$ per $n \to +\infty$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|S_n - S| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Di conseguenza, riprendendo la (1.26), risulta

$$\begin{aligned} |F(x) - S| &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S|\, x^n + (1-x) \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} |S_n - S|\, x^n \\ &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S| + (1-x) \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} \varepsilon x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S| + (1-x)\, \varepsilon \cdot \frac{x^{\bar{n}+1}}{1-x} \\ &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S| + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ma allora è sufficiente prendere

$$x > 1 - \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S|}$$

in modo che sia $(1-x) \sum_{n=0}^{\bar{n}} |S_n - S| < \varepsilon$, da cui $|F(x) - S| < 2\varepsilon$, cioè la tesi. □

Ciò nonostante, Poisson non dubitò mai della correttezza della sua dimostrazione e, per tale ragione, fu aspramente criticato, soprattutto da Cauchy, seppur in maniera indiretta, come riportato nelle prime righe di [3, p. 12]:

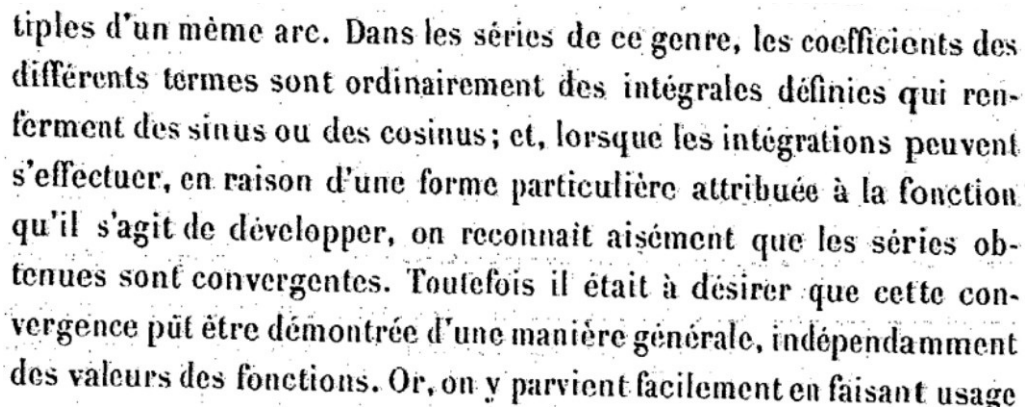

tiples d'un même arc. Dans les séries de ce genre, les coefficients des différents termes sont ordinairement des intégrales définies qui renferment des sinus ou des cosinus; et, lorsque les intégrations peuvent s'effectuer, en raison d'une forme particulière attribuée à la fonction qu'il s'agit de développer, on reconnait aisément que les séries obtenues sont convergentes. Toutefois il était à désirer que cette convergence pût être démontrée d'une manière générale, indépendamment des valeurs des fonctions. Or, on y parvient facilement en faisant usage

FIG. 15: *Critica di Cauchy*

> « *[...] In serie di questo tipo* [periodiche], *i coefficienti dei diversi termini sono solitamente integrali definiti che contengono dei seni o dei coseni; e, quando si possono effettuare integrazioni, a causa di una particolare forma attribuita alla funzione da sviluppare, è facile riconoscere che le serie ottenute sono convergenti.* ***Tuttavia, era desiderabile che questa convergenza potesse essere dimostrata in modo generale, indipendentemente dai valori delle funzioni.*** *[...]* »

A questo punto anche Cauchy cerca di verificare che una funzione arbitraria può essere sviluppata nella propria serie di Fourier e che tale serie converge alla funzione stessa. Il suo ragionamento consiste nell'operare, con opportune trasformazioni, sul termine generico v_n della serie

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(\int_0^a f(\mu)\, d\mu + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^a f(\mu)\cos\left(\frac{2n\pi(x-\mu)}{a}\right) d\mu\right)$$

di cui «*importa di mostrarne la convergenza*» su $[0, a]$ e mostrare che per $n \to +\infty$ esso si riduce a

$$w_n = -\frac{1}{2\pi n}\left(f(a) - f(0)\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right). \tag{1.27}$$

A tal punto Cauchy scrive «*Ora, è chiaro che la serie che ha per termine generale l'espressione [... (1.27)] sarà una serie convergente*» [3, p. 16] e di conseguenza sarà convergente anche la serie $\sum_n v_n$ data, il che completerebbe la dimostrazione.

In altre parole, Cauchy non cerca di dare una dimostrazione diretta della convergenza della serie di Fourier, ma "scarica" la convergenza su quella di una serie che risulta più facile da studiare, attraverso un "criterio di convergenza":

se la serie $\sum_n w_n$ *è convergente e* $w_n \to v_n$ *per* $n \to +\infty$*, allora anche la serie* $\sum_n v_n$ *è convergente.*

Quest'affermazione sarà facilmente smentita da Dirichlet tramite un controesempio, come avremo modo di vedere a breve.

1.2.2 Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Lejeune Dirichlet fu uno dei più importanti matematici del XIX secolo e dedicò gran parte della sua vita all'insegnamento universitario [16]. Dopo un breve periodo all'Università di Breslau (1827), insegnò per molti anni all'Università di Berlino, dove formò numerosi giovani matematici grazie alla chiarezza delle sue lezioni. Nel 1855 succedette a Gauss all'Università di Göttingen, continuando la sua attività di docente e ricercatore fino alla morte nel 1859, dove incontra nuovamente due studenti dei tempi di Berlino [8, p. 57]: Richard Dedekind (1831-1916) e Bernhard Riemann (1826-1866).

Nonostante il suo interesse principale per la teoria dei numeri, Dirichlet lavorò anche in altri ambiti e uno dei suoi lavori più importanti in tal senso è sicuramente l'opera [6], risalente al 1829, sulla convergenza delle serie di Fourier. Per prima cosa, Dirichlet espone «*le obiezioni a cui [...] è soggetta la dimostrazione [... di] Cauchy*». L'argomento centrale di Dirichlet contro la dimostrazione di Cauchy è che se una serie ha come termine generale $A\frac{\sin(nx)}{n}$, che per Dirichlet rappresenta il termine w_n in (1.27), ed è convergente, allora non è detto che sia convergente anche la serie $\sum_n v_n$ per cui il rapporto tra i due termini dello stesso indice delle due serie differisca di poco quanto si vuole dall'unità, allorché si considerino infici opportunamente grandi; il controesempio proposto da Dirichlet è il seguente: la serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ è convergente, al contrario di $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ che diverge, nonostante il rapporto tra i due termini generali è $1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ che tende a 1 per $n \to +\infty$.

Successivamente procede con la sua dimostrazione. Dati $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$ e f funzione continua in $[0, h]$, nel senso di «*una funzione che ha un valore finito e determinato per ogni valore di* β *compreso tra* 0 *e* h*, e inoltre tale che la differenza* $f(\beta+\varepsilon) - f(\beta)$ *diminuisce senza limite quando* ε *diventa sempre più piccolo*», se si suppone che la funzione f sia positiva e decrescente in $[0, h]$, allora ci si chiede quando l'integrale[5]

$$\int_0^h \frac{\sin(i\beta)}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta\,, \quad i > 0\,,$$

[5] Al posto del differenziale $d\beta$, Dirichlet utilizza $\partial\beta$.

sia convergente per $i \to +\infty$. Dirichlet prende i punti di suddivisione

$$0 < \frac{\pi}{i} < \frac{2\pi}{i} < \cdots < \frac{(r-1)\,\pi}{i} < \frac{r\pi}{i} < h$$

e considera gli $r+1$ integrali tra due punti consecutivi, notando che essi hanno segno alterno e valore assoluto decrescente. In particolare ottiene che il ν-esimo integrale, con $\nu = 1, 2, \ldots, r$, è dato da

$$\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta)}{\sin\beta}\, f(\beta)\, d\beta = (-1)^{\nu-1}\, \rho_\nu\, K_\nu\,,$$

dove ρ_ν è un numero opportuno con

$$f\left(\frac{(\nu-1)\,\pi}{i}\right) \leq \rho_\nu \leq f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$$

mentre

$$K_\nu := \left|\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta)}{\sin\beta}\, d\beta\right| = \left|\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{i\sin\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\, d\gamma\right| \xrightarrow{i\to+\infty} \left|\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\, d\gamma\right| =: k_\nu\,,$$

con la serie $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \cdots$ che converge e che ha somma $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{\gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2}$. Osserviamo che, quando $i \to +\infty$, avremo banalmente che anche $r \to +\infty$; essendo interessato al limite di $\sum_\nu (-1)^{\nu-1}\, \rho_\nu K_\nu$, una volta fissato un errore ω piccolo a piacere e preso un intero m pari (per semplicità), Dirichlet considera i primi m termini $K_1\rho_1, -K_2\rho_2, \ldots, -K_m\rho_m$, con somma che converge a $(k_1 - k_2 + \cdots - k_m)\; f(0)$ che a sua volta differisce per meno di ω da $\frac{\pi}{2}$ se i e m sono stati presi sufficientemente grandi, mentre la somma degli altri termini $K_{m+1}\rho_{m+1}, -K_{m+2}\rho_{m+2}, \ldots$ è minore di $K_{m+1}\rho_{m+1}$ che a sua volta differisce per meno di ω da $k_{m+1} f(0)$, ovvero da 0 per ν grande. Pertanto, se f è continua, positiva e monotona decrescente in $[0, h] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, allora

$$\int_0^h \frac{\sin(i\beta)}{\sin\beta}\, f(\beta)\; d\beta \xrightarrow{i\to+\infty} \frac{\pi}{2}\, f(0)\;. \tag{1.28}$$

Una volta osservato che la (1.28) vale anche nel caso in cui f è crescente, Dirichlet riprende la "dimostrazione" di Fourier: scrive innanzitutto la somma parziale s_n della serie di Fourier di una funzione φ definita tra $-\pi$ e π come

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi \varphi(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}\left(\cos(rx)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\cos(r\alpha)\, d\alpha \right.\\ &\qquad\qquad \left. + \sin(rx)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\sin(r\alpha)\, d\alpha\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_\pi^\pi \varphi(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n}\cos(r(\alpha - x))\right) d\alpha\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)}\, d\alpha \end{aligned} \tag{1.29}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la seguente catena di uguaglianze con $\theta = \alpha - x$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \cos(r\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\imath r\theta} + e^{-\imath r\theta}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{r=-n}^{n} e^{\imath r\theta} = \frac{1}{2} e^{-\imath n\theta} \cdot \frac{1 - e^{\imath(2n+1)\theta}}{1 - e^{\imath\theta}}$$
$$= \frac{1}{2} e^{-\imath n\theta} \cdot \frac{-2\imath e^{\imath\frac{(2n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{-2\imath e^{\imath\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

dato che, per l'identità di Eulero, abbiamo

$$1 - e^{\imath t} = e^{\imath\frac{t}{2}} \left(e^{-\imath\frac{t}{2}} - e^{\imath\frac{t}{2}}\right) = -2e^{\imath\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ora, per la linearità possiamo spezzare l'ultimo integrale della (1.29) in due integrali, il primo su $[-\pi, x]$ e il secondo su $[x, \pi]$, ai quali applichiamo i cambi di variabile $\alpha = x - 2\beta$ e $\alpha = x + 2\beta$ rispettivamente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)} d\alpha$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin\beta} \varphi(x - 2\beta)\, d\beta + \int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin\beta} \varphi(x + 2\beta)\, d\beta.$$

A questo punto, detta $\varepsilon > 0$ una quantità infinitamente piccola, Dirichlet mostra che per $n \to +\infty$ si ha

$$\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin\beta} \varphi(x + 2\beta)\, d\beta \quad \begin{cases} = 0 & \text{se } x = \pi \\ \to \frac{\pi}{2}\left(\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)\right) & \text{se } x = -\pi \\ \to \frac{\pi}{2}\varphi(x + \varepsilon) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e analogamente

$$\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin\beta} \varphi(x - 2\beta)\, d\beta \quad \begin{cases} = 0 & \text{se } x = -\pi \\ \to \frac{\pi}{2}\left(\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)\right) & \text{se } x = \pi \\ \to \frac{\pi}{2}\varphi(x - \varepsilon) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si arriva dunque al seguente: **[6, pp. 168-169]**

Teorema 1.7. (Teorema di Dirichlet – 1829)

Sia φ una funzione in $[-\pi, \pi]$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(D1) *φ è continua tranne al più per un numero finito di discontinuità dove esistono il limite sinistro $\varphi(x - 0)$ e quello destro $\varphi(x + 0)$;*

(D2) *φ ha un numero finito di massimi e minimi.*

Allora la sua serie di Fourier converge a $\frac{1}{2}(\varphi(x-0)+\varphi(x+0))$ *in* $[-\pi,\pi]$. *In particolare, se* φ *è continua in* $[-\pi,\pi]$, *allora la sua serie di Fourier converge a* φ *in* $(-\pi,\pi)$.

A questo punto Dirichlet conclude analizzando i casi in cui le ipotesi **(D1)** e **(D2)** non siano soddisfatte; tali casi singolari possono essere ricondotti a quelli che sono stati considerati in precedenza, a patto che, nell'eventualità di infiniti punti di discontinuità, valga la seguente condizione: **[6, p. 169]**

> « *È necessario che la funzione* $\varphi(x)$ *sia tale che, se indichiamo con* a *e* b *due quantità qualunque comprese tra* $-\pi$ *e* π, *possiamo sempre collocare tra* a *e* b *altre quantità* r *e* s *sufficientemente vicine da far sì che la funzione rimanga continua nell'intervallo da* r *a* s. »

D'altronde, senza tale richiesta, l'integrale non avrebbe senso secondo la definizione di Cauchy[6] adottata da Dirichlet: **[6, p. 169]**

> « *La necessità di questa restrizione risulterà evidente considerando che i diversi termini della serie sono integrali definiti e richiamando il concetto fondamentale di integrale.* »

Nel dare un esempio di funzione che non soddisfa la precedente condizione, Dirichlet definisce per la prima volta la cosiddetta **funzione di Dirichlet**: **[6, p. 169]**

$$\varphi(x)=\begin{cases} c\,, & x\in\mathbb{Q} \\ d\,, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

---

[6] Vediamo la definizione moderna di integrabilità secondo Cauchy.
Data una funzione $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, si considerino una suddivisione $D=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n\}$ dell'intervallo $[a,b]$, con $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, e un insieme di punti $D'=\{z_1,\dots,z_n\}$ compatibile con D, cioè tale che $z_i\in[x_{i-1},x_i]$ per $i=1,\dots,n$. Definiamo **somma di Cauchy** di f associata a D e D' il numero reale

$$S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(z_i)\,.$$

Detto $\|D\|=\min_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})$ il parametro di finezza della suddivisione D, diremo che $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ è **integrabile secondo Cauchy** se esiste $I\in\mathbb{R}$ che verifica la seguente condizione:

per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che, per ogni suddivisione D di $[a,b]$ con $\|D\|<\delta$ e per ogni scelta di D' compatibile con D, la corrispondente somma di Cauchy S di f verifichi $|S-I|<\varepsilon$.

Se $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile secondo Cauchy, allora il numero I, unico, è detto **integrale di Cauchy** di f.

satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je

Fig. 16: *Prima definizione della funzione di Dirichlet*

> *« [...] Avremo un esempio di funzione che non soddisfa questa condizione se supponessimo che $\varphi(x)$ sia uguale a una costante definita c quando la variabile x assume un valore razionale e uguale a un'altra costante d quando questa variabile è irrazionale. La funzione così definita ha valori finiti e determinati per ogni valore di x, tuttavia non può essere sostituita nella serie, poiché i diversi integrali che la compongono perderebbero ogni significato in questo caso. [...] »*

Dirichlet sembra dunque sostenere che una funzione continua, anche qualora presenti un numero infinito di massimi e minimi, possa comunque essere rappresentata mediante una serie di Fourier convergente. Tale convinzione, tuttavia, si rivelò eccessivamente ottimistica; solo nel 1876, infatti, du Bois-Reymond presentò un controesempio costituito da una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in alcuni punti isolati [1, p. 151], mostrando così i limiti della validità generale che Dirichlet sembrava attribuire al proprio teorema. Comunque, Dirichlet stesso si rendeva conto che la trattazione dei casi esclusi dalle sue condizioni di convergenza richiedeva delicatissime questioni di analisi, tra cui la continuità e l'integrabilità di una funzione, e a tal proposito chiudeva così la sua opera: [6, p. 169]



Fig. 17: *Paul du Bois-Reymond (1831-1889)*

> *« Ma per fare ciò con tutta la chiarezza che si potrebbe desiderare sono necessari alcuni dettagli relativi ai principi fondamentali dell'analisi infinitesimale, che saranno spiegati in un'altra nota, [...] »*

Ciò nonostante, questa nota non verrà mai pubblicata anche se Dirichlet pubblicherà, nel 1837, un secondo articolo sull'argomento che non rappresenta tuttavia un sostanziale passo in avanti rispetto al contenuto della memoria precedente. Con i lavori di Dirichlet si conclude dunque una prima fase della storia delle serie trigonometriche, caratterizzata dalla progressiva chiarificazione dei fondamenti analitici del problema; sarà soltanto alcuni decenni più tardi che il tema verrà ripreso da Bernhard Riemann nella sua *Habilitationsschrift*[7], la cui analisi costituirà l'oggetto principale del prossimo capitolo.

[7] Nel percorso post-dottorale del sistema accademico tedesco indica una tesi con la cui discussione si conclude l'abilitazione (*Habilitation*) necessaria per l'accesso all'insegnamento nelle università tedesche.

Capitolo 2

Riemann e la memoria del 1854

Georg Friedrich Bernhard Riemann nacque il 17 settembre 1826 a Breselenz, nel Regno di Hannover, in una famiglia di umili origini. Suo padre era un pastore luterano e fu il primo a istruirlo; fin da bambino mostrò uno straordinario talento per la matematica, unito però a un carattere molto timido e riservato. Frequentò il liceo di Hannover e successivamente il Johanneum di Lüneburg, dove approfondì autonomamente testi matematici di notevole difficoltà.



Fig. 18: *Bernhard Riemann (1826-1866)*

Nel 1846 si iscrisse all'Università di Göttingen con l'intenzione di studiare teologia, così da seguire la carriera ecclesiastica. Tuttavia, le lezioni di Gauss lo convinsero a dedicarsi completamente alla matematica. L'anno seguente si trasferì all'Università di Berlino, dove studiò con grandi matematici come Steiner, Jacobi, Dirichlet ed Eisenstein. Nel 1849 tornò a Göttingen e nel 1851 conseguì il dottorato sotto la guida di Gauss con una tesi innovativa sulle funzioni di variabile complessa, introducendo quelle che oggi sono chiamate superfici di Riemann. Successivamente ottenne l'abilitazione all'insegnamento con uno studio sull'integrazione delle serie trigonometriche, da cui, come vedremo meglio tra poco, nacque il celebre integrale di Riemann.

Nel 1854 tenne la famosa conferenza *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*[8], nella quale introdusse una nuova concezione dello spazio. Le sue idee diedero origine alla geometria riemanniana, che molti anni dopo sarebbe

[8] *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria.*

diventata uno dei fondamenti matematici della teoria della relatività generale di Einstein. Nel 1859, dopo la morte di Dirichlet, fu nominato professore di matematica a Göttingen. Nello stesso anno pubblicò il suo unico lavoro sulla teoria dei numeri, nel quale formulò la celebre "Ipotesi di Riemann", uno dei problemi più importanti e ancora irrisolti della matematica.

Fin dalla giovinezza soffrì di una salute fragile e contrasse la tubercolosi. Cercò più volte di curarsi trascorrendo lunghi periodi in Italia, sperando che il clima più mite favorisse la guarigione. Tuttavia morì il 20 luglio 1866 a Selasca, sul Lago Maggiore, all'età di soli 39 anni. Nonostante la sua breve vita, Bernhard Riemann è considerato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Le sue idee hanno rivoluzionato la geometria, l'analisi e la teoria dei numeri, influenzando profondamente sia la matematica sia la fisica moderna.

2.1 Le motivazioni della memoria

La memoria *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* [15], in italiano "Sulla rappresentabilità di una funzione tramite una serie trigonometrica", non nasce con l'intento di fornire un nuovo criterio di convergenza per le serie di Fourier, né di estendere semplicemente i risultati ottenuti da Dirichlet. Il suo obiettivo è più ambizioso: chiarire quali siano i presupposti teorici che rendono possibile rappresentare una funzione mediante una serie trigonometrica.

Nel primo capitolo abbiamo visto che i risultati ottenuti nei decenni precedenti avevano risolto solamente alcuni aspetti del problema. Le condizioni di Dirichlet garantivano la convergenza della serie per una vasta classe di funzioni, ma non spiegavano quale fosse il legame essenziale tra una funzione arbitraria e la serie trigonometrica a essa associata. Rimanevano aperte numerose questioni, tra cui quali proprietà di una funzione siano realmente necessarie affinché essa sia rappresentabile mediante una serie trigonometrica, quale ruolo svolga l'integrabilità della funzione nella determinazione dei coefficienti di Fourier, e fino a che punto sia possibile indebolire le ipotesi di regolarità senza compromettere la validità della rappresentazione. Riemann affronta questi interrogativi modificando profondamente il punto di vista; invece di partire da una classe di funzioni sufficientemente regolari e studiarne lo sviluppo in serie, egli si concentra sulle proprietà minime richieste dagli strumenti analitici impiegati nella dimostrazione. In particolare, l'attenzione si sposta sull'integrale utilizzato per definire i coefficienti della serie. La definizione di integrale disponibile all'epoca, pur essendo sufficiente nella maggior parte delle applicazioni, non consentiva di trattare in maniera soddisfacente funzioni caratterizzate da

un comportamento fortemente irregolare. Se l'obiettivo era comprendere l'effettiva estensione della teoria delle serie trigonometriche, diventava quindi indispensabile precisare quali funzioni fossero integrabili e in quale senso: da questa esigenza nasce la definizione dell'integrale che oggi porta il nome di Riemann.

La memoria assume quindi un carattere metodologico. Più che produrre nuovi risultati isolati sulla convergenza delle serie, Riemann riorganizza le basi teoriche dell'intera disciplina, mostrando come lo studio delle serie trigonometriche richieda una riflessione preliminare sulla nozione di funzione, sull'integrabilità e sui limiti dei metodi analitici allora disponibili. In questo senso, l'opera costituisce uno dei momenti nei quali l'analisi del XIX secolo si orienta progressivamente verso una fondazione più rigorosa dei propri concetti fondamentali. Tutto ciò è riassumibile in una nota a piè di pagina scritta da Richard Dedekind in **[15, p. 87]**:

> « *Questo trattato fu presentato dall'autore alla Facoltà di Filosofia dell'Università di Göttingen nel 1854 per la sua abilitazione. Sebbene l'autore apparentemente non intendesse pubblicarlo, la presente edizione, nella sua forma del tutto inalterata, è comunque* ***ampiamente giustificata sia dal grande interesse dell'argomento stesso, sia dalla trattazione dei principi più importanti dell'analisi infinitesimale in esso esposti****.* »



Fig. 19: *Richard Dedekind (1831-1916)*

Passiamo ora all'analisi della tesi di abilitazione di Riemann. L'autore apre il suo elaborato illustrandone la struttura (vedi Figura 20, **[15, p. 87]**), per poi introdurre il contesto storico e le questioni che hanno condotto alla formulazione del problema oggetto del suo studio. Questa parte, tuttavia, non sarà oggetto della nostra analisi, poiché riprende sostanzialmente gli argomenti già trattati nei capitoli precedenti, fatta eccezione per il problema della corda vibrante.

> « *Il seguente saggio sulle serie trigonometriche si compone di due parti sostanzialmente distinte. La prima parte contiene una storia delle ricerche e delle prospettive sulle funzioni arbitrarie (definite graficamente) e sulla loro rappresentabilità mediante serie trigonometriche. Nella stesura di questa sezione, ho potuto avvalermi di alcuni spunti del celebre matematico a cui si deve il primo lavoro esaustivo su questo argomento* [Dirichlet]. *Nella seconda parte, presento un'indagine sulla rappresentabilità di una funzione mediante*

una serie trigonometrica, che include anche casi rimasti irrisolti fino ad ora. ***È stato necessario premettere a questa parte un breve saggio sul concetto di integrale definito e sul suo ambito di validità.*** »

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkührlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. Im zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

Fig. 20: *Incipit della* Habilitationsschrift *di Riemann*

2.2 *Sul concetto di integrale definito*

A partire dal quarto paragrafo, Riemann fornisce al lettore « *alcune informazioni sul concetto di integrale definito e sul suo ambito di validità* ».

? *Domanda.*

« *Was hat man unter* $\int_a^b f(x)\,dx$ *zu verstehen?* » **[15, p. 102]**

« *Che cosa si intende con* $\int_a^b f(x)\,dx$*?* »

Definizione 2.1.

Data una successione di valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *compresi tra* $x_0 = a$ *e* $x_n = b$*, cioè per cui* $x_{i-1} < x_i$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$*, si ponga* $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *e sia* ε_i *una frazione positiva (minore di 1) per ogni* $i = 1, \ldots, n$*. Allora il valore della somma*

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

dipenderà dalla scelta degli intervalli $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ *e dalle frazioni* $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$*. Se ora essa possiede la proprietà di avvicinarsi a un limite fisso* A *all'infinito, qualsiasi siano* $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ *e* $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ *scelti, non appena tutti gli intervalli diventano*

infinitamente piccoli, allora tale valore si chiama $\int_a^b f(x)\,dx$.

In caso contrario, se non è soddisfatta la precedente proprietà, allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ non è definito, anche se, come fa notare Riemann, in alcuni di questi casi si è cercato di estendere il concetto di integrale definito: **[15, p. 102]**

men. Wenn nämlich die Function $f(x)$ bei Annäherung des Arguments an einen einzelnen Werth c in dem Intervalle (a, b) unendlich gross wird, so kann offenbar die Summe S, welchen Grad von Kleinheit man auch den δ vorschreiben möge, jeden beliebigen Werth erhalten; sie hat also keinen Grenzwerth, und $\int_a^b f(x)\,dx$ würde nach dem Obigen keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann $\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$ sich, wenn α_1 und α_2 unendlich klein werden, einer festen Grenze nähert, so versteht man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ diesen Grenzwerth.

Fig. 21: *Generalizzazione del concetto di integrale definito*

« [...] Se infatti la funzione $f(x)$*, quando l'argomento si avvicina a un singolo valore* c *nell'intervallo* (a, b)*, diventa infinitamente grande, allora è evidente che la somma* S*, qualunque piccolezza si imponga a* δ*, può assumere un valore qualsiasi; quindi non ha un limite, e* $\int_a^b f(x)\,dx$ *secondo quanto detto sopra non avrebbe alcun significato. Ma se invece*

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c-\alpha_2}^b f(x)\,dx\,,$$

quando α_1 *e* α_2 *diventano infinitamente piccoli, si avvicina a un limite definito, allora si intende con* $\int_a^b f(x)\,dx$ *questo limite. »*

Dopodiché Riemann studia l'"ambito di validità" del concetto di integrale definito, vale a dire:

? *Domanda.*

« [...] in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht? » **[15, p. 103]**

« [...] in quali casi una funzione permette un'integrazione e in quali no? »

Si considera innanzitutto la definizione stretta di integrale, quindi si suppone che la somma S converge se le ampiezze $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ degli intervalli tendono tutti a 0. Detta

D_i la più grande fluttuazione della funzione f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, ossia

$$D_i = \max_{y_1, y_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(y_1) - f(y_2)|,$$

la somma

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \tag{2.1}$$

deve tendere a zero quando $\delta_i \to 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sia inoltre $\Delta(d)$ il massimo valore che può raggiungere la somma (2.1) purché tutte le ampiezze $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ siano minori di d; di conseguenza Δ sarà una funzione decrescente nella variabile d e tale che $\Delta(d) \to 0$ per $d \to 0$. Se indichiamo con s la lunghezza totale degli intervalli in cui la fluttuazione è maggiore di σ, allora il loro contributo alla somma (2.1) è maggiore o uguale a σs, cioè $\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \leq \Delta(d)$, da cui

$$s \leq \frac{\Delta(d)}{\sigma}.$$

Ora, se σ è fissato a priori, $\frac{\Delta(d)}{\sigma}$ può essere preso arbitrariamente piccolo per una scelta opportuna della variabile d e lo stesso vale per s. Abbiamo dunque ottenuto il seguente: **[15, pp. 103-104]**

Teorema 2.2. (Condizione necessaria per l'integrabilità)

« Affinché la somma S, quando tutti i δ diventano infinitesimi, converga, oltre alla finitezza della funzione $f(x)$, è necessario anche che la grandezza complessiva degli intervalli in cui le fluttuazioni sono maggiori di σ, qualunque sia σ, possa essere resa arbitrariamente piccola scegliendo convenientemente d. »

Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann.

Fig. 22: *Condizione necessaria per l'integrabilità*

Il precedente risultato ha anche un inverso **[15, p. 104]**. Gli intervalli in cui le fluttuazioni sono maggiori di σ danno un contributo alla somma (2.1) che è minore di s volte la più grande fluttuazione della funzione f tra gli estremi a e b, che è finita se assumiamo f finita, mentre gli altri intervalli danno un contributo minore di $\sigma(b-a)$. A questo punto è possibile scegliere σ piccolo a piacere per poi determinare le ampiezze degli intervalli in modo da rendere s arbitrariamente piccolo, ma allora

anche la somma (2.1) può essere piccola quanto si desidera e di conseguenza il valore di S può essere racchiuso tra due limiti arbitrariamente ristretti.

Teorema 2.3. (Condizione sufficiente per l'integrabilità)

« Se la funzione $f(x)$ è sempre finita, e diminuendo all'infinito tutte le grandezze δ la grandezza totale s degli intervalli nei quali le oscillazioni della funzione $f(x)$ sono maggiori di una grandezza data σ diventa sempre infinitamente piccola alla fine, allora la somma S converge quando tutte le δ diventano infinitamente piccole. »

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ, sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

FIG. 23: *Condizione sufficiente per l'integrabilità*

Per passare poi alla nozione più generale di integrale definito, data nella Definizione 2.1, basta osservare che risulta sempre necessaria la condizione sulle ampiezze $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ degli intervalli affinché una funzione sia integrabile ovunque, mentre al posto della finitezza della funzione è possibile sostituire che « *la funzione diventi infinita* solo *quando l'argomento si avvicina a valori* isolati, *e che si ottenga un certo valore limite quando gli estremi di integrazione si avvicinano infinitamente a tali valori* ».

A questo punto Riemann conclude, con il sesto paragrafo, mostrando che la sua condizione di integrabilità è applicabile anche a funzioni più particolari e che il suo concetto di integrale è molto più comprensibile rispetto a quello di Cauchy. Considera inizialmente il seguente:

Esempio 2.4.

Sia $(\cdot)$ l'estensione 1-periodica della funzione

$$r\colon \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}\,, \qquad r(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = \pm\frac{1}{2} \end{cases},$$

e si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n^2}\,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente e $|(nx)| < \frac{1}{2}$, la funzione f converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ per il:

Teorema 2.5. (*M*-test di Weierstrass)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, *con* $f_n\colon I \to \mathbb{R}$. *Supponiamo che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *esista* $M_n \in \mathbb{R}^+$ *tale che* $|f_n(x)| < M_n$ *per ogni* $x \in I$ *e che la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ *sia convergente. Allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *è uniformemente convergente in* I.

✍ **Dimostrazione**

Ci è sufficiente dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ è uniformemente convergente in I, vale a dire che

$$\forall x \in I \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall m > n > \bar{n} \;\Rightarrow\; \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| < \varepsilon \right). \tag{2.2}$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ è convergente per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m > n > \tilde{n}$ si ha $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$, ma allora

$$\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| < \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon \quad \text{per ogni } m > n > \tilde{n},$$

che è esattamente la (2.2) scegliendo $\bar{n} = \tilde{n}$. □

Tuttavia, presi due interi m e p relativamente primi con p dispari, in corrispondenza di $x = \frac{p}{2m}$ si ha

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2m^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16m^2}$$
$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2m^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16m^2}$$

mentre negli altri casi la funzione f è continua. Pertanto la funzione f è discontinua per ogni valore razionale che, ridotto ai minimi termini, ha denominatore pari. Nonostante f sia discontinua in un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$, il numero di salti con ampiezza maggiore di una quantità fissata è sempre finito, in quanto nei punti $x = \frac{p}{2m}$ l'oscillazione è uguale a $\frac{\pi^2}{8m^2}$, e, quindi, la funzione f è ovunque integrabile.

Riemann nota dunque che anche le funzioni che hanno un numero finito di massimi e minimi in cui non diventano infinite, ovvero che soddisfano la condizione **(D2)** del Teorema di Dirichlet, possiedono sempre le due proprietà di esistenza dei limiti parziali e della finitezza del numero di salti maggiori di un certo valore fissato. Passa poi agli ultimi esempi in cui la funzione integranda diventa infinita in

punti isolati [15, p. 106], provando così a discutere il caso di *integrali generalizzati*, respingendo però altre affermazioni di Cauchy per la loro arbitrarietà [12, p. 184].

Esempio 2.6.

Consideriamo per semplicità una funzione f definita per $x > 0$ positiva e che assume un solo valore infinito in $x = 0$, vale a dire che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Ci chiediamo se $\int_0^a f(x)\,dx$ può avere un valore finito.
Per prima cosa notiamo che, se f non oscilla infinitamente vicino a 0, una condizione necessaria per l'integrabilità di f è che

$$x\,f(x) \to 0 \quad \text{per } x \to 0^+. \tag{2.3}$$

Supponiamo per assurdo che, da un certo punto in poi, $x\,f(x)$ sia sempre maggiore di una costante positiva c, cioè $f(x) > \frac{c}{x}$; ma allora integrando tra x e a, con $0 < x < a$, otteniamo

$$\int_x^a f(t)\,dt > c\int_x^a \frac{dt}{t} = c\,(\log a - \log x) \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty\,.$$

Come primo esempio, Riemann osserva che, se $f(x)\,x^\alpha$ rimane limitata per $x \to 0^+$, con $\alpha < 1$, allora l'integrale converge. Infatti, avremo $f(x) < cx^{-\alpha}$, da cui

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a f(x)\,dx &< c\cdot\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a x^{-\alpha}dx \\ &= c\cdot\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^a = c\cdot\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Da notare tuttavia che la condizione (2.3) risulta necessaria ma non sufficiente per l'integrabilità. Un controesempio è dato infatti dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\log\left(\frac{1}{x}\right)}$$

che soddisfa banalmente la (2.3) ma per cui, supponendo $a < 1$, risulta

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a \frac{dx}{x\log\left(\frac{1}{x}\right)} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\log\left(\frac{1}{a}\right)}^{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\frac{du}{u} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\log|u|\right]_{-\log a}^{-\log\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\left|\frac{\log\varepsilon}{\log a}\right| = +\infty\,.\end{aligned}$$

In realtà questo controesempio, se leggermente modificato, fornisce una famiglia di funzioni che risultano integrabili in $[0, a]$ e questo è il secondo esempio che fornisce Riemann in [15, p. 107].

Esempio 2.7.

È facile verificare che anche le funzioni

$$f(x) \cdot x \log\left(\frac{1}{x}\right) \log^{[2]}\left(\frac{1}{x}\right) \cdots \left(\log^{[n]}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha}$$

per $n \in \mathbb{N}$, dove

$$\log^{[n]}(\cdot) \coloneqq \underbrace{(\log \circ \cdots \circ \log)}_{n \text{ volte}}(\cdot) \,,$$

soddisfano la (2.3) e sono tali per cui l'integrale $\int_0^a f(x)\,dx$ converge per $\alpha > 1$.

A questo punto Riemann specifica che, se la funzione f possiede infiniti massimi e minimi vicino alla singolarità $x = 0$, allora non è più possibile determinare semplicemente « *l'ordine dell'infinito* » di f dal suo valore assoluto. **[15, p. 107]**

Esempio 2.8.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x \cos\left(e^{1/x}\right)\right) = \cos\left(e^{1/x}\right) + \frac{e^{1/x}}{x} \sin\left(e^{1/x}\right) .$$

Restringendosi lungo successioni di punti per cui $\left|\sin\left(e^{1/x}\right)\right| = 1$, per $x \to 0^+$ abbiamo

$$|f(x)| \approx \frac{e^{1/x}}{x}$$

che tende a $+\infty$ più rapidamente di qualsiasi potenza di $1/x$: di conseguenza l'« *l'ordine dell'infinito* » di f in $x = 0$ è infinito, prendendo $1/x$ come unità di misura. Ciò nonostante l'integrale $\int_0^a f(x)\,dx$ converge, infatti

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{d}{dx}\left(x \cos\left(e^{1/x}\right)\right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[x \cos\left(e^{1/x}\right)\right]_\varepsilon^a = a \cos\left(e^{1/a}\right) < +\infty \,.\end{aligned}$$

2.3 La rappresentazione delle funzioni

Una volta definito il concetto di integrale, Riemann prosegue poi con l'argomento centrale del suo elaborato in un modo del tutto particolare: mentre i lavori precedenti – usando le parole dello stesso Riemann – mostravano che se una funzione soddisfa una o più determinate proprietà, allora può essere sviluppata in serie di Fourier, Riemann si occupa del problema inverso:

? *Domanda.*

« Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments? » **[15, p. 108]**

« Se una funzione può essere rappresentata tramite una serie trigonometrica, cosa ne consegue sul suo andamento, sul cambiamento del suo valore al variare continuo dell'argomento? »

A tale scopo consideriamo la serie

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots , \tag{2.4}$$

dove si è posto per brevità

$$A_0 \coloneqq \frac{1}{2} b_0 \quad \text{e} \quad A_k = A_k(x) \coloneqq a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx) .$$

Detto $f(x)$ il valore della serie (2.4), avremo che la funzione f è definita solo nei valori x in cui la serie converge. Poiché condizione necessaria affinché una serie converga è che i termini tendano a zero al crescere dell'indice, abbiamo due possibilità:

(R1) i coefficienti $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ tendono a zero al crescere di n e di conseguenza i termini della serie diventano infinitesimi per qualunque valore di x;

(R2) i termini della serie diventano infinitesimi solo per valori particolari di x.

Riemann parte subito trattando il caso **(R1)** e, sotto tale ipotesi, considera

$$F(x) \coloneqq C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots \tag{2.5}$$

ottenuta dalla (2.4) con una doppia integrazione rispetto a x.

Proposizione 2.9.

La serie (2.5) è convergente. Inoltre, la funzione F è continua e integrabile.

✍ Dimostrazione

Dimostriamo che la serie (2.5) è convergente. Fissato $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$N(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^2} \qquad \text{e} \qquad R(x) = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A_k}{k^2}$$

in modo da avere $F(x) = N(x) + R(x)$. Detto $A := \sup_{m>n}|A_m|$, risulta

$$|R(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|A_k|}{k^2} \leq A \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{A}{n} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostriamo che la funzione F è continua. Poiché $|R(x)| \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $n \in \mathbb{N}$ in modo che

$$|R(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte N è continua perché somma (finita) di funzioni continue, quindi esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x, y con $|x - y| < \delta$ si ha

$$|N(x) - N(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

In conclusione, presi x, y con $|x - y| < \delta$ abbiamo

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |N(x) - N(y)| + |R(x) - R(y)| \\ &\leq |N(x) - N(y)| + |R(x)| + |R(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

2.3.1 Tre risultati preliminari

A questo punto Riemann fornisce alcune proprietà della funzione F, dimostrandole una per una **[15, pp. 110-116]**. Specifichiamo che Riemann intende con Ω la serie (2.4).

Lemma 2.10. (Teorema 1)

« Se la serie Ω converge, allora

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converge allo stesso valore di Ω quando α e β diventano infinitamente piccoli in modo che il loro rapporto rimanga finito. »

Lehrsatz 1. **Falls die Reihe Ω convergirt, convergirt**

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen denselben Werth, wie die Reihe Ω.

FIG. 24: *Prima proprietà della funzione F di Riemann*

✍ **Dimostrazione**

Iniziamo con il caso particolare $\boxed{\alpha = \beta}$. Notiamo che sotto tale condizione si ha

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n \,, \qquad \text{dove} \quad u_n = u_n(\alpha) := \left(\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}\right)^2 . \tag{2.6}$$

Dimostriamo che la serie al secondo membro della (2.6) converge a $f(x)$ per $\alpha \to 0$.

Osservazione 2.11.

Notiamo che $u_n \to 1$ per $\alpha \to 0$, ma ciò non è sufficiente per concludere che

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n(\alpha) \xrightarrow{\alpha\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n = f(x)$$

perché non è detto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ sia assolutamente convergente, e di conseguenza non possiamo portare il limite dentro la serie.

Poiché la serie (2.4) converge per ipotesi a $f(x)$, abbiamo

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = f(x) + \varepsilon_n \quad \text{con } \varepsilon_n \to 0 \tag{2.7}$$

e quindi, sottraendo due somme consecutive, otteniamo

$$A_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \,, \tag{2.8}$$

da cui, sostituendo (2.8) nell'espressione al secondo membro della (2.6), si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) u_n \,.$$

A questo punto osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{N} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) u_n = \varepsilon_{N+1} u_N - \varepsilon_0 u_0 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n (u_{n-1} - u_n)$$

e, siccome $\varepsilon_{N+1} \to 0$ per $N \to +\infty$, $u_0 \to 1$ e $\varepsilon_0 = -f(x)$ [9], di conseguenza abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n (u_{n-1} - u_n) \,.$$

Per concludere la dimostrazione dobbiamo quindi provare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n (u_{n-1} - u_n) \to 0 \quad \text{per } \alpha \to 0. \tag{2.9}$$

Fissato $\delta > 0$, poiché $\varepsilon_n \to 0$, possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ tale che $|\varepsilon_n| < \delta$ per ogni $n > m$ e prendiamo α così piccolo in modo che $m\alpha < \pi$, dopodiché definiamo $s = \left\lfloor \frac{\pi}{\alpha} \right\rfloor$. Pertanto avremo

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) \\ &\quad = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) + \sum_{n=m+1}^{s} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) + \sum_{n=s+1}^{+\infty} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ora, la prima somma al secondo membro della (2.10) è finita, quindi siamo autorizzati a portare il limite dentro la sommatoria e per quanto visto nell'Osservazione 2.11 segue

$$\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) \xrightarrow{\alpha \to 0} 0 \,.$$

Per quanto riguarda la seconda somma, abbiamo $m < n \leq s$, ovvero $0 < n\alpha \leq \pi$ e in $(0, \pi]$ la funzione $u(\cdot) = \left(\frac{\sin(\cdot)}{\cdot}\right)^2$ è decrescente. Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{s} \varepsilon_n \left(u_{n-1} - u_n\right) \right| &\leq \sum_{n=m+1}^{s} |\varepsilon_n| \left(u_{n-1} - u_n\right) \\ &\leq \delta \sum_{n=m+1}^{s} \left(u_{n-1} - u_n\right) \\ &\leq \delta \left(u_m - u_s\right) \\ &\leq \delta \,. \end{aligned}$$

Infine, per la terza sommatoria infinita, dobbiamo lavorare un po' di più. Abbiamo

$$u_{n-1} + u_n = \overbrace{\left(\left(\frac{\sin\left((n-1)\,\alpha\right)}{(n-1)\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin\left((n-1)\,\alpha\right)}{n\alpha}\right)^2\right)}^{I_1} + \underbrace{\left(\left(\frac{\sin\left((n-1)\,\alpha\right)}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin\left(n\alpha\right)}{n\alpha}\right)^2\right)}_{I_2} .$$

Concentriamoci su I_1. Siccome $\sin^2\left((n-1)\,\alpha\right) \leq 1$, risulta

$$I_1 \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) ,$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{n=s+1}^{+\infty} I_1 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=s+1}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2 s^2} \xrightarrow{\alpha \to 0} \frac{1}{\pi^2} \,. \end{aligned}$$

Passando a I_2, ricordando l'identità $\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2)\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)$, ponendo $\theta_1 = (n-1)\,\alpha$ e $\theta_2 = n\alpha$ otteniamo

$$I_2 = \frac{1}{(n\alpha)^2}\left(\sin^2((n-1)\,\alpha) - \sin^2(n\alpha)\right) = -\frac{\sin((2n-1)\,\alpha)\cdot\sin\alpha}{n^2\alpha^2},$$

da cui

$$|I_2| \le \frac{|\sin\alpha|}{n^2\alpha^2} \le \frac{1}{n^2\alpha}$$

e di conseguenza

$$\sum_{n=s+1}^{+\infty}|I_2| \le \frac{1}{\alpha}\sum_{n=s+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{\alpha}\int_s^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\alpha s} \xrightarrow{\alpha\to 0} \frac{1}{\pi}.$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n\,(u_{n-1}-u_n)\right| &\le \sum_{n=1}^{+\infty}|\varepsilon_n|\,(u_{n-1}-u_n)\\ &\le \delta\left(\sum_{n=1}^{m}(u_{n-1}-u_n) + \sum_{n=m+1}^{s}(u_{n-1}-u_n) + \sum_{n=s+1}^{+\infty}(u_{n-1}-u_n)\right)\\ &\le \delta\left(1+\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di δ segue la (2.9).

Finalmente passiamo al caso generale $\boxed{\alpha \neq \beta}$, ricordando che

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2} \xrightarrow{h\to 0} f(x)\,. \tag{2.11}$$

Applicando la (2.11) con $h = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $h = \frac{\alpha-\beta}{2}$ otteniamo rispettivamente

$$\begin{aligned}F(x+\alpha+\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha-\beta) &= (\alpha+\beta)^2\,(f(x)+\delta_1)\,, \quad \text{con } \delta_1\to 0\\ F(x+\alpha-\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha+\beta) &= (\alpha-\beta)^2\,(f(x)+\delta_2)\,, \quad \text{con } \delta_2\to 0\end{aligned}$$

A questo punto sottraendo le due precedenti relazioni si ha

$$\begin{aligned}&F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)\\ &\qquad = 4\alpha\beta\, f(x) + (\alpha+\beta)^2\,\delta_1 - (\alpha-\beta)^2\,\delta_2\end{aligned}$$

da cui la tesi, dividendo per $4\alpha\beta$ e per $\delta_1, \delta_2 \to 0$, osservando che i coefficienti $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}$ e $\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}$ rimangono limitati per l'ipotesi sulla finitezza di $\frac{\beta}{\alpha}$. □

[9] Dalla (2.7) abbiamo $0 = f(x) + \varepsilon_0$, da cui $\varepsilon_0 = -f(x)$.

Lemma 2.12. (Teorema 2)

« $\dfrac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$ *è sempre infinitamente piccolo rispetto ad* α. »

Lehrsatz 2.

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

wird stets mit α unendlich klein.

FIG. 25: *Seconda proprietà della funzione F di Riemann*

✍ Dimostrazione

Notiamo che, per il Lemma 2.10, risulta

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{2\alpha} = 2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n\,,$$
$$\text{dove}\quad u_n = u_n(\alpha) := \left(\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}\right)^2.$$

Rifacendo quanto visto nella dimostrazione precedente, dividiamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n$ in tre parti. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché $A_n \to 0$ per l'ipotesi in **(R1)**, possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ tale che $|A_n| < \varepsilon$ per ogni $n > m$. Ora, fissato $c > 0$, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n u_n = \overbrace{\sum_{1\le n\le m} A_n u_n}^{S_1} + \overbrace{\sum_{m\le n\le c/\alpha} A_n u_n}^{S_2} + \overbrace{\sum_{n>c/\alpha} A_n u_n}^{S_3}.$$

Partiamo con S_1 e definiamo la costante

$$Q := \sup_{\alpha}\left|\sum_{n=1}^{m} A_n u_n\right|$$

che esplicitiamo essere finita in quanto la somma è finita e ciascun fattore è limitato; a questo punto si ha banalmente

$$|S_1| \le Q\,.$$

Passiamo a S_2. Qui abbiamo $|A_n| < \varepsilon$ e $u_n \le 1$, mentre il numero di termini della somma è circa c/α, di conseguenza

$$|S_2| < \varepsilon\cdot\frac{c}{\alpha}\,.$$

Rimane da analizzare S_3. Qui $|\sin(n\alpha)| \le 1$ e pertanto $u_n \le \left(n^2\alpha^2\right)^{-1}$, di conseguenza, ricordando che $|A_n| < \varepsilon$, abbiamo

$$|S_3| < \varepsilon\sum_{n>c/\alpha}\frac{1}{n^2\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{c\alpha}\,.$$

In conclusione, mettendo tutto assieme:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{2\alpha}\right| &= 2\alpha\left|\sum_{n=0}^{+\infty}A_n u_n\right| \\ &\leq 2\alpha\left(|S_1|+|S_2|+|S_3|\right) \\ &< 2\alpha\left(Q+\varepsilon\frac{c}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{c\alpha}\right) \\ &= 2\left(Q\alpha+\varepsilon\left(c+\frac{1}{c}\right)\right) \overset{\substack{\alpha\to 0\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.13. (Teorema 3)

« Se si indicano con b e c due costanti qualsiasi, con $b<c$, e con $\lambda(x)$ una funzione che, insieme alla sua derivata prima, è sempre continua tra b e c e si annulla agli estremi, e la cui derivata seconda non ha infiniti massimi e minimi, allora l'integrale

$$\mu^2\int_b^c F(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx\,,$$

quando μ tende all'infinito, diventa più piccolo di qualsiasi grandezza data. »

Lehrsatz 3. **Bezeichnet man durch b und c zwei beliebige Constanten, die grössere durch c, und durch $\lambda(x)$ eine Function, welche nebst ihrem ersten Differentialquotienten zwischen b und c immer stetig ist und an den Grenzen gleich Null wird, und von welcher der zweite Differentialquotient nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so wird das Integral**

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx\,,$$

wenn μ in's Unendliche wächst, zuletzt kleiner als jede gegebene Grösse.

Fig. 26: *Terza proprietà della funzione F di Riemann*

✍ **Dimostrazione**

Chiamiamo

$$I_\mu = \mu^2\int_b^c F(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx$$

per semplicità; sostituendo al posto di $F(x)$ la sua espansione (2.5) nell'integrale I_μ, otteniamo

$$I_\mu = I_\mu^{(0)} + \Phi\,,$$

dove

$$I_\mu^{(0)} := \mu^2 \int_b^c \left(C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} \right) \cos\left(\mu\left(x-a\right)\right) \lambda\left(x\right) dx\,,$$

$$\Phi := \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\mu^2}{n^2} \int_b^c A_n \cos\left(\mu\left(x-a\right)\right) \lambda\left(x\right) dx$$

Ricordando che $A_n = a_n \sin\left(nx\right) + b_n \cos\left(nx\right)$, avremo

$$\begin{aligned}
A_n \cos\left(\mu\left(x-a\right)\right) &= \frac{a_n}{2} \left(\sin\left(\mu\left(x-a\right)+nx\right) + \sin\left(\mu\left(x-a\right)-nx\right)\right) \\
&\quad + \frac{b_n}{2} \left(\cos\left(\mu\left(x-a\right)+nx\right) + \cos\left(\mu\left(x-a\right)-nx\right)\right) \\
&= \frac{a_n}{2} \left(\sin\left(\left(\mu+n\right)\left(x-a\right)+na\right) + \sin\left(\left(\mu-n\right)\left(x-a\right)-na\right)\right) \\
&\quad + \frac{b_n}{2} \left(\cos\left(\left(\mu+n\right)\left(x-a\right)+na\right) + \cos\left(\left(\mu-n\right)\left(x-a\right)-na\right)\right) \\
&= \overbrace{\frac{a_n}{2} \sin\left(\left(\mu+n\right)\left(x-a\right)+na\right) + \frac{b_n}{2} \cos\left(\left(\mu+n\right)\left(x-a\right)+na\right)}^{B_{\mu+n}(x)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{a_n}{2} \sin\left(\left(\mu-n\right)\left(x-a\right)-na\right) + \frac{b_n}{2} \cos\left(\left(\mu-n\right)\left(x-a\right)-na\right)}_{B_{\mu-n}(x)}
\end{aligned}$$

con $B_{\mu\pm n}\left(x\right) \to 0$ quando $n \to +\infty$ per ogni x per l'ipotesi **(R1)**. Ora, poiché

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 B_{\mu\pm n}\left(x\right)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{a_n}{2} \cos\left(\left(\mu\pm n\right)\left(x-a\right)\pm na\right) \cdot \left(\mu\pm n\right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{b_n}{2} \sin\left(\left(\mu\pm n\right)\left(x-a\right)\pm na\right) \cdot \left(\mu\pm n\right) \right) \\
&= -\frac{a_n}{2} \sin\left(\left(\mu\pm n\right)\left(x-a\right)\pm na\right) \cdot \left(\mu\pm n\right)^2 \\
&\qquad - \frac{b_n}{2} \cos\left(\left(\mu\pm n\right)\left(x-a\right)\pm na\right) \cdot \left(\mu\pm n\right)^2 \\
&= -\left(\mu\pm n\right)^2 \cdot B_{\mu\pm n}\,,
\end{aligned}$$

possiamo scrivere il termine generale della serie Φ come

$$\frac{\mu^2}{n^2\left(\mu+n\right)^2} \int_b^c \frac{d^2 B_{\mu+n}\left(x\right)}{dx^2} \cdot \lambda\left(x\right) dx + \frac{\mu^2}{n^2\left(\mu-n\right)^2} \int_b^c \frac{d^2 B_{\mu-n}\left(x\right)}{dx^2} \cdot \lambda\left(x\right) dx\,.$$

A questo punto, integrando due volte per parti e ricordando che $\lambda\left(b\right) = \lambda\left(c\right) = 0$ e $\lambda'\left(b\right) = \lambda'\left(c\right) = 0$, avremo che l'espressione precedente risulta uguale a

$$\frac{\mu^2}{n^2\left(\mu+n\right)^2} \int_b^c B_{\mu+n}\left(x\right) \cdot \lambda''\left(x\right) dx + \frac{\mu^2}{n^2\left(\mu-n\right)^2} \int_b^c B_{\mu-n}\left(x\right) \cdot \lambda''\left(x\right) dx\,.$$

Quando $\mu \to +\infty$, se il primo integrale tende chiaramente a 0, per il secondo possiamo dire la stessa cosa a meno che non sia $n \approx \mu$. In tal caso dobbiamo mostrare che la serie

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} \frac{\mu^2}{n^2\left(\mu-n\right)^2}\,, \qquad \mathcal{N} := \left(-\infty, -c_1\right) \cup \left(c_2, \mu - c_3\right) \cup \left(\mu + c_4, +\infty\right)\,, \tag{2.12}$$

rimanga finita con $\mu \to +\infty$ per ogni scelta delle costanti positive c_1, c_2, c_3, c_4. Da notare infatti che gli indici esclusi, tra cui $n = 0$ e $n = \mu$, sono in numero finito e i loro coefficienti tendono a 0 per $\mu \to +\infty$. Tornando alla (2.12), operando il cambio di variabile $x = n/\mu$ e detto

$$\mathscr{X} = \left(-\infty, -\frac{c_1 - 1}{\mu}\right] \cup \left[\frac{c_2 + 1}{\mu}, 1 - \frac{c_3 - 1}{\mu}\right] \cup \left[1 + \frac{c_4 + 1}{\mu}, +\infty\right),$$

si ottiene

$$\sum_{n \in \mathscr{N}} \frac{\mu^2}{n^2 (\mu - n)^2} = \sum_{x \in \mathscr{X}} \frac{1}{\mu^2 x^2 (1 - x)^2} < \frac{1}{\mu} \int_{\mathscr{X}} \frac{dx}{x^2 (1 - x)^2}$$

in quanto $0, 1 \notin \mathscr{X}$ e quindi la funzione $x \mapsto \frac{1}{x^2(1-x)^2}$ è integrabile in $\mathscr{X}$. La tesi segue dal fatto che

$$\int \frac{dx}{x^2 (1 - x)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} + 2 \log|x| - 2 \log|1 - x| + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

valutata negli estremi di $\mathscr{X}$ rimane finita per $\mu \to +\infty$. □

2.3.2 Condizioni necessarie e sufficienti

Dopo aver enunciato e dimostrato i tre teoremi preliminari, Riemann li utilizza per determinare le condizioni affinché una funzione possa essere rappresentata tramite una serie trigonometrica, sempre restando nel caso **(R1)**. In **[15, pp. 116-117]** Riemann indica con "I" la condizione necessaria e con "II" quella sufficiente.

Teorema 2.14.

« I. Se una funzione $f(x)$, che si ripete periodicamente con periodo 2π, deve essere rappresentabile tramite una serie trigonometrica i cui termini diventano infinitesimali per ogni valore di x, allora deve esistere una funzione continua $F(x)$, da cui $f(x)$ dipende in modo tale che

$$\frac{F(x + \alpha + \beta) - F(x + \alpha - \beta) - F(x - \alpha + \beta) + F(x - \alpha - \beta)}{4\alpha\beta}$$

converga a $f(x)$ quando α e β diventano infinitesimali e il loro rapporto resta finito. Inoltre,

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos(\mu(x - a)) \lambda(x)\, dx,$$

deve diventare infinitesimale con μ crescente, se $\lambda(x)$ e $\lambda'(x)$ sono uguali a 0 ai limiti dell'integrale, sempre continue tra di loro e $\lambda''(x)$ non ha un numero infinito di massimi e minimi.

II. Reciprocamente, se queste due condizioni sono soddisfatte, allora esiste una serie

trigonometrica in cui i coefficienti finiscono per diventare infinitamente piccoli e che rappresenta la funzione ovunque converga. »

I. Wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, darstellbar sein soll, so muss es eine stetige Function $F(x)$ geben, von welcher $f(x)$ so abhangt, dass

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β unendlich klein werden und dabei ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen $f(x)$ convergirt.

Es muss ferner $\mu\mu \int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx$, wenn $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals $= 0$ und zwischen denselben immer stetig sind, und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden.

II. Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt.

FIG. 27: *Condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità in serie*

Proviamo la II del Teorema 2.14. Prendiamo i coefficienti C' e A_0 in modo che

$$x \mapsto \tilde{F}(x) := F(x) - C'x - A_0\frac{x^2}{2}$$

sia 2π-periodica e, dunque, che la sua espansione in serie trigonometrica sia

$$C - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots$$

con

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t)\, dt \qquad \text{e} \qquad -\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t)\cos(n(x-t))\, dt\,, \quad n \geq 1\,.$$

Osservazione 2.15.

Come aggiunto in [5, p. 252], poiché si suppone che la funzione f abbia periodo 2π, la funzione definita da

$$\phi(x) := F(x+2\pi) - F(x)$$

deve essere tale per cui

$$\frac{\phi(x+\alpha+\beta)-\phi(x+\alpha-\beta)-\phi(x-\alpha+\beta)+\phi(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta} \xrightarrow[\beta\to 0]{\alpha\to 0} 0\,.$$

Poiché la derivata seconda generalizzata di ϕ tende a zero, avremo che ϕ è lineare, da cui l'esistenza degli scalari C' e A_0 tali per cui $\tilde{F}$ abbia periodo 2π.

A questo punto avremo che

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t)\cos(n(x-t))\,dt \tag{2.13}$$

tende a 0 per $n \to +\infty$ e, per il Lemma 2.10, la serie $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$ converge a $f(x)$, quando converge.

Osservazione 2.16.

Notiamo che dall'ipotesi

$$\mu^2 \int_b^c F(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx \xrightarrow{\mu\to+\infty} 0$$

segue che, sotto le stesse condizioni del Lemma 2.13,

$$\mu^2 \int_b^c \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx \xrightarrow{\mu\to+\infty} 0\,.$$

Siano $b < -\pi$, $c > \pi$ e supponiamo, in maniera lecita, che $\lambda(x) = 1$ per ogni $x \in [-\pi,\pi]$; ora, quando $\mu = n \in \mathbb{N}$, per la periodicità di $\tilde{F}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\mu^2 \int_b^c \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx \\
&= \mu^2 \int_b^{-\pi} \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx + \mu^2 \int_\pi^c \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,\lambda(x)\,dx \\
&\quad + \mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,dx \\
&= n^2 \int_{b+2\pi}^c \tilde{F}(x)\cos(n(x-a))\,\tilde{\lambda}(x)\,dx + n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(x)\cos(n(x-a))\,dx
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\tilde{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda(x-2\pi)\,, & x \in [b+2\pi,\pi] \\ \lambda(x)\,, & x \in [\pi,c] \end{cases}.$$

Poiché $\tilde{\lambda}$ soddisfa le ipotesi relative alla funzione λ del Lemma 2.13, si ha che il primo integrale nella precedente somma tende a zero; pertanto

$$\mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(x)\cos(\mu(x-a))\,dx \xrightarrow{\mu\to+\infty} 0\,.$$

Abbiamo infine la seguente: **[15, pp. 117-119]**

Proposizione 2.17. (Proposizione III)

« III. Sia $b < x < c$, e sia $\varrho(t)$ una funzione tale che $\varrho(t)$ e $\varrho'(t)$ per $t = b$ e $t = c$ abbiano valore 0 e tra questi valori cambino in modo continuo, $\varrho''(t)$ non abbia un numero infinito di massimi e minimi, e inoltre per $t = x$ si abbia $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, mentre $\varrho'''(t)$ e $\varrho^{(4)}(t)$ siano finite e continue; così la differenza tra la serie

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

e l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{d^2\dfrac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}(x-t)\right)}{\sin\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt \tag{2.14}$$

diventerà infinitesimale con l'aumentare di n. Pertanto, la serie

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

convergerà o non convergerà a seconda che (2.14) si avvicini o meno a un limite fisso con l'aumentare di n. »

III. Es sei $b < x < c$, und $\varrho(t)$ eine solche Function, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ für $t = b$ und $t = c$ den Werth 0 haben und zwischen diesen Werthen stetig sich ändern, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und dass ferner für $t = x$ $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho^{IV}(t)$ aber endlich und stetig sind; so wird der Unterschied zwischen der Reihe $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein. Die Reihe $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ wird daher convergiren oder nicht convergiren je nachdem

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

sich mit wachsendem n zuletzt einer festen Grenze nähert oder dies nicht stattfindet.

FIG. 28: *Proposizione III di Riemann*

Osservazione 2.18.

Sempre in [5, p. 253] viene giustamente riportato che andrebbe aggiunta l'ipotesi per cui la funzione λ sia anch'essa 2π-periodica e, a sostegno di ciò, viene fornito come controesempio il caso in cui $\tilde{F}(t) = c \in \mathbb{R}$ e $\lambda(t) = (x-t)^3$. In realtà, avendo interesse per λ solamente nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, ci è sufficiente come ipotesi aggiuntiva solamente che

$$\lambda(-\pi) = \lambda(\pi) \quad e \quad \lambda'(-\pi) = \lambda'(\pi) .$$

✍ **Dimostrazione della Proposizione 2.17**

Dalla (2.13) abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A_k &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} -k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \cos(k(x-t))\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \sum_{k=1}^{n} -k^2 \cos(k(x-t))\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k(x-t)) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(x-t)\right)}{2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2}\, dt , \quad \text{con } K_n(\theta) := \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora $b < -\pi \le x \le \pi < c$, prendiamo ϱ come nell'enunciato e definiamo

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 , & t \notin [b,c] \\ 1 - \varrho(t) , & t \in [b,c] \end{cases} .$$

in modo che

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} A_k - \frac{1}{2\pi} \int_{b}^{c} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{b}^{c} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2} \lambda(t)\, dt .
\end{aligned}$$

Dimostriamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2 K_n(x-t)}{dt^2} \lambda(t)\, dt \xrightarrow{n \to +\infty} 0 . \tag{2.15}$$

Ponendo per comodità $\mu := \frac{2n+1}{2}$ abbiamo

$$\frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} = -\mu^2 \frac{\sin(\mu(x-t))}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \left(1 + \frac{\cot(\mu(x-t))\cot\left(\frac{x-t}{2}\right)}{\mu} - \frac{\cot^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}{2\mu^2} - \frac{1}{4\mu^2}\right)$$

e, detto $\Psi(t)$ il termine dentro le parentesi tonde al secondo membro della precedente equazione, di conseguenza per $x = a + \pi$ risulta

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \lambda(t)\, dt &= -\mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(t)\Psi(t) \frac{\lambda(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \sin(\mu(x-t))\, dt \\ &= (-1)^n \mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_\Psi(t) \cos(\mu(a-t))\, \tilde{\lambda}(t)\, dt,\end{aligned}$$

dove si è posto $\tilde{F}_\Psi(t) := \tilde{F}(t) \cdot \Psi(t)$ e

$$\tilde{\lambda}(t) := \frac{\lambda(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}.$$

Ora, scegliamo in $[b, c]$ una funzione λ_1 tale per cui $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ in $[-\pi, \pi]$ e per cui $\lambda_1(t) = \lambda_1'(t) = 0$ in $t = b$ e $t = c$, mentre in $[b + 2\pi, c]$ scegliamo una funzione λ_2 tale per cui

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} -\lambda_1(t - 2\pi), & t \in [b + 2\pi, \pi] \\ \lambda_1(t), & t \in [\pi, c] \end{cases}.$$

Di conseguenza abbiamo $\lambda_2(\pi) = -\tilde{\lambda}(-\pi)$ e $\lambda_2'(\pi) = -\tilde{\lambda}'(-\pi)$, quindi

$$\begin{aligned}&\mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_\Psi(t) \cos(\mu(a-t))\, \tilde{\lambda}(t)\, dt \\ &= \mu^2 \int_b^c \tilde{F}_\Psi(t) \cos(\mu(a-t))\, \lambda_1(t)\, dt - \mu^2 \int_{b+2\pi}^{c} \tilde{F}_\Psi(t) \cos(\mu(a-t))\, \lambda_2(t)\, dt\end{aligned}$$

con i due termini al secondo membro che tendono a zero per le stesse ragioni discusse nell'Osservazione 2.16. La (2.15) è pertanto dimostrata.

A questo punto per concludere la dimostrazione basta osservare che

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi} \int_b^c \tilde{F}(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_b^c \left(C't + A_0 \frac{t^2}{2}\right) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_b^c \left(A_0 \varrho(t) + 2\left(C' + A_0 t\right) \varrho'(t) + \left(C't + A_0 \frac{t^2}{2}\right) \varrho''(t)\right) K_n(x-t)\, dt \\ &\xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt \\ &\qquad - \left[A_0 \varrho(t) + 2\left(C' + A_0 t\right) \varrho'(t) + \left(C't + A_0 \frac{t^2}{2}\right) \varrho''(t)\right]_{t=x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2K_n(x-t)}{dt^2} \varrho(t)\, dt - A_0\end{aligned}$$

in quanto $\varrho(x) = 1$ e $\varrho'(x) = \varrho''(x) = 0$ per ipotesi. □

Osservazione 2.19.

Detta

$$A(t) := A_0\,\varrho(t) + 2\,(C' + A_0 t)\,\varrho'(t) + \left(C't + A_0\frac{t^2}{2}\right)\varrho''(t)\ ,$$

siccome ϱ, ϱ' e ϱ'' sono di classe C^1 in un intorno di x per ipotesi, avremo che anche A è di classe C^1 in un intorno di x e quindi si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c A(t)\,K_n(x-t)\,dt = S_n(A,x) \xrightarrow{n\to+\infty} A(x)\ ,$$

dove $S_n(A,x)$ è la somma parziale n-esima della serie di Fourier di A in x.

Successivamente, nel paragrafo 10 in [15, p. 119], Riemann nota che, siccome l'intervallo di estremi b e c considerato nella Proposizione 2.17 può essere preso piccolo a piacere, si ha un "teorema di localizzazione" (lo enunceremo nel terzo capitolo quando studieremo la convergenza puntuale della serie di Fourier, in alternativa si può consultare la fonte suggerita in [12, p. 208] per maggiori dettagli), infatti:

> Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{Q}$ zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes.

FIG. 29: *"Teorema di localizzazione"*

> « *Quest'indagine ha quindi dimostrato che se i coefficienti della serie Ω diventano infinitesimamente piccoli, la convergenza della serie per un certo valore di x dipende unicamente dal comportamento della funzione $f(x)$ nelle immediate vicinanze di tale valore.* »

Nel paragrafo 11, invece, Riemann tratta il caso **(R2)**, che fino ad ora è stato ignorato, semplicemente riconducendosi al caso **(R1)**: infatti, se si considerano le serie (2.4) ottenute per $x \pm t$, con x tale che $A_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, e le si sommano termine a termine, abbiamo la serie

$$2A_0 + 2A_1\cos t + 2A_2\cos(2t) + \cdots$$

i cui termini tendono a 0 per $n \to +\infty$ per ogni t e per la quale si possono dunque applicare i risultati visti in precedenza.

2.3.3 Due esempi notevoli

Nel tredicesimo e ultimo paragrafo di [15], Riemann considera alcuni esempi significativi, invece di affrontare il problema generale costituito dai casi che non soddisfano le condizioni **(D1)** e **(D2)** di Dirichlet.

Per quanto riguarda funzioni aventi un numero infinito di massimi e minimi, si possono dare esempi di funzioni integrabili ma non rappresentabili in serie di Fourier.

Esempio 2.20.

Si consideri

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\varphi(x)\cos(\psi(x))\right) = \varphi'(x)\cos(\psi(x)) - \varphi(x)\,\psi'(x)\sin(\psi(x))$$

con $\varphi(x) \to 0$ e $\psi(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Per le formule prodotto-somma già utilizzate per dimostrare il Lemma 2.13, abbiamo

$$\begin{aligned}\int f(x)\cos(n(x-a))\,dx = &\frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cos(\psi(x)+n(x-a))\,dx\\ &+\frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cos(\psi(x)-n(x-a))\,dx\\ &-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))\,dx\\ &-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,\psi'(x)\sin(n(x-a)-\psi(x))\,dx\,.\end{aligned}$$

Soffermiamoci sul terzo integrale, assumendo ψ positiva. Posto

$$y \coloneqq \psi(x) + n(x-a)\,,$$

normalmente tale valore cambia segno molto velocemente, ma esiste un punto α in cui ciò avviene più lentamente ed è tale per cui $\frac{dy}{dx} = 0$, quindi si avrà

$$\psi'(\alpha) = -n\,.$$

A questo punto vogliamo studiare il comportamento dell'integrale

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx$$

per $\varepsilon \to 0^+$ e $n \to +\infty$. Sviluppando y in serie di Taylor attorno ad α abbiamo

$$y = \beta + \frac{\psi''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots\,, \qquad \text{dove } \beta \coloneqq \psi(\alpha) + n(\alpha - a)\,, \tag{2.16}$$

con $\psi''(\alpha) > 0$ in quanto $\psi(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Inoltre dalla (2.16) segue

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)}$$

a seconda del segno di $x-\alpha$, ma allora, se ε è sufficientemente piccolo, avremo $\varphi(x) \approx \varphi(\alpha)$ e $\psi'(x) \approx \psi'(\alpha)$, da cui

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx \\
&\qquad \approx -\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)\sin y\,dx - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)\sin y\,dx \\
&\qquad \overset{(2.16)}{=} -\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{2}\int_{\beta+\frac{\psi''(\alpha)}{2}\varepsilon^2}^{\beta} \sin y\left(-\frac{dy}{\sqrt{2\psi''(\alpha)\,(y-\beta)}}\right) \\
&\qquad\qquad -\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{2}\int_{\beta}^{\beta+\frac{\psi''(\alpha)}{2}\varepsilon^2} \sin y\cdot\frac{dy}{\sqrt{2\psi''(\alpha)\,(y-\beta)}} \\
&\qquad = -\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\int_{0}^{\frac{\psi''(\alpha)}{2}\varepsilon^2} \frac{\sin(y+\beta)}{\sqrt{y}}\,dy \\
&\qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{\varepsilon\to 0} -\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\cdot\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto, se l'ultima quantità non diventa infinitesima, il suo rapporto con

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n(x-a))\,dx$$

tende a 1 per $n\to+\infty$, mentre $\int f(x)\,dx$ converge banalmente per come è definita la funzione f.

Applichiamo quanto detto al primo esempio che fornisce Riemann, vale a dire

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad 0\le x\le 2\pi, \quad 0<\nu<\frac{1}{2}.$$

In questo caso abbiamo

$$\varphi(x) = x^{\nu}, \quad \psi(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

da cui

$$-\frac{1}{\alpha^2} = -n \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
-\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\cdot\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\alpha^{\nu}\cdot\frac{1}{\alpha^2}}{\sqrt{\frac{4}{\alpha^3}}}\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(\frac{1}{\alpha}+n(\alpha-a)+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\alpha^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(\frac{1}{\alpha}+n\alpha-na+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}n^{\frac{1-2\nu}{4}}\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

che tende a $+\infty$ se prendiamo $1-2\nu>0$, vale a dire $0<\nu<1/2$.[10]

Nella generalizzazione presentata nell'Esempio 2.20 Riemann utilizza la relazione

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\theta)}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.17}$$

che era già nota, seppur in una forma più semplificata, a Eulero. Per dimostrare tale uguaglianza è necessario però fare qualche ripasso sui numeri complessi: oltre alla già citata *identità di Eulero* usata implicitamente nella (1.29), ci saranno utili la *funzione Gamma di Eulero*, definita da

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt\,, \tag{2.18}$$

e i valori

$$(\pm\imath)^{-\frac{1}{2}}=\left(e^{\pm\imath\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{\mp\imath\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\mp\frac{\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(\mp\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mp\imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Da notare che dalla (2.18) seguono

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}e^{-u^2}\cdot 2u\,du=\sqrt{\pi}\,,$$

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-kt}\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{k}\right)^{x-1}e^{-u}\cdot\frac{1}{k}\,du=\frac{1}{k^x}\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(x)}{k^x}\,.$$

Adesso possiamo dimostrare la (2.17):

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\theta)}{\sqrt{x}}\,dx\\
&\quad=\sin\theta\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx+\cos\theta\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\\
&\quad=\sin\theta\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^{\imath x}+e^{-\imath x}}{2}\,dx+\cos\theta\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{2\imath}\,dx\\
&\quad=\left(\frac{\sin\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{2\imath}\right)\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\,e^{\imath x}\,dx+\left(\frac{\sin\theta}{2}-\frac{\cos\theta}{2\imath}\right)\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\,e^{\imath x}\,dx\\
&\quad=\frac{1}{2}\left(\sin\theta+\frac{\cos\theta}{\imath}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-\imath)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\left(\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\imath}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\imath^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sin\theta-\imath\cos\theta\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sin\theta+\imath\cos\theta\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&\quad=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(2\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&\quad=\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\,.
\end{aligned}$$

[10] Ricordiamo che n è un intero positivo, e $\nu>0$ dato che deve essere $x^\nu\xrightarrow{x\to 0^+}0$.

Il secondo caso che Riemann prende in esame è di fatto l'inverso di quello precedente, vale a dire una funzione non integrabile nemmeno localmente – cioè tra valori molto vicini –, ma la cui serie (2.4) converge in infiniti punti.

Esempio 2.21.

Si consideri la funzione definita

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n},$$

dove $(\cdot)$ ha lo stesso significato assunto nell'Esempio 2.4, e calcoliamo subito la sua serie di Fourier. Poiché $(\cdot)$ è dispari, nel suo sviluppo in serie saranno presenti solamente dei seni, ovvero

$$(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2k\pi x)$$

dove

$$\begin{aligned} b_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sin(2k\pi x)\,dx &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(2k\pi x)\,dx \\ &= 4\left[-x\frac{\cos(2k\pi x)}{2k\pi} + \frac{\sin(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$(nx) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(2k\pi nx)$$

e a questo punto, detto $\theta = kn$, abbiamo

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{kn\pi}\sin(2k\pi nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{\theta\,|\,n}(-1)^{\theta+1}}{n\pi}\sin(2n\pi x),$$

dove con la notazione $\theta \mid n$ si intende che θ è un divisore di n.
D'altro canto, « *la funzione non è limitata in alcun intervallo, non importa quanto piccolo, è quindi non è integrabile* ». Senza entrare maggiormente nei dettagli, l'idea è quella di dimostrare che la funzione non è limitata nei punti $\frac{p}{2q}$, con $\operatorname{mcd}(p, 2q) = 1$, per poi concludere usando la densità di tali punti in $\mathbb{R}$.

Capitolo 3

Sviluppi successivi a Riemann

La tesi di abilitazione di Riemann non concluse certamente la storia del problema delle serie trigonometriche; al contrario, le questioni che essa aveva posto contribuirono ad aprire una nuova stagione della ricerca matematica. La maggiore attenzione riservata alle condizioni di rappresentabilità, alla convergenza e alla natura delle funzioni rappresentate mise progressivamente in luce la complessità di un problema che, nella sua formulazione originaria, poteva apparire relativamente semplice. Negli anni successivi alla morte di Riemann, le serie trigonometriche divennero così uno dei luoghi privilegiati nei quali si manifestarono alcune delle trasformazioni più profonde dell'analisi matematica. Questioni apparentemente circoscritte condussero infatti a interrogativi più generali sulla natura delle funzioni, sulla misura e sull'integrazione.

Questo capitolo è dunque suddiviso in due parti: la prima parte, più analitica, è composta dalle prime due sezioni e seguirà principalmente il secondo e il terzo capitolo del libro [17] di Elias M. Stein e Rami Shakarchi, mentre la seconda parte, più storica, riguarda l'ultima sezione sulla teoria dell'integrazione di Lebesgue e si fonderà sul volume [10] di Thomas Hawkins e sull'analisi di alcune pagine della tesi di dottorato [13] dello stesso Lebesgue.

Definizioni principali sulle serie di Fourier

Prima di procedere, riformuliamo in maniera più rigorosa gli oggetti principali che abbiamo introdotto nei capitoli precedenti, in particolar modo nel primo.

Definizione 3.1.

Un ***polinomio trigonometrico*** *è una funzione 2π-periodica in $\mathbb{R}$ del tipo*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *e* $c_n \in \mathbb{C}$, *dove* $n \in \mathbb{Z}$.

Prendiamo inoltre

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx \tag{3.1}$$

prodotto interno[11] in $L^2([-\pi, \pi])$, ossia nello spazio delle funzioni f tali per cui $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} < +\infty$. Posto $e_n = e^{inx}$, l'insieme $\mathscr{E} = \{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ costituisce un sistema di funzioni ortonormali rispetto al prodotto interno (3.1), in quanto

$$\langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cdot \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1\,, & m = n \\ 0\,, & m \neq n \end{cases}. \tag{3.2}$$

Definizione 3.2.

Si definisce ***serie di Fourier*** *di* $f \in L^2([-\pi, \pi])$ *la rappresentazione di quest'ultima come combinazione lineare dei vettori di base* $\mathscr{E}$*:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}\,.$$

I coefficienti della combinazione sono dunque le proiezioni della funzione f *sui vettori della base* $\mathscr{E}$*, cioè*

$$\hat{f}_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx\,,$$

e sono detti ***coefficienti di Fourier****.*

Prima di generalizzare quanto appena detto, facciamo un'osservazione che renderà più chiara una notazione che useremo successivamente. **[17, pp. 33-34]**

Osservazione 3.3.

Esiste una connessione tra le funzioni 2π*-periodiche in* $\mathbb{R}$*, quelle definite su intervalli di ampiezza* 2π *e quelle definite sulla circonferenza unitaria* $\mathscr{C}$ *in* $\mathbb{C}$*. Osserviamo subito che un punto su* $\mathscr{C}$ *è del tipo* $e^{i\theta}$*, dove* $\theta \in \mathbb{R}$ *è unico a*

[11] Sia V uno spazio vettoriale. Si definisce ***prodotto interno***, o anche *prodotto scalare*, un'applicazione $p\colon V \times V \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(P1) $p(u,u) \geq 0$ per ogni $u \in V$ e $p(u,u) = 0$ se e solo se $u = 0_V$;

(P2) $p(u,v) = p(v,u)$ per ogni $u, v \in V$;

(P3) per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha

$$p(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\, p(u,v) + \beta\, p(u,w) \quad \text{e} \quad p(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\, p(u,w) + \beta\, p(v,w)\,.$$

meno di multipli interi di 2π. Ora, se F è una funzione su $\mathscr{C}$, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ possiamo definire

$$f(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right)$$

e notare che, con tale definizione, la funzione f è 2π-periodica in $\mathbb{R}$ e che le proprietà di regolarità – tra cui continuità e integrabilità – della funzione F sono determinate da quelle di f. Ad esempio, diremo che F è integrabile in $\mathscr{C}$ se f è integrabile in ogni intervallo di ampiezza 2π, oppure che F è continua in $\mathscr{C}$ se f lo è in $\mathbb{R}$, vale a dire in ogni intervallo di ampiezza 2π, o anche che F è derivabile con continuità se f ha una derivata continua.

Poiché f ha periodo 2π, possiamo restringerla a qualsiasi intervallo di ampiezza 2π, come $[-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi]$, e riottenere comunque la funzione F di partenza. Tuttavia notiamo che f deve assumere lo stesso valore agli estremi dell'intervallo dato che corrispondono allo stesso punto su $\mathscr{C}$. Viceversa, qualsiasi funzione su $[a, b]$, con $|b - a| = 2\pi$, per cui $f(a) = f(b)$ può essere estesa a una funzione periodica su $\mathbb{R}$ che a sua volta può quindi essere identificata come una funzione su $\mathscr{C}$.

Pertanto, le funzioni su $\mathbb{R}$ che sono 2π-periodiche e le funzioni su un intervallo di ampiezza 2π che assumono lo stesso valore ai suoi estremi sono due descrizioni equivalenti degli stessi oggetti matematici, ossia le ***funzioni sul cerchio unitario****. Da qui in poi, quando considereremo funzioni definite in $\mathbb{R}$ o in un intervallo useremo x come variabile indipendente, mentre quando considereremo funzioni definite su $\mathscr{C}$ useremo θ come variabile indipendente.*

Come ipotesi iniziale assumeremo che le funzioni di cui vogliamo studiare la serie di Fourier siano *integrabili*, vale a dire integrabili secondo Riemann e limitate **[17, p. 31]**, indebolendo dunque la condizione di appartenenza alla classe L^2. Se g è una funzione 2π-periodica, allora la funzione $f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ è T-periodica e avremo

$$\begin{aligned}
\hat{g}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g\left(\frac{2\pi}{T}x\right) e^{-in\cdot\frac{2\pi}{T}x} dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T}inx} dx =: \hat{f}_n\,.
\end{aligned}$$

Poiché f è periodica, gli estremi di integrazione nell'ultimo integrale della precedente catena di uguaglianze possono essere presi arbitrariamente, a patto che l'intervallo

da essi formato abbia ampiezza T. Ciò porta dunque alla seguente:

Definizione 3.4.

Se f è una funzione integrabile in $[a,b]$, con $|b-a| = T$, allora l'n-esimo ***coefficiente di Fourier*** *di f, dove $n \in \mathbb{Z}$, è dato da*

$$\hat{f}_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T}inx} dx$$

e la ***serie di Fourier*** *di f è definita formalmente da*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}.$$

Inoltre useremo

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

per dire che la serie al secondo membro è la serie di Fourier che rappresenta f.

Definizione 3.5.

Chiameremo ***serie trigonometrica*** *un'espressione del tipo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}, \quad \text{con } c_n \in \mathbb{C}.$$

Se una serie trigonometrica ha solamente un numero finito di termini non nulli, allora è detta ***polinomio trigonometrico*** *e chiameremo il suo* ***grado*** *lo scalare* $\max\{|n| : c_n \neq 0\}$.

In particolare, la **somma parziale** N-esima della serie di Fourier di f, con $N \in \mathbb{N}$, è un polinomio trigonometrico ed è data da

$$S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}.$$

3.1 La nascita della teoria degli insiemi

3.1.1 Il problema dell'unicità della serie di Fourier

La prima domanda che possiamo farci sulle serie di Fourier è:

? *Domanda.*

Due funzioni con gli stessi coefficienti di Fourier sono necessariamente uguali?

Se supponessimo che la serie di Fourier di una funzione converga alla funzione stessa in un senso appropriato (se ne vedranno alcuni nella Sezione 3.2), allora potremmo dedurre che una funzione è determinata univocamente dai suoi coefficienti di Fourier. Ciò porterebbe di conseguenza alla seguente affermazione:

> *se le funzioni g e h hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora necessariamente $g \equiv h$*

o equivalentemente, considerando la differenza $f = g - h$:

> *se $\hat{f}_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f \equiv 0$.*

Chiaramente questa asserzione è incorretta così come scritta, dato che il calcolo dei coefficienti di Fourier richiede come ipotesi l'integrabilità della funzione; inoltre, per esempio, due funzioni qualsiasi che differiscono in un numero finito di punti hanno gli stessi coefficienti di Fourier e, dunque, la stessa serie di Fourier. Ciò nonostante, abbiamo il seguente: **[17, p. 39]**

Teorema 3.6. (Unicità della serie di Fourier)

Se f è una funzione integrabile su $\mathscr{C}$ con $\hat{f}_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora si ha $f(\theta_0) = 0$ in ogni punto di continuità θ_0 per f.

✍ **Dimostrazione**

Sia f definita in $[-\pi, \pi]$ e assumiamo, senza perdita in generalità, che

- *f sia a valori in $\mathbb{R}$.*
  Infatti, nel caso in cui f è a valori in $\mathbb{C}$, possiamo scrivere $f(\theta) = u(\theta) + \imath v(\theta)$, dove u, v sono funzioni a valori in $\mathbb{R}$; ma allora avremo
  $$u(\theta) = \frac{f(\theta) + \overline{f(\theta)}}{2} \quad \text{e} \quad v(\theta) = \frac{f(\theta) - \overline{f(\theta)}}{2\imath}$$
  e, siccome per ipotesi
  $$\hat{\bar{f}}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)} e^{-\imath n\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)\, e^{\imath n\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-\imath(-n)\theta}} = \bar{\hat{f}}_{-n} = 0,$$
  di conseguenza $\hat{u}_n = \hat{v}_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- *$\theta_0 = 0$.*
  Infatti, nel caso in cui $\theta_0 \neq 0$, basta considerare la funzione $f(\theta + \theta_0)$ che ha anch'essa tutti i coefficienti di Fourier nulli.

Supponiamo per assurdo che sia $f(0) > 0$. Poiché f è continua in 0, esiste $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ tale che
$$f(\theta) > \frac{f(0)}{2} > 0 \quad \text{se } |\theta| < \delta.$$

Poniamo

$$p(\theta) = \varepsilon + \cos\theta\,,$$

dove $\varepsilon > 0$ è preso in modo che sia

$$|p(\theta)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per } \delta \le |\theta| \le \pi\,.$$

Ora, per la continuità di p, possiamo scegliere $0 < \eta < \delta$ in modo che sia

$$p(\theta) > 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per } |\theta| < \eta\,.$$

Sia inoltre

$$p_k(\theta) = (p(\theta))^k$$

e, ricordando che f è limitata per ipotesi, sia $B > 0$ tale che

$$|f(\theta)| \le B \qquad \text{per ogni } |\theta| \le \pi\,.$$

Per costruzione, ogni termine p_k è un polinomio trigonometrico, pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\imath n\theta}\, d\theta \\ &= \sum_{|n|\le N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{\imath n\theta}\, d\theta = 2\pi \sum_{|n|\le N} c_n\, \hat{f}_{-n} = 0\end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. D'altro canto abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta \\ &\qquad = \int_{|\theta|<\eta} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta + \int_{\eta\le|\theta|<\delta} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta + \int_{\delta\le|\theta|\le\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta\,;\end{aligned}$$

per il primo integrale si ha

$$\int_{|\theta|<\eta} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta > 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty\,,$$

per il secondo integrale

$$\int_{\eta\le|\theta|<\delta} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta \ge 0$$

che quindi non può bilanciare il contributo del primo, infine per il terzo integrale

$$\left|\int_{\delta\le|\theta|\le\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta\right| \le 2\pi B \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \xrightarrow{k\to+\infty} 0\,.$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, p_k(\theta)\, d\theta \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$$

che è una contraddizione.

A questo punto la dimostrazione è conclusa, dato che nel caso in cui $f(0) < 0$ possiamo applicare il precedente ragionamento alla funzione $-f$ che ha banalmente tutti i coefficienti di Fourier nulli. □

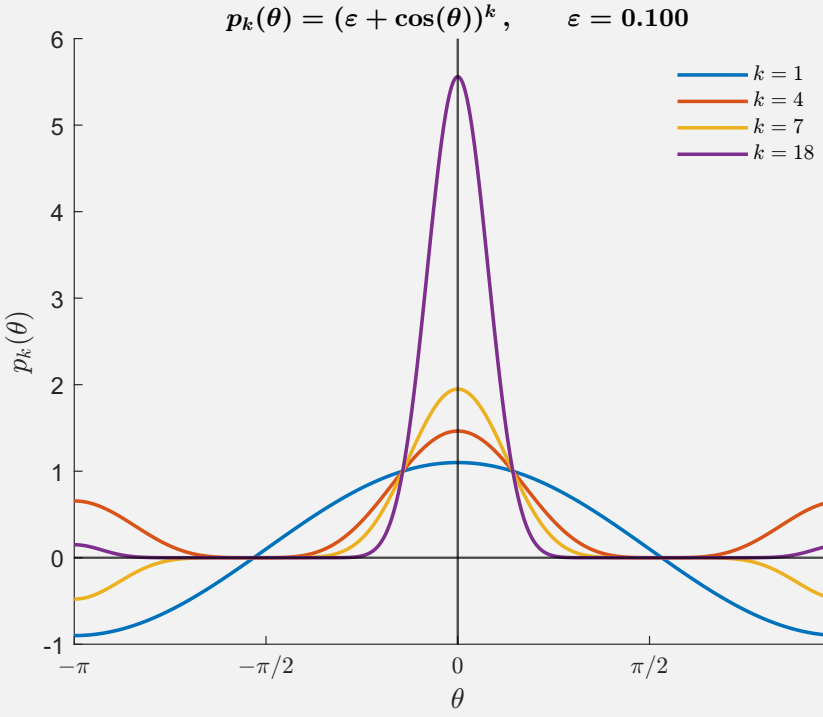


Fig. 30: *Grafici delle funzioni p_k con $k \in \{1, 4, 7, 18\}$ per $\varepsilon = 0.1$*

Ma allora è facile dedurre che dal Teorema 3.6 segue il prossimo:

Corollario 3.7.

Se f è continua e integrabile su $\mathscr{C}$, con $\hat{f}_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f \equiv 0$.

3.1.2 Georg Cantor e l'emergere della teoria degli insiemi

Il problema dell'unicità delle serie di Fourier si inserisce in un più ampio quadro di questioni che, nella matematica dell'Ottocento, portarono a interrogarsi sulla natura e sulle proprietà degli insiemi. È in questo contesto che si colloca l'opera di Georg Cantor, figura centrale nella nascita della moderna teoria degli insiemi.

Appena dopo l'abilitazione a Halle nel 1869 con una tesi sulla teoria dei numeri, la direzione di ricerca di Cantor si allontanò da quest'ultima e si orientò verso l'analisi. Ciò fu dovuto a Eduard Heine, uno dei suoi colleghi più anziani alla Halle, che sfidò Cantor a dimostrare il problema aperto sull'unicità della rappresentazione di una funzione come serie trigonometrica, questione difficile che era stata affrontata da molti matematici – incluso lo stesso Heine –. Cantor risolse il problema dimostrando l'unicità della rappresentazione nell'aprile 1870. [16]

Egli arrivò al seguente risultato che migliora l'analogo di Heine:



(A)



(B)

Fig. 31: ***(A)*** *Georg Cantor (1845-1918);* ***(B)*** *Eduard Heine (1821-1881)*

Proposizione 3.8.

Se una serie trigonometrica converge puntualmente a zero a eccezione di "certi punti", allora i suoi coefficienti sono tutti nulli.

Il nucleo della proposizione è dunque la descrizione precisa dei "certi punti" menzionati. In un primo articolo (cfr. "Cantor 1871" in **[11, p. 321]**), Cantor dimostrò che il teorema valeva se la convergenza era sconosciuta su un insieme infinito $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ senza punti di accumulazione. Tuttavia, a detta dello stesso Cantor, questa non è l'ultima estensione del teorema di Heine e la descrizione del cosiddetto *insieme eccezionale* per cui vale la Proposizione 3.8 avrebbe portato Cantor a uno studio approfondito degli insiemi di punti reali e dei numeri transfiniti.

In un articolo dell'anno successivo (cfr. "Cantor 1872" in **[11, p. 321]**) Cantor pubblicò il risultato più generale che necessitava però di una teoria aritmetica dei numeri reali: i numeri reali sono definiti utilizzando successioni di numeri razionali $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ sottoposte alla *condizione di Cauchy*, detta *« fondamentale »* da Cantor, vale a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|q_{m+n} - q_n| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$ e $m \in \mathbb{N}$ qualsiasi, e vengono identificati come limiti di tali successioni. Più precisamente, Cantor chiama **numero del primo tipo** un numero dato da una sequenza di Cauchy di razionali e, iterando la stessa procedura, definisce **numero del λ-esimo tipo** un numero dato da una sequenza di Cauchy di numeri del $(\lambda - 1)$-esimo tipo.

Osservazione 3.9.

Per $m \geq 0$, la costruzione dei numeri del $(m+2)$-esimo tipo non fornisce nuovi irrazionali, ma dà sempre dei numeri reali, che sono quelli di primo tipo. Al giorno d'oggi, diremmo che ciò è dovuto al fatto che $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo con l'usuale metrica euclidea, cosa che invece non vale per $\mathbb{Q}$ il cui completamento è proprio $\mathbb{R}$.

A questo punto Cantor insiste sui diversi sensi in cui venivano dati i numeri di diverso tipo. Detti V_λ l'insieme dei valori dei numeri del λ-esimo tipo e R_λ l'insieme delle rappresentazioni dei numeri del λ-esimo tipo, avremo

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_\lambda = \cdots \ (= \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R_\lambda \subseteq \cdots .$$

Esempio 3.10.

Prendiamo il numero 0. Esso è un numero del primo tipo, in quanto limite della successione $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$, ma è anche un numero del secondo tipo, in quanto

$$0 = \lim_{k \to +\infty} r_k \quad \text{con} \quad r_k = \lim_{\ell \to +\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+\ell}} \right) , \quad k, \ell \in \mathbb{N} .$$

Da una prospettiva diversa, un numero del secondo tipo corrisponde quindi a un insieme di insiemi di numeri razionali che a sua volta può essere rappresentato anche da un insieme di numeri razionali: nel caso precedente tale insieme era $\{2^{-k} + 2^{-k-\ell} : \ k, \ell \in \mathbb{N}\}$.

Dopodiché Cantor riconosce la necessità di un principio che faccia da ponte tra le quantità numeriche appena definite e i punti di un intervallo, luogo in cui è definito il problema dell'unicità della serie di Fourier: **[11, p. 306]**

> « *[...] a ogni grandezza numerica corrisponde un punto specifico sulla retta, la cui coordinata* [rispetto al segmento unitario] *è uguale a quella grandezza numerica, [...]* »

Usando tale assioma, Cantor fu in grado di interpretare i suoi successivi risultati sugli insiemi di numeri reali anche come proposizioni sugli insiemi di punti su una retta o come proposizioni sulle "varietà lineari di punti". Oltre alla definizione di numeri reali, gli ingredienti tecnici cruciali dell'indagine di Cantor erano le nozioni di **punto limite** e di **insieme derivato** di un sottoinsieme dei numeri reali. Un punto limite era ciò che oggi viene chiamato *punto di accumulazione*, mentre l'insieme derivato P'

di un insieme di punti P è definito come l'insieme di tutti i punti di accumulazione di P. Con tali definizioni, Cantor introdusse una gerarchia di insiemi di punti simile a quella dei numeri vista in precedenza: un insieme di punti P si dice **insieme della ν-esima specie** se e solo se il $(\nu+1)$-esimo insieme derivato è l'insieme vuoto, cioè se e solo se $P^{(\nu+1)} = \varnothing$.

Osservazione 3.11.

In generale, l'insieme dei razionali corrispondenti a un numero del ν-esimo tipo è un insieme della ν-esima specie.

Finalmente Cantor era in grado di poter enunciare il suo nuovo risultato:

Teorema 3.12. (Teorema di Cantor sull'unicità delle serie di Fourier)

Se un'equazione della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$$

vale per ogni valore x a eccezione di quelli corrispondenti ai punti di un dato insieme di punti P di ν-esima specie nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dove ν è un intero arbitrariamente grande, allora $a_0 = 0$ e $a_n = b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Negli anni successivi, Cantor si allontanò definitivamente dal problema dell'unicità delle serie trigonometriche, per dedicarsi allo studio dei sottoinsiemi dei numeri reali e della neonata teoria degli insiemi.

3.2 Il problema della convergenza

Supponiamo di avere una funzione f, che assumiamo sempre essere integrabile (vedi p. 65), definita su $[-\pi, \pi]$.

? *Domanda.*

Le somme parziali della serie di Fourier di f convergono a f puntualmente, ovvero

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f, \theta) = f(\theta) \quad \text{per ogni } \theta \in [-\pi, \pi] \ ?$$

Poiché – come abbiamo già detto – è possibile cambiare in un punto una funzione integrabile senza variare i suoi coefficienti di Fourier, la risposta alla precedente

domanda è NEGATIVA, o per lo meno non in tutti i punti in $[-\pi, \pi]$. A questo punto viene naturale chiedersi:

? *Domanda.*

Le somme parziali della serie di Fourier di f convergono a f puntualmente se assumiamo la funzione f continua e periodica?

Per molto tempo si credeva che sotto queste nuove condizioni la risposta fosse affermativa, ma alla fine del primo capitolo avevamo già anticipato che in realtà anche in questo caso la risposta è NEGATIVA e che il relativo controesempio, vale a dire una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto, fu costruito da du Bois Reymond nel 1876. Vedremo tra poco che cosa succede quando aggiungiamo altre condizioni di regolarità per la funzione f. Per completezza riportiamo che il problema della convergenza puntuale venne del tutto risolto nel 1966 dal matematico svedese Lennart Carleson (1928-) che dimostrò, supponendo l'integrabilità di f, che la serie di Fourier di f converge a f tranne eventualmente in un insieme di punti "di misura nulla"[12].

3.2.1 Convergenza uniforme e assoluta della serie di Fourier

Ricordiamo che, per il Corollario 3.7, una funzione continua e integrabile su $\mathscr{C}$ con coefficienti di Fourier tutti nulli è identicamente nulla. Se in aggiunta supponiamo che la serie dei coefficienti di Fourier converga assolutamente, allora otteniamo un primo risultato sulla convergenza.

Teorema 3.13. (Convergenza uniforme della serie di Fourier)

Sia f una funzione continua e integrabile su $\mathscr{C}$ e assumiamo che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < +\infty$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f, vale a dire che

$$S_N(f, \cdot) \rightrightarrows f(\cdot) \quad \text{per } N \to +\infty.$$

[12] Vedremo meglio cosa significa nella Sezione 3.3.

✍ **Dimostrazione**

Proviamo innanzitutto che le somme parziali della serie di Fourier di f convergono assolutamente e uniformemente. Per la convergenza assoluta abbiamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n| < +\infty$$

per ipotesi. Per la convergenza uniforme analizziamo la coda della serie:

$$\left|\sum_{n>|N|}\hat{f}_n e^{in\theta}\right| \leq \sum_{n>|N|}\left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right| = \sum_{n>|N|}|\hat{f}_n| \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,,$$

in quanto la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_n|$ converge per ipotesi e di conseguenza la sua coda tende a zero; poiché $\sum_{n>|N|}|\hat{f}_n|$ non dipende da θ, abbiamo

$$0 \leq \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}\left|\sum_{n>|N|}\hat{f}_n e^{in\theta}\right| \leq \sum_{n>|N|}|\hat{f}_n| \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

che è esattamente la definizione di convergenza uniforme.

A questo punto, definendo

$$g(\theta) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n e^{in\theta}\,,$$

per ogni θ abbiamo banalmente

$$S_N(f,\theta) = \sum_{n\leq|N|}\hat{f}_n e^{in\theta} \rightrightarrows g(\theta) \quad \text{per } N\to+\infty$$

e quindi, per giungere alla tesi, ci rimane da dimostrare che $f \equiv g$.

Ogni funzione $\theta \mapsto \hat{f}_n e^{in\theta}$ è continua, quindi $S_N(f,\theta)$ è continua perché somma finita di funzioni continue. Siccome *il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo*, la funzione g è continua. Inoltre, per ogni $m\in\mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned}\hat{g}_m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,e^{-im\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n e^{in\theta}\right)e^{-im\theta}d\theta \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta\right) = \hat{f}_m\,,\end{aligned}$$

dove gli operatori di sommatoria e integrale possono essere scambiati a causa dell'uniforme convergenza della serie e nell'ultima uguaglianza si è usata la (3.2). Riassumendo, abbiamo $f-g$ continua e integrabile su $\mathscr{C}$ e $\hat{f}_n - \hat{g}_n = 0$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$ e in conclusione, per il Corollario 3.7, avremo $f-g\equiv 0$, vale a dire $f\equiv g$. □

Vediamo ora in quali casi possiamo concludere la convergenza assoluta della serie

di Fourier. Come scopriremo a breve, la regolarità di f è direttamente correlata al decadimento dei coefficienti di Fourier e, in generale, più la funzione è regolare, più è rapido tale decadimento. Di conseguenza, possiamo aspettarci che le funzioni sufficientemente regolari siano uguali alle loro serie di Fourier. Per enunciare il prossimo risultato in modo più conciso, introduciamo due notazioni standard.

Definizione 3.14.

Date due funzioni f e g, diremo che

$$f(x) \in O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

se e solo se esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ per $x \to x_0$.

Definizione 3.15.

Una funzione f è detta di classe $C^k(I)$ se è differenziabile k volte con continuità in I.

Teorema 3.16. (Convergenza uniforme e assoluta della serie di Fourier)

Sia f una funzione integrabile su $\mathscr{C}$ e di classe $C^2(\mathscr{C})$. Allora

$$\hat{f}_n \in O\left(\frac{1}{|n|^2}\right) \quad \text{per } n \to +\infty \tag{3.3}$$

e la serie di Fourier di f converge assolutamente e uniformemente a f.

✍ **Dimostrazione**

Ricordando che $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f'(-\pi) = f'(\pi)$ per la periodicità di f e f' e che $e^{-in\pi} = e^{in\pi}$, dalla catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
2\pi \hat{f}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
&= \left[f(\theta) \frac{e^{-in\theta}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
&= -\frac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
&= -\frac{i}{n} \left[f'(\theta) \frac{e^{-in\theta}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-in\theta} d\theta
\end{aligned}$$

segue che

$$2\pi |\hat{f}_n| \leq \frac{1}{|n|^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f''(\theta) e^{-in\theta} \right| d\theta \leq \frac{1}{|n|^2} \cdot 2\pi C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è tale che $|f''(\theta)| \leq C$, infatti per ipotesi f'' è una funzione continua in $\mathscr{C}$ compatto e, quindi, è limitata per il teorema di Weierstrass. Pertanto si ha

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{C}{|n|^2} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

ovvero la (3.3).

Dimostriamo che la serie di Fourier converge assolutamente. Osserviamo che per l'ipotesi di integrabilità di f abbiamo $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \in \mathbb{R}$ e quindi $|\hat{f}_0| < +\infty$; per $n \neq 0$ abbiamo invece

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}_n| \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|n|^2} = 2C \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\,.$$

Pertanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right| = |\hat{f}_0| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right| < +\infty\,,$$

ovvero l'assoluta convergenza della serie di Fourier di f.

Dimostriamo che la serie di Fourier converge uniformemente. Usando la stessa argomentazione di prima, possiamo concentrarci solamente per $n \neq 0$. Posto $g_n(\theta) = \hat{f}_n e^{in\theta}$, abbiamo $|g_n(\theta)| = |\hat{f}_n| \leq \frac{C}{|n|^2}$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$. Siccome

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{C}{|n|^2} = 2C \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\,,$$

dall'M-test di Weierstrass (vedi Teorema 2.5) segue l'uniforme convergenza di

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\hat{f}_n e^{in\theta}\right|,$$

ovvero l'uniforme convergenza della serie di Fourier di f.

Infine, per dimostrare che la serie di Fourier di f converge a f, è sufficiente ripetere gli ultimi passaggi visti nella dimostrazione del Teorema 3.13. □

In realtà esistono versioni più forti del Teorema 3.16. Ad esempio è possibile mostrare che la serie di Fourier di una funzione f converge assolutamente a f assumendo solo $f \in C^1(\mathscr{C})$ oppure, più in generale, che converge assolutamente e uniformemente a f se f soddisfa la *condizione di Hölder* di ordine α, con $\alpha > \frac{1}{2}$, vale a dire se

$$\sup_{\theta} |f(\theta + t) - f(\theta)| \leq A \cdot |t|^{\alpha} \quad \text{per ogni } t > 0.$$

3.2.2 Convergenza in media quadratica della serie di Fourier

In questa parte dimostreremo il seguente:

Teorema 3.17. (Convergenza in media quadratica della serie di Fourier)

Se f è una funzione integrabile su $\mathscr{C}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)-S_N(f,\theta)|^2\,d\theta \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,. \tag{3.4}$$

Prima di procedere, ricordiamo qualche notazione che abbiamo presentato nell'introduzione di questo capitolo:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cdot\overline{g(\theta)}\,dx \tag{3.5}$$

$$e_n = e^{in\theta}$$

$$\mathscr{E} = \{e_n,\, n\in\mathbb{Z}\}$$

$$\hat{f}_n = \langle f, e_n\rangle \tag{3.6}$$

$$S_N(f,\cdot) = \sum_{|n|\le N}\hat{f}_n e_n$$

$$\|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta\right)^{1/2} \tag{3.7}$$

In aggiunta, scriveremo $f\perp g$ se f e g sono ortogonali, cioè se $\langle f,g\rangle = 0$.

Esempio 3.18.

Sia $\mathscr{R}$ l'insieme delle funzioni $f:\ [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ integrabili secondo Riemann. Esso è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ in cui l'addizione è definita puntualmente come

$$(f+g)(\theta) \coloneqq f(\theta)+g(\theta)$$

e la moltiplicazione per uno scalare $\lambda\in\mathbb{C}$ è definita come

$$(\lambda f)(\theta) \coloneqq \lambda\cdot f(\theta)\ .$$

Il prodotto interno e la norma di una funzione vengono definiti rispettivamente dalla (3.5) e dalla (3.7). Mostriamo alcune relazioni che saranno utili in seguito.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Osserviamo che se $A,B\in\mathbb{R}$, allora $2AB\le A^2+B^2$; posto $A=\lambda^{1/2}|f(\theta)|$ e $B=\lambda^{-1/2}|\overline{g(\theta)}|$ con $\lambda>0$, otteniamo

$$|f(\theta)\cdot\overline{g(\theta)}| \le \frac{1}{2}\left(\lambda|f(\theta)|^2+\frac{1}{\lambda}|g(\theta)|^2\right)$$

e integrando rispetto a θ in $[-\pi, \pi]$ si ha

$$\begin{aligned}|\langle f, g\rangle| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)\cdot\overline{g(\theta)}|\,d\theta \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\lambda\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(\theta)|^2\,d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda\|f\|^2 + \frac{1}{\lambda}\|g\|^2\right).\end{aligned}$$

Supponendo che sia $\|f\| \neq 0$ e $\|g\| \neq 0$, per

$$\lambda = \frac{\|g\|}{\|f\|}$$

si ottiene finalmente:

$$\boxed{|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|}$$

Teorema di Pitagora. Siano f, g tali che $f \perp g$. Dalla definizione di norma si ha $\|f+g\|^2 = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$ in quanto $\langle f, g\rangle = 0$ per ipotesi. Pertanto:

$$\boxed{f \perp g \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2}$$

Disuguaglianza triangolare. Dalla definizione di norma e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2\end{aligned}$$

e per la non-negatività della norma si ottiene:

$$\boxed{\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|}$$

Possiamo procedere con la dimostrazione del teorema sulla convergenza in media quadratica della serie di Fourier.

✍ Dimostrazione del Teorema 3.17

Dalla (3.2) e dalla (3.6) segue che per ogni $|n| \leq N$ si ha

$$\langle f - \sum_{|m|\leq N} \hat{f}_m e_m,\, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle - \sum_{|m|\leq N} \hat{f}_m\langle e_m, e_n\rangle = \hat{f}_n - \hat{f}_n = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$\left(f - \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n\right) \perp \left(\sum_{|n|\le N} b_n e_n\right) \quad \text{con } b_n \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Se prendiamo $b_n = \hat{f}_n$, allora possiamo applicare il Teorema di Pitagora (vedi Esempio 3.18) alla decomposizione

$$f = \left(f - \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n\right) + \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n$$

e, sempre per l'ortonormalità di $\mathscr{C}$, risulta

$$\|f\|^2 = \left\|f - \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n\right\|^2 + \left\|\sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n\right\|^2 = \left\|f - \sum_{|n|\le N} \hat{f}_n e_n\right\|^2 + \sum_{|n|\le N} |\hat{f}_n|^2,$$

vale a dire

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f,\cdot)\|^2 + \sum_{|n|\le N} |\hat{f}_n|^2. \tag{3.9}$$

A questo punto ci serve un risultato preliminare:

Lemma 3.19. (Lemma di migliore approssimazione)

Se f è integrabile su $\mathscr{C}$, allora

$$\|f - S_N(f,\cdot)\| \le \left\|f - \sum_{|n|\le N} c_n e_n\right\| \quad \textit{per ogni } c_n \in \mathbb{C}.$$

In particolare, l'uguaglianza vale quando $c_n = \hat{f}_n$ per ogni $|n| \le N$.

✍ Dimostrazione

Ponendo $b_n = \hat{f}_n - c_n$ nella (3.8) otteniamo

$$(f - S_N(f,\cdot)) \perp \left(\sum_{|n|\le N} \left(\hat{f}_n - c_n\right) e_n\right)$$

e dunque dal Teorema di Pitagora risulta

$$\begin{aligned}\left\|f - \sum_{|n|\le N} c_n e_n\right\|^2 &= \|f - S_N(f,\cdot)\|^2 + \left\|\sum_{|n|\le N} \left(\hat{f}_n - c_n\right) e_n\right\|^2 \\ &= \|f - S_N(f,\cdot)\|^2 + \sum_{|n|\le N} |\hat{f}_n - c_n|^2 \\ &\ge \|f - S_N(f,\cdot)\|^2.\end{aligned}$$

Infine, l'uguaglianza si ottiene quando $\sum_{|n|\le N} |\hat{f}_n - c_n|^2 = 0$, cioè quando $|\hat{f}_n - c_n|^2 = 0$ per ogni $|n| \le N$, ossia quando $\hat{f}_n = c_n$ per ogni $|n| \le N$. □

Osservazione 3.20.

Il significato geometrico del Lemma 3.19 è che $S_N(f,\cdot)$ è la migliore approssimazione quadratica, ovvero rispetto alla norma $\|\cdot\|$ definita in (3.7), di f tramite polinomi trigonometrici di grado minore o uguale di N.

Supponiamo inizialmente f continua. In tal caso, dato $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico P di grado M tale che $|f(\theta) - P(\theta)| < \varepsilon$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$.[13] Di conseguenza abbiamo $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - P(\theta)|^2 \, d\theta < 2\pi\varepsilon^2$, da cui $\|f - P\| < \varepsilon$. Ma allora, per il Lemma 3.19, possiamo concludere che

$$\|f - S_N(f,\cdot)\| \leq \|f - P\| < \varepsilon \quad \text{per } N \geq M.$$

Pertanto, se f è continua, abbiamo provato che $\|f - S_N(f,\cdot)\| \to 0$ per $N \to +\infty$, vale a dire la (3.4).

Supponiamo ora f solamente integrabile. In tal caso ci avvaliamo del seguente lemma, di cui omettiamo la dimostrazione, non essendo essa essenziale ai fini della trattazione. Per una dimostrazione dettagliata, si rimanda a **[17, pp. 285-286]**.

Lemma 3.21.

Sia f integrabile su $\mathscr{C}$ e tale che $|f(\theta)| \leq B$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$. Allora esiste una successione $\{f_k\}_{k \geq 1}$ di funzioni continue su $\mathscr{C}$ tali che

$$\sup_{\theta \in [-\pi,\pi]} |f_k(\theta)| \leq B \quad \textit{per ogni } k \geq 1 \qquad \textit{e} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f_k(\theta)| \, d\theta \xrightarrow{k \to +\infty} 0 .$$

Poiché $\|f - f_k\|_1 \to 0$ per $k \to +\infty$, scelto $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_{\bar{k}}\|_1 < \varepsilon^2$. Poniamo $g := f_{\bar{k}}$; allora, per il Lemma 3.21, avremo

$$\sup_{\theta \in [-\pi,\pi]} |g(\theta)| \leq \sup_{\theta \in [-\pi,\pi]} |f(\theta)| \leq B \qquad \text{e} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - g(\theta)| \, d\theta < \varepsilon^2 .$$

Poiché $|f(\theta) - g(\theta)| \leq |f(\theta)| + |g(\theta)| \leq 2B$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$, si ha

$$\|f - g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 \, d\theta \leq \frac{2B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - g(\theta)| \, d\theta < \frac{B}{\pi} \varepsilon^2 .$$

Siccome g è continua, esiste un polinomio trigonometrico P tale che $\|g - P\| < \varepsilon$, ma allora per la Disuguaglianza triangolare (vedi Esempio 3.18) si ha

$$\|f - P\| \leq \|f - g\| + \|g - P\| < \left(\sqrt{\frac{B}{\pi}} + 1 \right) \varepsilon$$

e, come nel caso precedente, la tesi segue dal Lemma 3.19. □

Un altro fatto importante segue dalla relazione (3.9): infatti, se valgono le ipotesi del Teorema 3.17, allora la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$ converge a $\|f\|^2$. Abbiamo dunque il:

Corollario 3.22. (Identità di Parseval)

Se f è una funzione integrabile su $\mathscr{C}$, allora

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta\,.$$

Osservazione 3.23.

Se $\mathscr{E} = \{e_n,\, n\in\mathbb{Z}\}$ è un qualunque *insieme ortonormale di funzioni su $\mathscr{C}$ e $\hat{f}_n = \langle f, e_n\rangle$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$, allora sempre dalla (3.9) segue che*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \leq \|f\|^2\,,$$

nota come ***disuguaglianza di Bessel*** *e in cui l'uguaglianza vale – come nell'identità di Parseval – solamente quando $\mathscr{E}$ è una "base", ovvero se*

$$\left\| \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e_n - f \right\| \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,.$$

Siccome il termine generale di una serie convergente tende a 0, dall'identità di Parseval, o equivalentemente dalla disuguaglianza di Bessel, è possibile dedurre il prossimo:

Teorema 3.24. (Lemma di Riemann-Lebesgue)

Se f è integrabile su $\mathscr{C}$, allora $\hat{f}_n \to 0$ per $|n|\to+\infty$, ovvero

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(N\theta)\, d\theta \xrightarrow{N\to+\infty} 0 \qquad e \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(N\theta)\, d\theta \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,.$$

3.2.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier

A differenza della convergenza uniforme, la convergenza in media quadratica non fornisce ulteriori informazioni sul problema della convergenza puntuale considerato all'inizio della sezione.

[13] Corollario 5.4, [17, p. 54].

Esempio 3.25.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, dividiamo l'intervallo $[-\pi, \pi]$ in n sottointervalli di uguale lunghezza, definendo quindi

$$I_{n,j} = \left[-\pi + \frac{2\pi}{n}(j-1), -\pi + \frac{2\pi}{n} j\right], \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dopodiché costruiamo la sequenza $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ordinando gli intervalli $I_{n,j}$ per valori degli indici n e j crescenti:

$$\{I_k\}_{k\geq 1} = \{I_{1,1}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, \dots\}.$$

A questo punto prendiamo la successione di funzioni $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con

$$f_k(\theta) = \chi_{I_k}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in I_k \\ 0, & \theta \notin I_k \end{cases}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione f_k è integrabile perché limitata e avente un numero finito di discontinuità. Inoltre

$$\|f_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\theta)|^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{I_k}(\theta) \, d\theta = \frac{|I_k|}{2\pi} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

In aggiunta, preso $\theta \in [-\pi, \pi]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\bar{j} \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\theta \in I_{n,\bar{j}}$ perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ gli insiemi $I_{n,j}$ formano una partizione dell'intervallo $[-\pi, \pi]$, quindi abbiamo $f_k(\theta) = 1$ infinitamente spesso; d'altro canto, per $n \geq 2$, il punto θ può appartenere al massimo a due degli intervalli $I_{n,j}$ con $j = 1, \dots, n$, dunque ci sono infiniti intervalli che non contengono θ e di conseguenza $f_k(\theta) = 0$ infinitamente spesso. Poiché la successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ oscilla tra 0 e 1, essa non può convergere puntualmente.

In conclusione abbiamo $\|f_k\| \to 0$ ma $f_k \not\to 0$ per $k \to +\infty$.

Se quindi la convergenza in media quadratica è un problema "globale", ovvero riguardante il comportamento di una funzione su tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la convergenza puntuale è un problema "locale", ovvero riguardante il comportamento di una funzione in un intorno di un dato punto. In questa parte dimostreremo che è possibile ottenere convergenza puntuale a partire dalla differenziabilità della funzione da analizzare; per chi fosse interessato, in **[17, pp. 83-87]** viene discusso un esempio, diverso da quello mostrato da du Bois-Reymond, di funzione continua ma la cui serie di Fourier non converge puntualmente.

Diamo ora qualche nozione che ci sarà d'aiuto successivamente.

Definizione 3.26.

Date due funzioni f, g integrabili e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$, definiamo la loro ***convoluzione*** *su $[-\pi, \pi]$ come*

$$(f * g)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(\theta - x)\, dx\,.$$

Definizione 3.27.

Il polinomio trigonometrico definito per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$ definito da

$$D_N(\theta) = \sum_{|n| \leq N} e^{in\theta} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

è detto N-esimo ***nucleo di Dirichlet****.*

Queste due definizioni, oltre ad essere di per sé molto importanti, sono strettamente correlate, come mostra la prossima:

Osservazione 3.28.

La somma parziale N-esima della serie di Fourier di una funzione f è data dalla convoluzione tra la funzione f e l'N-esimo nucleo di Dirichlet.

$$\begin{aligned} S_N(f, \theta) &= \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{in\theta} \\ &= \sum_{|n| \leq N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \right) e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sum_{|n| \leq N} e^{in(\theta - x)}\, dx = (f * D_N)(\theta)\,. \end{aligned}$$

Ora siamo pronti per enunciare e dimostrare l'ultimo teorema che vedremo sui vari tipi di convergenza delle serie di Fourier.

Teorema 3.29. (Convergenza puntuale della serie di Fourier)

Sia f una funzione integrabile su $\mathscr{C}$ e differenziabile in un punto θ_0. Allora

$$S_N(f, \theta_0) \xrightarrow{N \to +\infty} f(\theta_0)\,.$$

✍ **Dimostrazione**

Definiamo

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t}, & 0 < |t| < \pi \\ -f'(\theta_0), & t = 0 \end{cases}.$$

Poiché F è continua in $t = 0$, infatti

$$\lim_{t\to 0} F(t) = -\lim_{t\to 0} \frac{f(\theta_0 + (-t)) - f(\theta_0)}{-t} = -f'(\theta_0) = F(0),$$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $0 < |t| < \delta$ si abbia $|F(t) - F(0)| < \varepsilon$, da cui $|F(t)| < \varepsilon + |F(0)| < +\infty$ per ogni $0 < |t| < \delta$, vale a dire che F è limitata in un intorno di $t = 0$.

Inoltre, la funzione F è integrabile in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, perché

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |F(t)|\,dt &\le \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} \frac{|f(\theta_0 - t)| + |f(\theta_0)|}{|t|}\,dt \\ &\le \frac{1}{\delta}\left(\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(\theta_0)|\,dt + \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(\theta_0 - t)|\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\delta}\left(2(\pi - \delta)\cdot|f(\theta_0)| + \int_{[\theta_0-\pi,\theta_0-\delta]\cup[\theta_0+\delta,\theta_0+\pi]} |f(\vartheta)|\,d\vartheta\right) \\ &\le \frac{2(\pi-\delta)}{\delta} + \frac{1}{\delta}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} |f(\vartheta)|\,d\vartheta \\ &= \frac{2(\pi-\delta)}{\delta} + \frac{1}{\delta}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\vartheta)|\,d\vartheta \;<\; +\infty \end{aligned}$$

dato che f è 2π-periodica e integrabile per ipotesi, e quindi F è limitata anche in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Ma allora F è integrabile in $[-\pi, \pi]$ in virtù della: [17, p. 285]

Proposizione 3.30.

Sia f una funzione limitata sull'intervallo compatto $[a, b]$. Preso $c \in (a, b)$, se per ogni $\delta < 0$ sufficientemente piccolo la funzione f è integrabile sugli intervalli $[a, c - \delta]$ e $[c + \delta, b]$, allora f è integrabile su $[a, b]$.

Per quanto visto nell'Osservazione 3.28 e ricordando che vale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} S_N(f, \theta_0) - f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0 - t)\cdot D_N(t)\,dt - f(\theta_0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta_0 - t) - f(\theta_0))\cdot D_N(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cdot\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,\frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin(Nt)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,t\cos(Nt)\,dt\,. \end{aligned}$$

Ora, la funzione $t \mapsto \frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ è estendibile con continuità se la si pone uguale a 2 in $t = 0$, quindi è limitata in $[-\pi, \pi]$. Essendo $M > 0$ tale che $\left|\frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\right| \leq M$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, avremo che $t \mapsto F(t)\ \frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ è integrabile:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| F(t)\ \frac{t \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)| < +\infty\,.$$

In modo analogo $t \mapsto t$ è continua in $[-\pi, \pi]$, quindi limitata, e da ciò deduciamo l'integrabilità di $t \mapsto F(t)\ t$.

Di conseguenza, per il Lemma di Riemann-Lebesgue (Teorema 3.24) abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\ \frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ \sin(Nt)\,dt \xrightarrow{N\to+\infty} 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,t\,\cos(Nt)\,dt \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,.$$

Pertanto $S_N(f, \theta_0) \to f(\theta_0)$ per $N \to +\infty$. □

Osservazione 3.31.

La validità del Teorema 3.29 rimane tale anche se si suppone che la funzione f, integrabile su $\mathscr{C}$, soddisfi la condizione di Lipschitz *(ovvero la condizione di Hölder di ordine $\alpha = 1$) nel punto θ_0, cioè se per $M > 0$ costante:*

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| \leq M \cdot |\theta - \theta_0| \quad \textit{per ogni } \theta \in [-\pi, \pi].$$

Una conseguenza diretta del Teorema 3.29 è il cosiddetto *principio di localizzazione di Riemann*: la convergenza della somma parziale N-esima della serie di Fourier di una funzione in un dato punto dipende esclusivamente dal comportamento della funzione in un intorno di quel punto.

Corollario 3.32. (Principio di localizzazione di Riemann)

Siano f e g due funzioni integrabili su $\mathscr{C}$ e si supponga che per qualche $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ esista un intervallo aperto I contenente θ_0 e tale che $f \equiv g$ in I. Allora

$$S_N(f, \theta_0) - S_N(g, \theta_0) \xrightarrow{N\to+\infty} 0\,.$$

✍ **Dimostrazione**

In I abbiamo $f - g \equiv 0$, dunque è differenziabile in $\theta_0 \in I$. La tesi segue applicando alla funzione $f - g$ il Teorema 3.29. □

3.3 Dall'integrale di Riemann a Lebesgue

Nella teoria dell'integrazione, la fine del XIX secolo rappresenta un momento di profonda trasformazione, segnato dalla progressiva consapevolezza dei limiti della teoria di Riemann e dalla ricerca di un quadro più generale. L'introduzione della nozione di misurabilità e il successivo sviluppo della teoria della misura resero possibile una nuova formulazione dei concetti di integrale e di integrabilità, nella quale i processi di limite potevano essere affrontati con strumenti più adeguati. Un aspetto particolarmente significativo di questa transizione emerge considerando la struttura dello spazio delle funzioni Riemann-integrabili.

Esempio 3.33.

Sia $\mathscr{R}([0,1])$ lo spazio delle funzioni integrabili in senso proprio secondo Riemann su $[0,1]$, dotato della norma

$$\|f\|_1 \coloneqq \int_0^1 |f(x)|\,dx\,.$$

Consideriamo la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$x \in [0,1] \;\mapsto\; f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le x < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

e la funzione

$$x \in [0,1] \;\mapsto\; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $f_n \in \mathscr{R}([0,1])$ perché limitata e con un solo punto di discontinuità in $x = \frac{1}{n}$, inoltre

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,.$$

Pertanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_1$ in quanto

$$\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \xrightarrow{n,m\to+\infty} 0\,,$$

ma il suo limite è $f \notin \mathscr{R}([0,1])$ perché non è limitata in un intorno destro di $x = 0$. In conclusione, $\mathscr{R}([0,1])$ non è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.

Questo suggerisce naturalmente la necessità di ampliare lo spazio delle funzioni integrabili in modo da ottenere uno spazio completo.

3.3.1 La teoria della misura di Borel

Nella sua tesi di dottorato del 1894, il matematico francese **Émile Borel** sviluppò un'idea destinata ad avere un ruolo importante nello sviluppo della teoria delle funzioni complesse e non solo. Sia $C \subset \mathbb{C}$ una curva chiusa convessa che separa il piano in una regione limitata S e in una illimitata T: Borel riuscì, in certi casi, a estendere analiticamente espressioni della forma



Fig. 32: *Émile Borel (1871-1956)*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{z - a_n}, \qquad \text{con } z, A_n, a_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| < +\infty$$

nonostante, una decina di anni prima, Poincaré (1854-1912) – che fu uno dei suoi relatori **[10, p. 99]** – provò, supponendo che i punti a_n formino un sottoinsieme di $C \cup S$ denso ovunque in C e che C abbia in ogni suo punto una tangente e raggio di curvatura, che una tale funzione f definita su T non potesse essere estesa analiticamente con continuità oltre C. Borel considerò serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}} \tag{3.10}$$

dove m_n è una costante limitata dall'alto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|$ è convergente e l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme denso di C con chiusura costituita al più da curve e punti isolati. Borel dimostrò che, sotto tali condizioni, la funzione definita dalla (3.10) possiede molte delle proprietà caratteristiche delle funzioni analitiche, compresa in particolare la proprietà espressa dal cosiddetto "Teorema dell'identità"[14], al quale Weierstrass aveva fatto riferimento come a una proprietà che non si può assumere per espressioni analitiche che non rappresentino la stessa funzione analitica **[10, p. 97]**.

La scoperta più significativa di Borel dal punto di vista dello sviluppo della teoria della misura è, specializzata al contesto dell'articolo di Poincaré, la seguente: quando $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{|A_n|}$ converge, ogni punto di T può essere collegato a un qualsiasi punto di S mediante un arco circolare sul quale la serie (3.10), con $m_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, converge assolutamente e uniformemente, anche se l'arco interseca C.

[14] Se due funzioni analitiche assumono gli stessi valori in un insieme infinito di punti che ha un punto limite, allora devono essere identiche in tutto il loro dominio comune di definizione.

Pertanto, in un certo senso, la funzione definita dalla (3.10) può essere continuata analiticamente attraverso C fino a S. La dimostrazione di Borel di questo risultato, riportata in **[10, pp. 100-101]**, suggerì l'importanza di una definizione del concetto di *misura* che impiega un numero infinito di intervalli per ricoprire l'insieme che si sta misurando.

Al fine di illustrare meglio il contesto in cui gli insiemi misurabili e le loro misure divennero fondamentali, studiamo il caso più semplice, mostrato nella prima parte della monografia *Leçons sur la théorie des fonctions* di Borel del 1898, in cui ci restringiamo nell'intervallo unitario $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|} \qquad \text{con } x, a_n \in (0,1),\ A_n > 0 \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{A_n} < +\infty\,, \tag{3.11}$$

dove si suppone che $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ sia denso in $[0,1]$.

? *Domanda.*

Com'è fatto l'insieme dei punti in cui la serie (3.11) converge?

Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{A_n}$ è convergente, esiste una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ con $u_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$v := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{u_n}$$

sia anch'essa convergente[15]. Posto inoltre

$$v_n(k) = \frac{A_n}{2k\,u_n}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

prendiamo la successione di intervalli $I_n(k) = [a_n - v_n(k)\,, a_n + v_k(k)]$, con $n \in \mathbb{N}$, e definiamo

$$B_k := \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n(k)\ .$$

Ora, se $x \in [0,1]$ è tale che $x \notin B_k$, allora abbiamo $|x - a_n| > v_n(k)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia

$$\frac{A_n}{|x-a_n|} < \frac{A_n}{v_n(k)} = 2k\,u_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\,,$$

da cui l'uniforme convergenza della serie (3.11) in $[0,1] \setminus B_k$. A questo punto, detto D l'insieme dei punti in cui la serie (3.11) non converge, abbiamo $D \subseteq \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$, ovvero $D \subseteq B_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché B_k è costituito da intervalli che hanno al massimo lunghezza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2v_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{u_n} = \frac{v}{k}\,,$$

[15] Una scelta possibile è per esempio $u_n = \sqrt{A_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

l'insieme D può essere ricoperto da una quantità numerabile di intervalli $I_n(k)$ di lunghezza arbitrariamente piccola. In altre parole, la serie (3.11) converge uniformemente in insiemi con misura nulla.

Questi risultati, applicati al caso più generale delle serie della forma (3.10), occupano la seconda parte delle *Leçons* di Borel. Per semplicità si assume che tutti gli insiemi siano sottoinsiemi dell'intervallo unitario $[0,1]$ e di conseguenza egli definisce gli insiemi misurabili e la loro misura come segue: **[10, pp. 103-104]**

> *« Quando un insieme è formato da tutti i punti contenuti in un numero infinito numerabile di intervalli non sovrapposti di lunghezza totale s, diremo che l'insieme* ha misura s. *Quando due insiemi non hanno punti in comune e le loro misure sono s e s', l'insieme ottenuto unendoli, cioè la loro somma, ha misura $s+s'$. [...]*
> *Più in generale, se abbiamo un numero infinito numerabile di insiemi che non hanno punti in comune tra le coppe e hanno misure rispettivamente $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, la loro somma [...] ha misura*
>
> $$s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots .$$
>
> *Tutto ciò è una conseguenza della definizione di misura. Ecco alcune nuove definizioni: se un insieme E ha misura s e contiene tutti i punti di un insieme E' la cui misura è s', si dirà che* l'insieme $E \setminus E'$, formato dai punti di E che non appartengono a E', ha misura $s - s'$. *[...]*
> Gli insiemi la cui misura può essere definita in virtù delle definizioni precedenti saranno da noi chiamati insiemi misurabili, *[...]* »

Ricordiamo il fatto che l'infinità numerabile di intervalli nel ricoprimento è indispensabile per l'analisi del comportamento della serie (3.11). Infatti, quando $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ è denso in $[0,1]$, l'insieme dei punti di divergenza D e l'insieme dei punti di convergenza $[0,1] \setminus D$ hanno entrambi misura esterna 0 e misura interna 1, di conseguenza la natura distinta dei due insiemi non è evidente. La proprietà fondamentale per l'applicazione alla serie (3.11), notata da Borel, è che *ogni insieme numerabile ha misura nulla*, tuttavia egli non si soffermò sulla questione di quanto sia esteso il sistema degli insiemi misurabili.

Purtroppo, Borel non fu ben compreso inizialmente; ad esempio, il matematico tedesco Schönflies (1853-1928) preparò una lunga relazione che non diede giustizia al matematico francese **[10, pp. 106-108]**. Uno dei pochi – se non l'unico – a cogliere e a sviluppare le idee di Borel fu un giovane studente all'*École Normale* proprio quando Borel impartiva le sue lezioni: il suo nome è Henri Léon Lebesgue.

3.3.2 La teoria dell'integrazione di Lebesgue

Henri Lebesgue frequentò, proprio come Borel, e completò i suoi studi all'*École Normale Supérieure* nel 1897 e gli anni successivi furono per lui un periodo produttivo che portò alla pubblicazione di vari articoli. Subito dopo aver insegnato in un liceo a Nancy per un paio di anni, Lebesgue finì e discusse la sua tesi di dottorato [13] nel 1902 alla Sorbonne (Parigi) per poi, sempre nello stesso anno, diventare *mâitre de conférences* in matematica presso la Facoltà di Scienze di Rennes. [16]



Fig. 33: *Henri Lebesgue (1875-1941)*

Già nella prima pagina dell'introduzione del suo scritto, Lebesgue spiega la principale criticità dell'integrale di Riemann e, quindi, lo scopo della sua tesi:

> cette étude, et voici pourquoi. On sait qu'il existe des fonction dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait M.r Jordan, la définition de l'intégrale qu'a donnée Riemann; de sorte que l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral:
>
> Trouver une fonction connaissant sa dérivée.
>
> Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.

Fig. 34: *Estratto dall'introduzione della tesi di dottorato di Lebesgue*

> *« [...] È noto che esistono funzioni derivate non integrabili quando si adotta, come fa il signor Jordan, la definizione di integrale data da Riemann; pertanto, l'integrazione, così come definita da Riemann, non ci permette in tutti i casi di risolvere il problema fondamentale del calcolo integrale:*
>
> ***Trovare una funzione data la sua derivata.***
>
> *Può quindi sembrare naturale cercare un'altra definizione di integrale, tale che, in casi più estesi, l'integrazione sia l'operazione inversa della derivazione. »*

Lebesgue parte dalla misurabilità degli insiemi, definendo una misura m non-negativa su insiemi limitati tale che [13, p. 236]

(M1) $m(E) \neq 0$ per qualche insieme E, vale a dire che $m \not\equiv 0$;

(M2) $m(E+a) = m(E)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, dove con $E + a = \{x + a \colon x \in E\}$;

(M3) se $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sono insiemi a due a due disgiunti, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n) \ .$$

? *Domanda.*

Come possono essere definite delle misure per sottoinsiemi di $[0,1]$?

Notiamo che, dalle precedenti proprietà, segue necessariamente che $m([0,1]) \neq 0$. Infatti, se fosse $m([0,1]) = 0$, allora dalla **(M3)** si ha $m([0,1)) + m(\{1\}) = 0$, da cui, per la non-negatività, si ottiene $m([0,1)) = m(\{1\}) = 0$. Ora, dalla **(M2)**, segue che $m([n, n+1)) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e tali insiemi sono a due a due disgiunti, quindi, dalla **(M3)**, si ha $m(\mathbb{R}) = 0$. A questo punto, preso $E \subseteq \mathbb{R}$, se riusciamo a dimostrare che $m(E) \leq m(\mathbb{R})$, allora abbiamo finito perché, in tal caso, si avrà $m(E) = 0$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$, che contraddice la **(M1)**; ma tale proprietà (detta *di monotonia*) è immediata, in quanto dalla **(M3)** e dalla non-negatività segue $m(\mathbb{R}) = m(E) + m(\mathbb{R} \setminus E) \geq m(E)$.

Ponendo per convenzione $m([0,1]) = 1$, è quindi possibile associare a ogni intervallo arbitrario I la sua lunghezza $L(I)$ alla sua misura $m(I)$; da notare, infatti, che per $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $I_m \cap I_n = \varnothing$ per $m \neq n$ si ha

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right) = L\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(I_n) \ .$$

Di conseguenza, volendo associare una misura m a un insieme arbitrario E, per $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{N}} I_n$, con $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ e $\{I_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ intervalli a due a due disgiunti, deve essere

$$m(E) \leq m\left(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} I_n\right) \leq \sum_{n\in\mathcal{N}} L(I_n) \ .$$

Pertanto, l'estremo superiore dell'ultimo membro della precedente disequazione tra i ricoprimenti di E dà un *upper bound* per una possibile misura di E. **[13, p. 237]**

Definizione 3.34.

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme limitato, allora indicheremo con

$$m_e(E) \coloneqq \inf\left\{\sum_{n\in\mathcal{N}} L(I_n) \ : \ \mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}, \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{N}} I_n, \ I_m \cap I_n = \varnothing \ \forall m \neq n\right\}$$

la sua ***misura esterna****.*

A questo punto, se $E \subseteq [0,1]$, definiamo $\mathfrak{C}(E) \coloneqq [0,1] \setminus E$ il *complementare* di E rispetto a $[0,1]$. Ora, se m è definita, si deve avere $m(\mathfrak{C}(E)) \leq m_e(\mathfrak{C}(E))$ e di conseguenza

$$m(E) \geq m([0,1]) - m_e(\mathfrak{C}(E)) \ ,$$

da cui il *lower bound* per una possibile misura di E. **[13, pp. 237-238]**

Definizione 3.35.

Se $E \subseteq [0,1]$, allora indicheremo con

$$m_i(E) \coloneqq m([0,1]) - m_e(\mathfrak{C}(E))$$

la sua ***misura interna****.*

In particolare:

Definizione 3.36.

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato è detto ***misurabile*** *se $m_i(E) = m_e(E)$. In tal caso, la quantità $m(E) = m_i(E) = m_e(E)$ si dice* ***misura*** *di E.*

Pertanto, gli insiemi misurabili secondo Lebesgue rappresentano una classe estesa di insiemi per la quale il problema della misura, come posto dallo stesso Lebesgue definendo le condizioni **(M1)-(M2)-(M3)**, ha una soluzione unica. Successivamente Lebesgue dimostra che un'unione numerabile di insiemi misurabili è anch'essa misurabile, da cui la validità di **(M3)** e delle seguenti proprietà: **[10, p. 123]**

$$\begin{aligned}
&m(E_1 \setminus E_2) = m(E_1) - m(E_2) && \text{quando } E_2 \subseteq E_1\,; \\
&m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(E_n) && \text{quando } E_n \subseteq E_{n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,; \\
&m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(E_n) && \text{quando } E_{n+1} \subseteq E_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Il problema della misura è dunque risolto per la classe degli insiemi numerabili.

? *Domanda.*

Che relazione c'è tra la misurabilità secondo Lebesgue e quella secondo Borel?

Sia E un insieme Lebesgue-misurabile e $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una qualunque successione di numeri positivi che decresce con monotonia a 0 per $n \to +\infty$. Per la Definizione 3.34, E può essere contenuto in un insieme formato dall'unione A_i di una quantità numerabile di intervalli a due a due disgiunti avente misura $m(E) + \varepsilon_i$. Ma

allora $E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ è Borel-misurabile[16] e contiene E, di conseguenza $E_1 \setminus E$ ha misura nulla, infatti dalla relazione $m(E) \leq m(E_1) \leq m(A_i) \leq m(E) + \varepsilon_i$ e passando al limite per $i \to +\infty$ otteniamo $m(E_1) = m(E)$, da cui, ricordando che $m(E_1) = m(E) + m(E_1 \setminus E)$ per la **(M3)**, segue $m(E_1 \setminus E) = 0$. Di conseguenza, sempre per la Definizione 3.34, $E_1 \setminus E$ può essere contenuto in un'unione numerabile B_i di intervalli, sempre a due a due disgiunti, tale che $m(B_i) \leq \varepsilon_i$ e $B_i \subseteq A_i$. Ora, l'insieme $\mathscr{e} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i$ è Borel-misurabile e la sua misura è nulla, infatti vale $0 \leq m(\mathscr{e}) \leq m(B_i) \leq \varepsilon_i \to 0$ per $i \to +\infty$. Riassumendo, Lebesgue ha dimostrato il seguente risultato, con $E_2 = E_1 \setminus \mathscr{e}$:

Teorema 3.37.

Se E è misurabile (secondo Lebegsue), allora esistono due insiemi E_1 e E_2 misurabili secondo Borel tali che $E_1 \supseteq E \supseteq E_2$ e $m(E_2) = m(E) = m(E_1)$.

Quest'ultimo risultato mostra, come ha sottolineato Lebesgue, che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono precisamente quegli insiemi a cui viene assegnata una misura che Borel aveva introdotto per gli insiemi cosiddetti non-boreliani. La teoria della misura di Lebesgue, anche se sviluppata con un grado molto maggiore di chiarezza e generalità rispetto a quella di Borel, rappresenta dunque un'estensione naturale delle idee di Borel; tuttavia, il merito di applicare questa teoria della misura alla teoria dell'integrazione va interamente a Lebesgue.

L'applicazione viene fatta nel secondo capitolo della sua tesi, che inizia con una discussione sulla relazione tra il contenuto degli insiemi e il significato geometrico dell'integrale $\int_{[a,b]} f\,dm$. Data una funzione f di segno qualunque, detto

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b\,, \quad x\,f(x) \geq 0\,, \quad 0 \leq y^2 \leq (f(x))^2\}\,,$$

poniamo

$$E_1 := \{(x,y) \in E : \ y \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad E_2 := \{(x,y) \in E : \ y < 0\}\,. \tag{3.13}$$

Lebesgue afferma, usando la terminologia di Jordan, che l'integrale per difetto è dato dalla differenza tra la misura interna di E_1 e quella esterna di E_2, mentre l'integrale per eccesso è dato dalla differenza tra la misura esterna di E_1 e quella interna di E_2. Dopodiché aggiunge: **[13, p. 250]**

[16] In termini moderni, la σ-algebra di Borel è la più piccola famiglia di insiemi che contiene tutti gli intervalli aperti e che è chiusa rispetto a complementari, unioni numerabili e intersezioni numerabili. Siccome A_i è boreliano (Borel-misurabile) per ogni $i \in \mathbb{N}$ in quanto unione numerabile di insiemi boreliani, anche E_1 è boreliano perché intersezione numerabile di insiemi boreliani.

17. Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: *si l'ensemble E est mesurable, (auquel cas E_1 et E_2 le sont) nous appellerons intégrale définie de f, prise entre a et b, la quantité*

$$m(E_1) - m(E_2).$$

Les fonctions f correspondantes seront dites sommables.

Relativement aux fonctions non sommables, s'il en existe, nous définirons les intégrales inférieure et supérieure comme égales à

$$m_i(E_1) - m_e(E_2) \qquad m_e(E_1) - m_i(E_2).$$

Ces deux nombres sont compris entre les intégrales par défaut et par excès.

Fig. 35: *Legame tra teoria della misura e teoria dell'integrazione*

« *Questi risultati suggeriscono immediatamente la seguente generalizzazione:* se l'insieme E è misurabile (in tal caso lo sono anche E_1 ed E_2), chiameremo l'integrale definito di f, preso tra a e b, la quantità

$$m(E_1) - m(E_2) \ .$$

Le corrispondenti funzioni f si diranno **sommabili**.

Rispetto alle funzioni non sommabili, se esistono, definiremo gli integrali inferiore e superiore come uguali a

$$m_i(E_1) - m_e(E_2) \qquad e \qquad m_e(E_1) - m_i(E_2) \ .$$

Questi due numeri sono compresi tra gli integrali per difetto e per eccesso. »

Questa generalizzazione – abbastanza semplice – è solamente l'inizio del contributo di Lebesgue alla teoria dell'integrazione perché, come vedremo tra poco, nella sua tesi dimostrò la netta superiorità della sua definizione rispetto a quelle di Riemann e dei suoi predecessori.

Il primo passo in questa direzione fu quello di ottenere una formulazione più praticabile dell'integrale generalizzato, ovvero di definire l'integrale analiticamente, in analogia con quanto fatto da Riemann in **[15]**. Supponiamo per semplicità che f sia una funzione non-negativa definita su $[a, b]$. Ricordiamo che, in sostanza, l'idea di Riemann era quella di partizionare l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli con ampiezza che tende a 0 per $n \to +\infty$; in tal modo, le differenze tra

$$\overline{f_i} := \sup_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x) \qquad \text{e} \qquad \underline{f_i} := \inf_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x)$$

diventano anch'esse sempre più piccole nel caso in cui f è continua, quindi i valori della somma superiore e di quella inferiore, dati rispettivamente da

$$S = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}\,(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{e} \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \underline{f_i}\,(x_{i+1} - x_i)\ ,$$

tendono entrambi al valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ per $n \to +\infty$.
Tuttavia, nel caso in cui f sia ovunque discontinua, la scelta dei sottointervalli (x_i, x_{i+1}) non può in alcun modo garantire che la differenza $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ diventi infinitesima. L'idea innovativa di Lebesgue fu quindi quella di partizionare l'immagine della funzione f, che si suppone limitata, invece del suo dominio. Più precisamente, detti

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)\ ,$$

sia $\mathscr{P}$ la partizione $m = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = M$ dell'intervallo $[m, M] = f([a, b])$ e consideriamo gli insiemi

$$e_i := \{x \in [a, b] :\ a_i \le f(x) < a_{i+1}\}\ , \qquad \text{per } i = 0, \dots, n-1\ .$$

Osservazione 3.38.

In [13, p. 252] Lebesgue utilizza una notazione leggermente diversa, infatti considera separatamente le controimmagini di intervalli aperti e le controimmagini dei punti della partizione $\mathscr{P}$: in altre parole considera

$$e_i = \{x \in [a, b] :\ a_i < f(x) < a_{i+1}\} \qquad \text{e} \qquad e'_j = \{x \in [a, b] :\ f(x) = a_i\}$$

per $i = 0, \dots, n-1$ e $j = 0, \dots, n$.

Gli insiemi $\{e_i\}_{i=0}^{n-1}$ partizionano $[a, b]$ e l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b\,,\quad 0 \le y \le f(x)\}$$

è contenuto tra i plurirettangoli[17] aventi come base e_i e altezze rispettivamente a_i e a_{i+1}: pertanto abbiamo $\sigma \le m(E) \le \Sigma$, dove

$$\sigma := \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot m(e_i) \qquad \text{e} \qquad \Sigma := \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \cdot m(e_i)\ .$$

Detto inoltre

$$\|\mathscr{P}\| := \max_{i=0,\dots,n-1} \{a_{i+1} - a_i\}$$

[17] Per *plurirettangolo* si intende un'unione finita di rettangoli disgiunti.

il *parametro di finezza* della partizione $\mathscr{P}$, abbiamo

$$\Sigma - \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot m(e_i) \leq \|\mathscr{P}\| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} m(e_i) = \|\mathscr{P}\| \cdot (b-a) \ .$$

Ma allora, per $\|\mathscr{P}\| \to 0$, le due quantità σ e Σ convergono allo stesso valore che può essere definito come *integrale*. Per rendere il ragionamento completo, bisognerebbe dimostrare che gli insiemi e_i, $i = 0, \ldots, n-1$, sono misurabili: questa è una conseguenza del fatto che, se una funzione f ha integrale

$$\int_{[a,b]} f \, dm = m(E_1) - m(E_2)$$

con gli stessi E_1 ed E_2 definiti in (3.13), allora l'insieme $\{x \in [a,b] : \ f(x) > k\}$ è misurabile per ogni $k \in \mathbb{R}$. La strategia dimostrativa di quest'ultima affermazione, seguita dallo stesso Lebesgue, è riportata in **[10, p. 125]**. In conclusione:

Definizione 3.39.

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta ***misurabile*** *se tutti gli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : \ c \leq f(x) < d\} \ , \qquad \text{con } c, d \in \mathbb{R} \text{ tali che } c < d \ ,$$

sono misurabili secondo Lebesgue. Se f è limitata e misurabile in $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, allora la quantità

$$\int_{[a,b]} f \, dm \ = \ \lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, m(e_i) \ = \ \lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \, m(e_i) \qquad (3.14)$$

è detta ***integrale di Lebesgue****.*

Ricordiamo che lo scopo principale della tesi di Lebesgue era quello di trovare una generalizzazione del concetto di integrale definito tale che l'integrale definito di una derivata, espresso in funzione del secondo estremo di integrazione, sia una primitiva. Il fatto che l'integrale di Lebesgue (3.14) estenda il concetto di integrale alla Riemann è accertato dal seguente:

Teorema 3.40.

Ogni funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono, cioè

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, dm \ .$$

Per dimostrare il precedente enunciato è necessario il prossimo:

Lemma 3.41.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione integrabile secondo Riemann, allora*

$$m\left(\{x \in [a,b] : \ f \text{ non è continua in } x\}\right) = 0 \, .$$

Non si riportano le dimostrazioni di questi due risultati, in quanto esse richiederebbero l'introduzione di ulteriori nozioni, esulando quindi dagli obiettivi del presente lavoro, pur essendo reperibili nei principali testi di riferimento sulla teoria della misura. Illustriamo comunque brevemente la strategia dimostrativa del Lemma 3.41:

> Si considera l'oscillazione di f nei punti e si scrive l'insieme D dei punti di discontinuità come $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$, dove D_n è formato dai punti in cui l'oscillazione di f è almeno $\frac{1}{n}$. Poiché f è Riemann-integrabile, si può scegliere una partizione per cui la differenza tra somma superiore e inferiore di Darboux è arbitrariamente piccola. Gli intervalli della partizione che possono contenere punti di D_n devono avere oscillazione almeno $\frac{1}{n}$; di conseguenza, la loro lunghezza totale può essere resa arbitrariamente piccola. Quindi ogni D_n ha misura nulla, pertanto D ha misura nulla.

D'altra parte, esistono funzioni che sono integrabili secondo Lebesgue, ma che non sono integrabili secondo Riemann. L'esempio più noto è la classica *funzione di Dirichlet*, definita come

$$x \in [0,1] \ \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \, , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 \, , & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \, ,$$

che non è Riemann-integrabile per la densità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $[0,1]$, ma è Lebesgue-integrabile in quanto[18]

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}} \, dm = m\left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right) = 0 \, .$$

Non ci rimane che concludere dimostrando che, a differenza dell'integrale alla Riemann, con l'integrale alla Lebesgue possiamo risolvere in molti casi il problema fondamentale del calcolo integrale, riportato in Figura 34. Iniziamo con un esempio, che Lebesgue attribuisce esplicitamente al matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) **[13, p. 265]**, di funzione derivata ma non integrabile alla Riemann.

[18] Non è complicato dimostrare che, se $A \subseteq E$ è misurabile, allora $\int_E \chi_A \, dm = m(A)$.

Esempio 3.42.

Si consideri un insieme $E \subseteq (0,1)$ chiuso, *nowhere dense* – vale a dire non denso in alcun sottointervallo di $(0,1)$ – e di misura positiva.

Osservazione 3.43.

*Un esempio di insieme che soddisfa le precedenti ipotesi è l'**insieme di Smith-Volterra-Cantor** opportunamente traslato e riscalato. L'insieme V di Smith-Volterra-Cantor è ottenuto con un procedimento analogo a quello per l'insieme C di Cantor; partendo da $V_0 = [0,1]$, l'insieme V_n si ottiene togliendo da ciascuno dei 2^{n-1} intervalli di V_{n-1} il sottointervallo aperto centrato di lunghezza $\frac{1}{4^n}$: detto ciò si definisce*

$$V = \lim_{n\to+\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} V_n \,.$$

Per costruzione, l'insieme di Smith-Volterra-Cantor non contiene intervalli, è chiuso perché intersezione numerabile di chiusi e, durante la procedura, vengono rimossi da $[0,1]$ intervalli di lunghezza totale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui si ha $m(V) = \frac{1}{2}$. Ma allora ci basta prendere

$$E \coloneqq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}V = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x : \ x \in V \right\}.$$

Per le prime iterazioni della costruzione di V si veda la Figura **??**.

Sia $(a,b) \subseteq \mathfrak{C}(E)$ con $a, b \in E$ (usando la terminologia di Lebesgue, tratta da Baire, chiameremo un simile intervallo *contiguo* a E) e sia $c = \frac{a+b}{2}$.

Proposizione 3.44.

La funzione

$$\varphi(x-a) = 2(x-a)\sin\left(\frac{1}{x-a}\right) - \cos\left(\frac{1}{x-a}\right) \tag{3.15}$$

si annulla infinite volte in (a,c) ed esiste $d \in (0, c-a)$ tale che

$$a + d = \max\{x \in (a,c) : \ \varphi(x-a) = 0\}\,. \tag{3.16}$$

✍ **Dimostrazione**

Guardiamo quando (3.15) si annulla. Posto $u = \frac{1}{x-a}$, siccome $x > a$, abbiamo $u > 0$ e $2\sin u - u\cos u = 0$, da cui

$$\tan u = \frac{u}{2}\,, \qquad u \in \left(\frac{1}{c-a}, +\infty\right)\,.$$

Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{\pi(c-a)}$, si ha $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{1}{c-a}, +\infty\right)$ e su ciascuno di tali intervalli la funzione $\psi(u) = \tan u - \frac{u}{2}$ è tale che

$$\begin{aligned} &\psi \text{ è continua}\,, && \psi'(u) > 0\,,\\ &\psi(n\pi) = -\frac{n}{2}\pi < 0\,, && \lim_{u \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \psi(u) = +\infty\,. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > \frac{1}{\pi(c-a)}$, esiste un unico $u_n \in \left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ tale che $\tan u_n = \frac{u_n}{2}$. A questo punto abbiamo che

$$x_n = a + \frac{1}{u_n} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > \frac{1}{\pi(c-a)}$$

sono gli infiniti zeri in (a, c) di (3.15) e che $x_n \to a$ per $n \to +\infty$, poiché $u_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, quindi esiste $d \in (0, c-a)$ tale che valga (3.16). □

Definiamo la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in E$$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x-a)\,, & x \in (a, a+d)\\ 0\,, & x \in [a+d, b-d] \\ -\varphi(b-x)\,, & x \in (b-d, d) \end{cases} \qquad \text{per ogni } (a,b) \text{ contiguo a } E$$

Per quanto visto prima, f è continua in ogni intervallo contiguo a E, mentre i punti di E sono di discontinuità di seconda specie per f. Inoltre f è limitata, infatti per $x \in E$ abbiamo $f(x) = 0$, mentre per $x \in (a,b)$ contiguo a E:

- se $x \in (a, a+d)$, allora $0 < x - a < d < c - a < 1$ e di conseguenza
$$|f(x)| \le 2|x-a| \left|\sin\left(\frac{1}{x-a}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{1}{x-a}\right)\right| \le 3\,;$$
- se $x \in [a+d, b-d]$, allora $f(x) = 0$;
- se $x \in (b-d, b)$, allora $0 < b - x < d < c - a < 1$ e di conseguenza
$$|f(x)| \le 2|b-x| \left|\sin\left(\frac{1}{b-x}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{1}{b-x}\right)\right| \le 3\,.$$

Definiamo poi la funzione $F:\ (0,1)\to\mathbb{R}$ come segue:

$$F(x)=0 \qquad \text{per ogni } x\in E$$

$$F(x)=\begin{cases}(x-a)^2\sin\left(\frac{1}{x-a}\right), & x\in(a,a+d)\\ d^2\sin\left(\frac{1}{d}\right), & x\in[a+d,b-d]\\ (b-x)^2\sin\left(\frac{1}{b-x}\right), & x\in(b-d,d)\end{cases} \qquad \begin{array}{l}\text{per ogni } (a,b)\\ \text{contiguo a } E\end{array}$$

Osserviamo che per ogni $x\in\mathfrak{C}(E)$ si ha che $F'(x)=f(x)$. Inoltre

Proposizione 3.45.

Per ogni $x\in E$ si ha $F'(x)=f(x)$.

Dimostrazione

Sia $x_0\in E$; siccome $f(x_0)=0$ per costruzione, mostriamo che $F'(x_0)=0$. Soffermiamoci sulla derivata destra di F che è data da

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)}{x-x_0}.$$

Poiché E non contiene intervalli per ipotesi, possono verificarsi solamente due scenari possibili: x_0 è un estremo sinistro di un intervallo in $\mathfrak{C}(E)$ oppure esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$, con $x_n>x_0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, tale che $x_n\to x_0$ per $n\to+\infty$. Nel primo caso abbiamo

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)=0\,.$$

Invece, nel secondo caso, abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 3.46.

Facendo riferimento alle notazioni e alle ipotesi precedenti, per $x>x_n$ si ha

$$|F(x)|<(x-x_n)^2\,. \tag{3.17}$$

Sapendo ciò, abbiamo

$$\left|F'_+(x_0)\right|=\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ n\to+\infty}}\frac{(x-x_n)^2}{x-x_0}<\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$$

da cui $F'_+(x_0)=0$. Poiché $F'_+(x_0)=0$ e, applicando specularmente lo stesso ragionamento, $F'_-(x_0)=0$, abbiamo la tesi per ogni $x_0\in E$. □

In conclusione abbiamo dimostrato che f ha una primitiva in $(0,1)$ pur non essendo ivi integrabile alla Riemann per la contronominale del Lemma 3.41.

✍ Dimostrazione del Lemma 3.46

Per ipotesi abbiamo $x_0 < x_n < x$ con $x_n \in E$, quindi abbiamo due possibilità:

- se $x \in E$, allora $F(x) = 0$ e quindi la (3.17) è immediata;
- se $x \in \mathfrak{C}(E)$, allora $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathfrak{C}(E)$ e $x_n \leq \alpha < x$.

  Se $x \in (\alpha, \alpha + d)$, allora

  $$|F(x)| = (x-\alpha)^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\right| \leq (x-\alpha)^2 \leq (x-x_n)^2 \ ;$$

  se $x \in [\alpha + d, \beta - d]$, allora

  $$|F(x)| = d^2 \left|\sin\left(\frac{1}{d}\right)\right| \leq d^2 \leq (x-\alpha)^2 \leq (x-x_n)^2 \ ;$$

  se $x \in (\beta - d, \beta)$, allora

  $$|F(x)| = (\beta - x)^2 \left|\sin\left(\frac{1}{\beta-x}\right)\right| \leq (\beta-x)^2 < d^2 \leq (x-x_n)^2 \ .$$

□

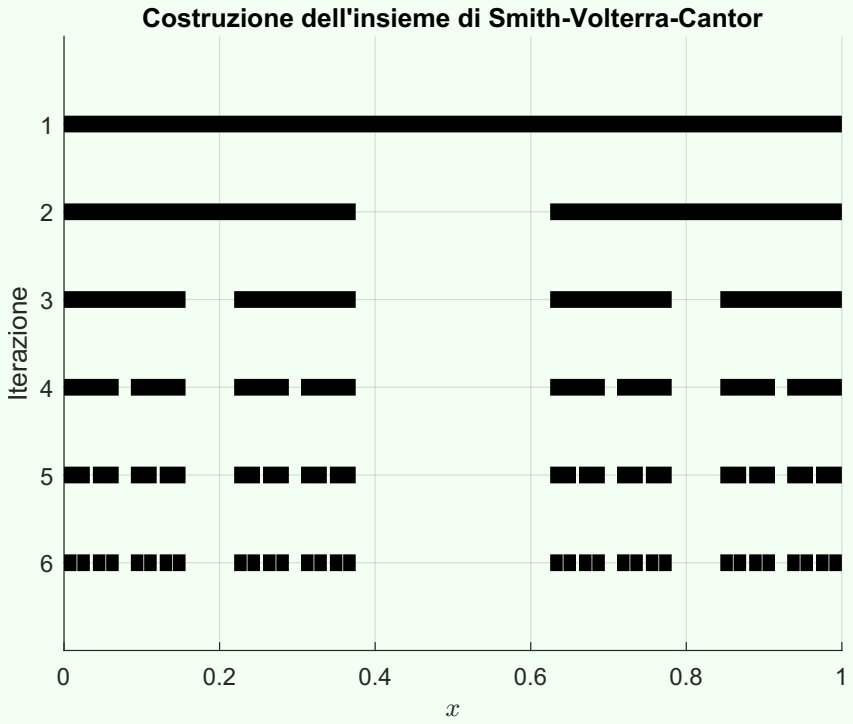


Fig. 36: *Costruzione dell'insieme di Smith-Volterra-Cantor*

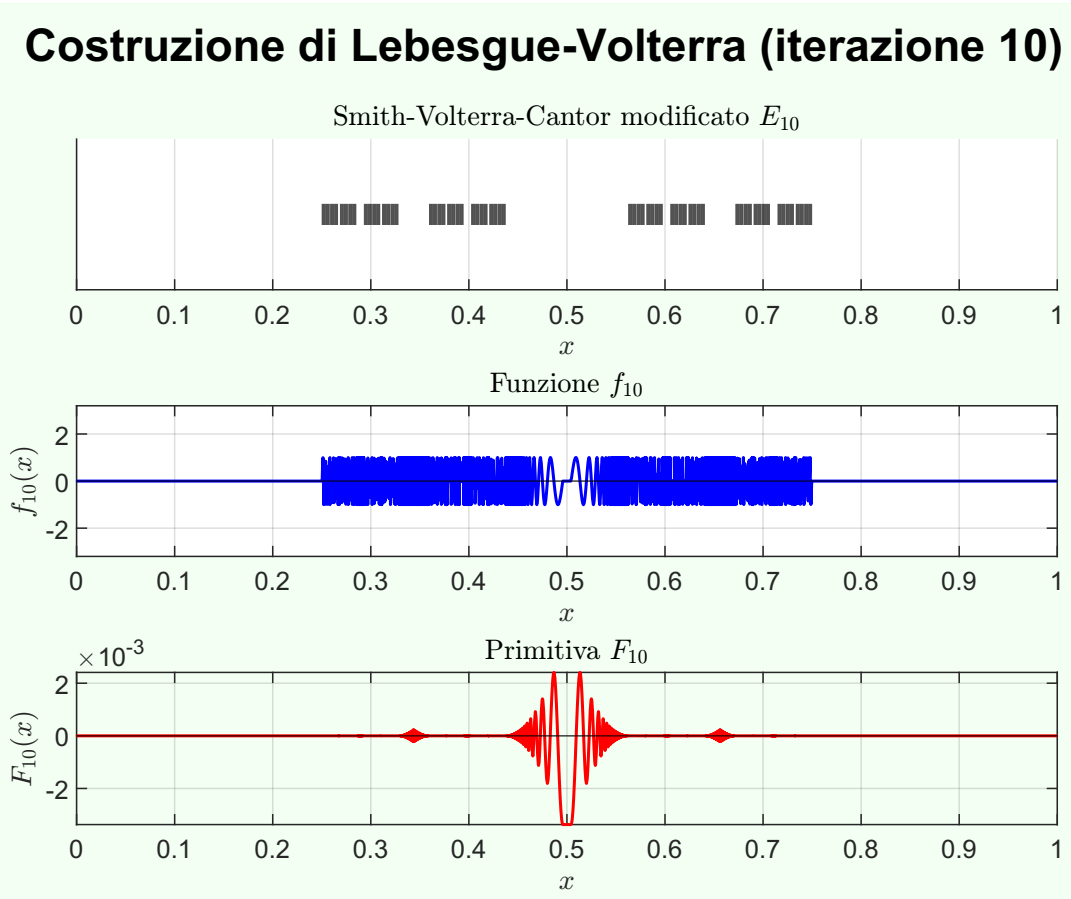


Fig. 37: *Rappresentazione dell'insieme E_N e grafici delle funzioni f_N e F_N al passo $N = 10$ della costruzione: per $N \to +\infty$ si ha $E_N \to E$, $f_N \to f$, $F_N \to F$*

Con la nozione di integrale alla Lebesgue, invece, le operazioni di integrazione e differenziazione diventano reversibili solamente se si considerano funzioni aventi derivata prima limitata. **[10, p. 129]**

Teorema 3.47.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ha derivata f' limitata, allora f' è integrabile alla Lebesgue e

$$\int_{[a,b]} f' \, dm = f(b) - f(a) \ .$$

✍ **Dimostrazione**

Si consideri la successione di funzioni $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}} , & x + \frac{1}{n} \in [a,b] \\ f'(x) , & x + \frac{1}{n} \notin [a,b] \end{cases} .$$

Essa soddisfa le ipotesi del seguente:

Lemma 3.48.

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili definite su un insieme* E *misurabile e limitato tali che* $|f_n(x)| \le B$ *per ogni* $x \in E$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$.
Se esiste $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *per ogni* $x \in E$, *allora*

$$\int_E f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,dm\,.$$

✍ Dimostrazione

Dimostriamo che $\left|\int_E (f - f_n)\,dm\right| \to 0$ per $n \to +\infty$. Per la convergenza puntuale di f_n a f, fissati $x \in E$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n} = \bar{n}(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \ge \bar{n}. \tag{3.18}$$

Ora, posto

$$e_n = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \{x \in E :\ |f_{n+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\,,$$

abbiamo che:

- e_n è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
  $\{x \in E:\ |f_{n+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = E \cap \{x \in \mathbb{R}:\ |f_{n+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$ è misurabile perché lo sono E, per ipotesi, e $\{x \in \mathbb{R}:\ |f_{n+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$, controimmagine dell'insieme misurabile $[\varepsilon, +\infty)$ rispetto alla funzione $|f_{n+p} - f|$ misurabile.

- $e_{n+1} \subseteq e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
  infatti, se $x \in e_{n+1}$, allora esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $|f_{n+1+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon$, ovvero $\left|f_{n+(p+1)}(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon$, da cui $x \in e_n$.

- $\bigcap_{n=1}^{+\infty} e_n = \varnothing$;
  se per assurdo esistesse $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} e_n$, allora $x \in e_{\bar{n}}$, ossia esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $|f_{\bar{n}+p}(x) - f(x)| \ge \varepsilon$, in contraddizione con la (3.18).

Ma allora, per la (3.12), abbiamo $m(e_n) \to 0$ per $n \to +\infty$ e di conseguenza

$$\begin{aligned}\left|\int_E (f - f_n)\,dm\right| &\le \int_{e_n} |f - f_n|\,dm + \int_{E\setminus e_n} |f - f_n|\,dm \\ &< 2B\,m(e_n) + \varepsilon\,(m(E) - m(e_n)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{n\to+\infty} 0\,.\end{aligned}$$

in quanto $m(E) < +\infty$ per ipotesi. □

Infatti ϕ_n è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto f' è misurabile e f è misurabile perché continua per ipotesi, ed è limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché, detta B la costante che limita f':

- se $x + \frac{1}{n} \notin [a,b]$, allora $|\phi_n(x)| = |f'(x)| \leq B$;
- se $x + \frac{1}{n} \in [a,b]$, allora per il teorema di Lagrange applicato a $\left[x, x+\frac{1}{n}\right] \subseteq [a,b]$ esiste $c_{n,x} \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right)$ tale che

$$|\phi_n(x)| = \left| \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \right| = \left| f'(c_{n,x}) \right| \leq B\,.$$

Inoltre phi_n è definita su $[a,b]$, misurabile e limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\phi_n \to f'$ per $n \to +\infty$ in $[a,b]$. Ma allora, poiché le misure di Lebesgue sono invarianti per traslazioni, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f'(x)\, dm(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n(x)\, dm(x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\left[a,b-\frac{1}{n}\right]} \phi_n(x)\, dm(x) + \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} \phi_n(x)\, dm(x) \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Bigg(n \Bigg(\int_{\left[a,b-\frac{1}{n}\right]} f\left(x+\frac{1}{n}\right) dm(x) \\
&\qquad - \int_{\left[a,b-\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) \Bigg) + \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} f'(x)\, dm(x) \Bigg) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Bigg(n \left(\int_{\left[a+\frac{1}{n},b\right]} f(x)\, dm(x) - \int_{\left[a,b-\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) \right) \\
&\qquad + \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} f'(x)\, dm(x) \Bigg) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Bigg(n \left(\int_{\left[b-\frac{1}{n},b\right]} f(x)\, dm(x) - \int_{\left[a,a+\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) \right) \\
&\qquad + \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} f'(x)\, dm(x) \Bigg)\,.
\end{aligned}$$

Ora, per la definizione di media integrale, abbiamo

$$n \int_{\left[b-\frac{1}{n},b\right]} f(x)\, dm(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(b) \qquad \text{e} \qquad n \int_{\left[a,a+\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(a)\,,$$

mentre per la limitatezza di f' si ha

$$\left| \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} f'(x)\, dm(x) \right| \leq \int_{\left(b-\frac{1}{n},b\right]} \left| f'(x) \right| dm(x) \leq \frac{B}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,.$$

Pertanto

$$\int_{[a,b]} f'\, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n\, dm = f(b) - f(a)\,.$$

□

D'altra parte, nell'anno successivo alla sua tesi di dottorato, Lebesgue dimostrò: **[10, p. 137 e ss.]**

Teorema 3.49.

Se f è sommabile su $[a,b]$, allora $\left(\int_{[a,x]} f\,dm\right)' = f(x)$ *quasi ovunque.*

Concludiamo questa discussione riassumendo i principali motivi che hanno portato l'integrale di Lebesgue a diventare lo strumento di riferimento nell'analisi moderna per il calcolo integrale, rispetto alla precedente formulazione di Riemann.

- ☞ L'estensione dell'integrale di Riemann a più dimensioni, pur essendo possibile, risulta poco flessibile dal punto di vista teorico. Al contrario, la definizione dell'integrale di Lebesgue si estende in modo naturale a funzioni di n variabili, una volta introdotto il concetto di misura n-dimensionale. **[13, p. 274 e ss.]**

- ☞ Nel caso dell'integrale di Riemann, i teoremi che consentono di scambiare il limite con l'integrale richiedono generalmente ipotesi piuttosto restrittive, come, ad esempio, la convergenza uniforme, oppure l'assunzione dell'integrabilità della funzione limite. Nell'ambito dell'integrale di Lebesgue, invece, sono disponibili teoremi di convergenza che forniscono condizioni più generali e adatte a garantire il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

- ☞ La teoria dell'integrazione secondo Lebesgue non richiede una distinzione sostanziale tra funzioni limitate e non limitate. Sebbene nel presente lavoro sia stato trattato principalmente il caso delle funzioni limitate, l'estensione al caso delle funzioni non limitate può essere effettuata seguendo un procedimento analogo a quello già illustrato a partire da p. 95; per una trattazione completa si rimanda a **[10, p. 129]**.

- ☞ Nell'ambito della teoria di Lebesgue è inoltre possibile caratterizzare con precisione le funzioni che possono essere ricostruite a partire dalla propria derivata, ossia le funzioni per le quali è valido il teorema fondamentale del calcolo integrale. Tali funzioni sono precisamente le funzioni *assolutamente continue*.

- ☞ Infine, gli spazi delle funzioni integrabili secondo Lebesgue presentano la proprietà di completezza, a differenza degli spazi corrispondenti delle funzioni integrabili secondo Riemann. Questa caratteristica rappresentò probabilmente uno dei principali fattori che contribuirono alla diffusione della teoria di Lebesgue, conferendole una struttura particolarmente adatta allo sviluppo dell'analisi funzionale.

Conclusioni

Il percorso sviluppato in questa tesi ha avuto come punto di riferimento la *Habilitationsschrift* di Bernhard Riemann del 1854, considerata nel contesto del problema della rappresentazione delle funzioni mediante serie trigonometriche. L'obiettivo non è stato quindi quello di ricostruire semplicemente la storia delle serie di Fourier, ma di comprendere in quale modo le difficoltà poste da questo problema abbiano contribuito a orientare la ricerca di Riemann e, in particolare, la sua riflessione sul concetto di integrale e sulla rappresentazione delle funzioni.

Il problema posto da Fourier assume, nel corso dell'Ottocento, una fisionomia progressivamente più complessa. La possibilità di sviluppare una funzione in serie trigonometrica solleva infatti questioni che non possono essere risolte attraverso sole argomentazioni formali: occorre stabilire in quali condizioni la serie converga, a quale funzione converga e quale significato debba essere attribuito ai coefficienti che compaiono nello sviluppo. Le ricerche di Poisson, Cauchy e soprattutto Dirichlet mostrano come il problema della rappresentazione conduca inevitabilmente a interrogarsi sulle proprietà delle funzioni e sugli strumenti analitici necessari per trattarle in modo rigoroso.

È all'interno di questo quadro che assume particolare rilievo la *Habilitationsschrift* di Riemann. La memoria non deve essere interpretata come un contributo isolato alla teoria dell'integrazione, ma come parte di una ricerca più ampia, nella quale le difficoltà legate alle serie trigonometriche costituiscono uno dei problemi di fondo. La definizione dell'integrale di Riemann risponde infatti all'esigenza di estendere la classe delle funzioni trattabili dall'analisi e di precisare le condizioni che rendono possibili le operazioni fondamentali della teoria. Da questo punto di vista, l'integrale non rappresenta soltanto uno degli esiti principali della memoria, ma uno degli strumenti attraverso cui Riemann affronta il problema della rappresentazione. I risultati preliminari e le condizioni introdotte nella *Habilitationsschrift* mettono così in evidenza l'intreccio tra integrazione e serie trigonometriche, mostrando come la definizione di un nuovo strumento analitico sia legata a esigenze provenienti dallo studio delle funzioni.

La lettura della *Habilitationsschrift* alla luce degli sviluppi successivi permette inoltre di cogliere la portata delle questioni affrontate da Riemann. I problemi dell'unicità e della convergenza delle serie trigonometriche conducono infatti, nei decenni successivi, a nuove domande sulla struttura degli insiemi e sulle diverse forme di convergenza. Le ricerche di Cantor e lo sviluppo della teoria degli insiemi mostrano come una questione apparentemente circoscritta all'unicità della rappresentazione di funzioni possa assumere una dimensione più generale. Analogamente, la distinzione tra convergenza uniforme, assoluta, in media quadratica e puntuale evidenzia la pluralità dei fenomeni racchiusi nel termine "convergenza" e la necessità di precisare, di volta in volta, quale proprietà si intenda considerare.

Anche il successivo passaggio dalla teoria dell'integrazione di Riemann alla teoria della misura e all'integrazione di Lebesgue può essere letto come parte di questo processo di progressiva precisazione e generalizzazione degli strumenti dell'analisi. La costruzione della misura di Borel e l'integrazione di Lebesgue non rappresentano semplicemente un superamento della teoria riemanniana, ma sviluppano esigenze già emerse nello studio delle funzioni, della convergenza e delle loro rappresentazioni. L'ampliamento della nozione di integrabilità e la maggiore flessibilità nel trattamento dei processi di limite permettono infatti di affrontare problemi che la teoria precedente non era in grado di trattare con la stessa generalità.

Il problema delle serie trigonometriche costituisce così il punto di partenza di una trasformazione più ampia della matematica dell'Ottocento. Dalla questione della rappresentazione di una funzione emergono interrogativi sempre più articolati riguardanti l'integrabilità, la convergenza, l'unicità e la struttura degli insiemi. In questo senso, il contributo di Riemann appare significativo non tanto perché fornisca una soluzione definitiva al problema da cui prende le mosse, quanto perché contribuisce a ridefinirne i termini e a mettere in relazione questioni che diventeranno centrali nello sviluppo dell'analisi moderna. La *Habilitationsschrift* del 1854 può essere quindi considerata, alla luce del percorso ricostruito, non soltanto come una tappa nella storia delle serie di Fourier, ma come un momento significativo nella progressiva ridefinizione degli strumenti e dei concetti dell'analisi matematica.

Appendice A

Gli integrali di Cauchy e di Riemann

Il confronto tra la definizione di integrale definito proposta da Augustin-Louis Cauchy nel *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* [2] del 1823 e quella formulata da Bernhard Riemann nella *Habilitationsschrift* [15] del 1854 è particolarmente significativo per comprendere il passaggio, nell'analisi dell'Ottocento, da una concezione dell'integrale legata a una classe relativamente ristretta di funzioni a una teoria generale dell'integrabilità. L'obiettivo di questa appendice è mettere a confronto le due impostazioni, evidenziandone gli elementi comuni, le differenze e i rispettivi limiti. Tale confronto sarà condotto considerando le definizioni nel loro contesto storico e concettuale, senza trascurare il diverso linguaggio matematico adottato dai due matematici; in questo modo sarà possibile mettere in luce la progressiva evoluzione del concetto di integrale nel corso della prima metà dell'Ottocento.

La definizione di Cauchy

Nel *Résumé*, la teoria dell'integrazione viene introdotta a partire dalla necessità di stabilire preliminarmente l'esistenza degli integrali definiti. Cauchy dichiara infatti in [2, p. 11] che

> *«Nel calcolo integrale, mi è sembrato necessario dimostrare in generale l'esistenza delle integrali o delle funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. Per riuscirci, è stato prima necessario stabilire la nozione di integrali presi tra limiti dati o integrali definiti. Questi ultimi, talvolta, possono essere infiniti o indeterminati, quindi era essenziale cercare in quali casi essi conservano un valore unico e finito. [...]»*

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*intégrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*. Ces dernières pouvant être quelquefois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie. Le moyen

Fig. 38: *Estratto dell'*Avertissement *della* Résumé

Consideriamo una funzione f **continua** nell'intervallo $[x_0, X]$ e prendiamo una suddivisione $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X$, a cui associamo la quantità

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i)\ . \qquad (\star)$$

Come giustamente osserva Cauchy, l'espressione $(\star)$ dipende dal numero n di punti di suddivisione dell'intervallo $[x_0, X]$ e dal valore ivi assunto dalla funzione f.

A questo punto Cauchy dimostra che il modo in cui si suddivide $[x_0, X]$ non influenza il valore della somma S; sostanzialmente, egli considera dapprima una suddivisione dell'intervallo e poi immagina di suddividere ulteriormente ciascuno dei sottointervalli. Prendiamo $[x_i, x_{i+1}]$ con $0 \leq i \leq n-1$: raffinando la suddivisione iniziale, il termine $(x_{i+1} - x_i)\, f(x_i)$ viene dunque sostituito da una somma di prodotti relativi ai nuovi sottointervalli e, poiché la funzione f è continua per ipotesi, tale nuova somma risulta uguale a $(x_{i+1} - x_i)\, f(x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i))$ con $0 < \theta_i < 1$. Ora, sempre per la continuità di f, gli scalari $\varepsilon_i := f(x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)) - f(x_i)$ diventano infinitesimi insieme alle ampiezze dei sottointervalli, di conseguenza

$$S' = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)) = S + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, \varepsilon_i$$

e $S' \to S$ quando la suddivisione viene raffinata. Dopodiché Cauchy prosegue così:

> «*Dunque, quando gli elementi della differenza $X - x_0$ diventano infinitamente piccoli, il modo di divisione non ha più sul valore di S che un'influenza insensibile; e, se si fanno decrescere indefinitamente i valori numerici di questi elementi, aumentandone il numero, il valore di S finirà per essere sensibilmente costante o, in altri termini, finirà per raggiungere un certo limite che dipenderà unicamente dalla forma della funzione $f(x)$ e dai valori estremi x_0 e X attribuiti alla variabile x. Questo limite è ciò che si chiama* **integrale definito**.»

Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

Fig. 39: *Estratto della ventunesima lezione della* Résumé, *[2, p. 125]*

Tale passaggio è particolarmente significativo dal punto di vista storico: l'integrale viene infatti caratterizzato attraverso un **processo di limite** applicato a una somma di prodotti del tipo $f(x)\,\Delta x$ che può essere indicata simbolicamente come

$$\sum f(x)\,\Delta x\,.$$

Nella notazione moderna, il procedimento può quindi essere espresso schematicamente come

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i\,.$$

Confronto tra le due definizioni

Riportiamo, per comodità, la definizione di integrale data da Riemann in **[15, p. 102]** che abbiamo già fornito a p. 36.

Definizione.

Data una successione di valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ compresi tra $x_0 = a$ e $x_n = b$, cioè per cui $x_{i-1} < x_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ponga $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e sia ε_i una frazione positiva (minore di 1) per ogni $i = 1, \ldots, n$. Allora il valore della somma

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n) \qquad (\star\star)$$

dipenderà dalla scelta degli intervalli $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ e dalle frazioni $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$. Se ora essa possiede la proprietà di avvicinarsi a un limite fisso A all'infinito, qualsiasi siano $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ e $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ scelti, non appena tutti gli intervalli diventano infinitamente piccoli, allora tale valore si chiama $\int_a^b f(x)\,dx$.

La definizione di Cauchy contiene dunque, in forma embrionale, il meccanismo che sarà alla base della definizione di Riemann: in entrambi i casi si considera infatti una suddivisione dell'intervallo e si associa a essa una somma di prodotti tra valori della funzione e lunghezze dei sottointervalli, infine l'integrale definito viene identificato con il limite di tali somme.

Una prima diversità che si può notare nelle due nozioni di integrale è data dai punti in cui si calcolano i valori della funzione per ottenere le somme. Nella relazione $(\star)$ di Cauchy, la funzione viene valutata negli estremi sinistri $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ dei sottointervalli, mentre nella $(\star\star)$ di Riemann si valuta la funzione in generici punti intermedi $\{\xi_i = x_i + \varepsilon_{i+1}(x_{i+1} - x_i)\}_{i=0}^{n-1}$, con $\varepsilon_i \in [0,1]$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, dei sottointervalli $\{[x_i, x_{i+1}]\}_{i=0}^{n-1}$. In sintesi, mentre Cauchy assume la funzione f continua e, utilizzando una costruzione del tipo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_{i+1}\,, \qquad \Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i\,,$$

dimostra che tale somma tende a un valore determinato e finito quando la suddivisione diventa sufficientemente fine, Riemann considera invece più in generale

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_{i+1}\,, \qquad \Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i\,, \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\,,$$

e si domanda quali siano le condizioni necessarie e sufficienti da assumere sulla funzione in modo che tutte queste somme, indipendentemente dalla scelta dei punti intermedi $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ e della suddivisione $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, tendano allo stesso valore finito.

La differenza fondamentale emerge tuttavia quando ci si chiede quanto sia necessario assumere sulla funzione affinché il limite esista. Per Cauchy, la continuità garantisce l'esistenza del limite e di conseguenza la definizione è accompagnata da una classe di funzioni per le quali l'integrabilità è già assicurata. Nella memoria di Riemann, invece, il punto di vista cambia: l'integrale non viene considerato solamente come un'operazione già disponibile per le funzioni continue, ma diventa necessario determinare quali siano le condizioni che permettono al procedimento di integrazione di funzionare (anche in assenza di continuità).

Questa discrepanza tra le due definizioni è molto importante perché mostra che la nozione di integrale secondo Riemann è applicabile a una classe di funzioni più vasta rispetto a quella delle funzioni per cui è utilizzabile la nozione di Cauchy. A titolo esemplificativo, prendendo la funzione già vista nell'Esempio 2.4 (vedi p. 39), avremo che essa non è integrabile secondo la definizione di Cauchy in quanto non continua (per giunta in un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$), mentre abbiamo già visto che risulta integrabile secondo Riemann in quanto soddisfa le ipotesi del Teorema 2.3.

Appendice B

Script MATLAB

Figura 30

```
% ================================================================
%                    Grafici delle funzioni p_k(theta)
%                  p_k(theta) = (epsilon + cos(theta))^k
% ================================================================

clear
clc
close all

% Input di epsilon
epsilon  = input('epsilon   = ');

% Input dei valori di k
k_values = input('vettore k = ');

% Intervallo per theta
theta = linspace(-pi, pi, 2000);

% Creazione della figura
figure;
hold on;

% rette theta=0 e y=0 (non nella legenda)
xline(0, 'k', 'LineWidth', 1, 'HandleVisibility', 'off');
yline(0, 'k', 'LineWidth', 1, 'HandleVisibility', 'off');

% Grafici delle funzioni
for j = 1:length(k_values)
    k = k_values(j);
    p_k = (epsilon + cos(theta)).^k;
    plot(theta, p_k, 'LineWidth', 1.5, ...
        'DisplayName', sprintf('$k = %d$', k));
end

% Etichette, titolo, legenda
xlabel('$\theta$', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$p_k(\theta)$', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
```

```
str = sprintf(['{\\boldmath$p_k(\\theta) = (\\varepsilon +' ...
    '\\cos(\\theta))^k \\,, \\qquad \\varepsilon = %.3f$}'], epsilon);
title(str, 'Interpreter', 'latex');

legend('show', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best', ...
    'Color', 'none', 'EdgeColor', 'none');

% Impostazione dei limiti dell'asse x
xlim([-pi pi]);

% Etichette dell'asse x in termini di pi
xticks([-pi -pi/2 0 pi/2 pi]);
xticklabels({'$-\pi$', '$-\pi/2$', '$0$', '$\pi/2$', '$\pi$'});
ax = gca;
ax.XAxis.TickLabelInterpreter = 'latex';

hold off;

% Sfondo trasparente
set(gcf, 'Color', 'none');
set(gca, 'Color', 'none');

exportgraphics(gcf, 'plot_funzioni_pk.pdf', 'ContentType', 'vector', ...
    'BackgroundColor', 'none');
```

Figura 36

```
%==========================================================
%     Rappresentazione (troncata) dell'insieme di Smith-Volterra-Cantor
%==========================================================

clear
clc
close all

N = input('Numero di iterazioni = ');
V = [0 1];

figure;
hold on;

for n = 1:N

    % Disegna gli intervalli presenti
    for i = 1:size(V,1)
        plot(V(i,:), [n n], 'k', 'LineWidth', 7);
    end

    % Lunghezza degli intervalli da eliminare
    L = 1/(4^n);

    % Genera l'iterazione successiva
    V_new = zeros(2*size(V,1),2);
```

```
    for i = 1:size(V,1)
        a = V(i,1);
        b = V(i,2);

        % Punto centrale
        c = (a+b)/2;

        % Estremi dell'intervallo centrale da rimuovere
        a_out = c-L/2;
        b_out = c+L/2;

        % Parte del nuovo insieme
        V_new(2*i-1,:) = [a a_out];
        V_new(2*i,:)   = [b_out b];
    end

    V = V_new;
end

set(gca, 'YDir', 'reverse');
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Iterazione');
title('Costruzione dell''insieme di Smith-Volterra-Cantor');
xlim([0 1]);
ylim([0 N+1]);
yticks(1:N);
grid on;
hold off;

% Sfondo trasparente
set(gcf, 'Color', 'none');
set(gca, 'Color', 'none');

exportgraphics(gcf, 'plot_insieme_svc.pdf', 'ContentType', 'vector', ...
    'BackgroundColor', 'none');
```

Figura 37

```
% ========================================================================
% ESEMPIO DI LEBESGUE CON SMITH-VOLTERRA-CANTOR
% ========================================================================

clear
clc
close all

N   = input('Iterazione = ');
N_x = 100000;                          % numero di punti per il grafico
x   = linspace(0,1,N_x);
phi = @(t) 2*t.*sin(1./t) - cos(1./t);

% ------------------------------------------------------------------------
% COSTRUZIONE DI E, C(E)
% ------------------------------------------------------------------------
```

```
V   = [0  1];      % intervalli che rimangono
C_V = [];          % intervalli rimossi

for n = 1:N
    V_new = [];
    L     = 1/(4^n);        % lunghezza da rimuovere

    for i = 1:size(V,1)
        a     = V(i,1);
        b     = V(i,2);
        c     = (a+b)/2;
        a_out = c-L/2;
        b_out = c+L/2;
        C_V   = [C_V; a_out b_out];
        V_new = [V_new; a a_out; b_out b];
    end

    V = V_new;
end

E   = 1/4 + V/2;
C_E = 1/4 + C_V/2;

% ------------------------------------------------------------------------
% COSTRUZIONE DI f_n, F_n
% ------------------------------------------------------------------------

f = zeros(size(x));
F = zeros(size(x));

for i = 1:size(C_E,1)
    a = C_E(i,1);
    b = C_E(i,2);
    c = (a+b)/2 - a;

    % ------------------------------------------------------------------------
    % Troviamo d = ultimo zero di phi prima di L
    % ------------------------------------------------------------------------
    tt  = linspace(1e-5,c,5000);
    yy  = phi(tt);
    ind = find(yy(1:end-1).*yy(2:end) <= 0);
    ii  = ind(end);                                  % ultimo zero
    d   = fzero(phi,[tt(ii),tt(ii+1)]);              % raffinamento con fzero

    % ------------------------------------------------------------------------
    % Parte sinistra
    % ------------------------------------------------------------------------
    mask    = (x>a) & (x<a+d);
    t       = x(mask)-a;
    f(mask) = phi(t);
    F(mask) = t.^2 .* sin(1./t);

    % ------------------------------------------------------------------------
    % Parte centrale
    % ------------------------------------------------------------------------
    mask    = (x>=a+d) & (x<=b-d);
```

```
    f(mask) = 0;
    F(mask) = d^2*sin(1/d);

    % ------------------------------------------------------------------
    % Parte destra
    % ------------------------------------------------------------------
    mask    = (x>b-d) & (x<b);
    t       = b-x(mask);
    f(mask) = -phi(t);
    F(mask) = t.^2 .* sin(1./t);

end


% ------------------------------------------------------------------
% GRAFICI
% ------------------------------------------------------------------

figure;
sgtitle(['Costruzione di Lebesgue-Volterra (iterazione ', ...
    num2str(N), ')'], 'FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');

% ------------------------------------------------------------------
% E_n
% ------------------------------------------------------------------
subplot(3,1,1);
hold on;
for i = 1:size(E,1)
    plot(E(i,:), [0 0], 'k', 'LineWidth', 7);
end
xlim([0 1]);
ylim([-0.2 0.2]);
yticks([]);
title(['Smith-Volterra-Cantor modificato $E_{', num2str(N), '}$'], ...
    'Interpreter', 'latex');
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

% ------------------------------------------------------------------
% f_n
% ------------------------------------------------------------------
subplot(3,1,2);
plot(x, f, 'b', 'LineWidth', 1);
hold on;
yline(0,'k');
xlim([0 1]);
ylim([-3.2 3.2]);
title(['Funzione $f_{', num2str(N), '}$'], 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel(['$f_{',num2str(N),'}(x)$'], 'Interpreter', 'latex');
grid on;

% ------------------------------------------------------------------
% F_n
% ------------------------------------------------------------------
subplot(3,1,3);
```

```
plot(x, F, 'r', 'LineWidth', 1);
hold on;
yline(0,'k');
xlim([0 1]);
title(['Primitiva $F_{',num2str(N),'}$'], 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel(['$F_{',num2str(N),'}(x)$'], 'Interpreter', 'latex');
grid on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Salvataggio
% ------------------------------------------------------------------------
set(gcf, 'Color', 'none');
set(gca, 'Color', 'none');
exportgraphics(gcf, 'plot_costruzione_lebesgue_volterra.pdf', ...
    'ContentType', 'vector', 'BackgroundColor', 'none');
```

Bibliografia

[1] U. Bottazzini, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Bollati Boringhieri, 1981.

[2] A. L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, in: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, vol. 4, série 2, Gauthier-Villars, Paris, 1899, pp. 11, 122–127.

[3] A. L. Cauchy, *Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques*, in: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, vol. 2, série 1, Gauthier-Villars, Paris, 1908, pp. 12–19.

[4] G. Darboux, cur., *Œuvres de Fourier*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1888, p. 157.

[5] R. Dedekind e H. Weber, cur., *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1876.

[6] L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 4 (1829), pp. 157–169.

[7] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Diot, Paris, 1822.

[8] M. Giaquinta, *Funzioni e numeri*, Scuola Normale Superiore, 2019.

[9] I. Grattan-Guinness e J. R. Ravetz, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT Press, 1972.

[10] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, Seconda edizione, AMS Chelsea Publishing, 2000.

[11] H. N. Jahnke, *A History of Analysis*, vol. 24, History of Mathematics, American Mathematical Society, 2003.

[12] D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*, trad. da A. Shenitzer, Ristampa, Birkäuser, 1999.

[13] H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di Matematica Pura e Applicata, 3ª ser. 7 (1902), pp. 231–359.

[14] S. Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Bachelier, Paris, 1835, pp. 187–211.

[15] B. Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1867), pp. 87–132.

[16] E. Robertson e J. O'Connor, *MacTutor History of Mathematics*, URL: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`, Archivio dedicato alla storia della matematica, lanciato nel 1995 e in costante aggiornamento.

[17] E. M. Stein e R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, vol. I, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, 2003.

[18] L. Sylow e S. Lie, cur., *Œuvres Complètes de Niels Henrik Abel*, vol. 1, Grondahl, Christiania, 1881, p. 259.

Ringraziamenti

Concludere questo percorso di studi con la realizzazione di questa tesi rappresenta per me un traguardo importante, frutto di anni di impegno, crescita e determinazione. Desidero quindi dedicare queste righe a tutte le persone che, in modi diversi, hanno contribuito a rendere possibile il raggiungimento di questo obiettivo.

Il mio più sentito ringraziamento va innanzitutto ai miei Relatori, la Professoressa Michela Eleuteri e il Professor Carlo Benassi, per la disponibilità, la competenza e la costante guida durante lo sviluppo di questo lavoro. La loro professionalità, i preziosi consigli e gli stimoli ricevuti hanno rappresentato un punto di riferimento fondamentale, consentendomi di affrontare questa esperienza con maggiore consapevolezza e spirito critico.

Ringrazio inoltre tutti i docenti che hanno accompagnato il mio percorso universitario, trasmettendomi conoscenze, metodo e passione per lo studio. Ognuno di loro ha contribuito, in misura diversa, alla mia formazione personale e professionale.

Un ringraziamento speciale è rivolto ai miei genitori che mi hanno sostenuto con affetto, pazienza e fiducia durante tutto il mio percorso accademico. La loro presenza costante, il loro incoraggiamento e i sacrifici affrontati per permettermi di perseguire i miei obiettivi hanno rappresentato una fonte inesauribile di forza e motivazione. A loro devo molto più di quanto queste parole possano esprimere.

Desidero ringraziare anche i miei amici e tutte le persone che hanno condiviso con me questi anni di studio. La loro vicinanza, il confronto, i momenti di leggerezza e il sostegno nei periodi più impegnativi hanno reso questo cammino non solo più semplice, ma anche più ricco di significato.

Infine, rivolgo un pensiero a tutte le persone che, anche con un gesto, un consiglio o una parola di incoraggiamento, hanno lasciato un segno nel mio percorso. Questo traguardo rappresenta certamente un punto di arrivo, ma soprattutto l'inizio di un nuovo capitolo, che affronterò con la curiosità, la determinazione e i valori che questi anni mi hanno permesso di costruire.

A tutti voi, la mia più sincera e profonda gratitudine.